
3 3433 06909446 8

LECONS

D'ALGÈBRE.

VERTISSEMENT.

T ouvrage laisserait peu à désirer s'il avait un te proportionné aux soins que j'ai mis à le com-:. Mais je compte beaucoup sur l'indulgence des mes habiles qui ont l'expérience de l'enseigne-:, et qui savent combien les élémens de l'algèbre ıt de difficultés tant pour le choix de méthodes ›our la disposition des parties.

j'avais borné ces leçons à ce qui est exigé pour ıission à l'École Polytechnique, elles eussent é un volume beaucoup moins étendu. J'ai jugé mites trop resserrées; mais tout ce que j'ai ajouté us est tellement distribué qu'il n'en peut résulter n embarras pour les lecteurs qui voudront le :r de côté.

ırs de ces limites se trouve un beau théorème, :e peu connu, dont l'objet est de déterminer : manière simple et précise combien une équa-ı de racines réelles entre deux nombres donnés.

Par cette découverte, l'analyse des équations a reçu de M. Sturm un perfectionnement que n'avaient pu lui donner les efforts des plus grands géomètres, et il y a lieu de croire que, sur ce point, une heureuse réforme aura été introduite dans l'enseignement d'ici à quelques années. Quoiqu'elle ait déjà été commencée par MM. Mayer et Choquet dans leurs *Élémens d'algèbre*, je me suis encore conformé à la méthode ordinaire; mais j'ai réuni dans un chapitre spécial plusieurs théorèmes remarquables sur les équations, et j'ai placé parmi eux celui de M. Sturm.

J'ai emprunté à M. Cauchy l'analyse par laquelle il démontre que toute équation a une racine, et je lui dois aussi en grande partie les considérations générales que j'ai présentées sur les séries.

TABLE DES MATIÈRES.

N. B. On a marqué d'une étoile les articles qui ne sont point exigés pour l'admission à l'École Polytechnique.

Pages.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

N.B. **Le lecteur doit avoir bien soin de corriger les fautes indiquées ici.**

---

lig.

4 en montant, $(+8)+(-5)$ *lisez* $(+3)+(-5)$

10, $+10$ *lisez* -10

25, $-a\times+\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}a$ *lisez* $-a\times\frac{7}{5}=-\frac{7}{5}a$

11 au dénominateur, a^3 *lisez* $3a^3$

3 en montant, 20 *lisez* 10

1, t' *lisez* t

1, CHAPITRE V *lisez* CHAPITRE VIII

7, $\sqrt{a\times-1}$ *lisez* $\sqrt{a^2\times-1}$

2 en montant, $x=$ *lisez* $x^2=$

5 et 9, $\frac{4}{5}\sqrt{-1}$ *lisez* $\frac{3}{5}\sqrt{-1}$

5, $x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ *lisez* $x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0$

18, cx^2 *lisez* cx

6 en montant, $\frac{2}{x}$ *lisez* $\frac{b^2}{x}$

5 en montant, $4320a^9b^3xb^6$ *lisez* $4320a^9b^3x^6$

8 en montant, $2^7a^{642}b^{55}$ *lisez* $2^{76}a^{49}b^{55}$

3, $z^m=\sqrt[p]{}$ *lisez* $z^m=\sqrt[q]{}$

21, $=A$ *lisez* $=-A$

5, $\frac{a}{b}$ *lisez* $\frac{b}{a}$

8, $\frac{x-y}{1}$ *lisez* $\frac{x-y}{2}$

23, plus grand diviseur *lisez* plus grand diviseur commun

22, à gauche *lisez* à droite

9, $a^{m'-m}$ *lisez* $a^{m-m'}$

20, $a^{2n}=Ea^{2n}p+a^{2n}$ *lisez* $a^{3n}\mp Ea^{2n}p+a^{2n}$

7, 3, 5, 6, 7, 11 *lisez* 3, 5, 6, 7, 10, 11

17, *corrigez comme il suit :* On pourrait aussi prouver que, par rapport à chaque nombre premier p, il existe autant de racines primitives qu'il y a, entre o et p, de nombres premiers à $p-1$, l'unité étant comptée parmi ces nombres. Mais....

3, la raison r *lisez* la raison δ

3 en montant, $\frac{aq^n}{q-1}$ *lisez* $\frac{aq^n}{1-q}$

4, *dans la 2ᵉ accolade le numérateur de* S *doit être* $l(q-1)$

7, *daus la 3ᵉ accolade, au dénominateur de* S, *l'indice de chaque radical est* $n-1$

pag.	lig.
279	15, $x=a+\sqrt{a^2+1}$ *lisez* $x'=a+\sqrt{a^2+1}$
280	21, *il manque le quotient* 6
281	16, *à la fin de la ligne il manque la fraction* $\frac{1}{11978}$
282	8, $\frac{1}{x}$ *lisez* $\frac{1}{x'}$
295	16, par a *lisez* par α
296	19, $=\beta\frac{1}{\mu}$ *lisez* $\beta=\frac{1}{\mu}$
297	23, *à la fin de l'équation lisez* $\frac{1}{a z}$
299	6 en montant, $\frac{a}{c^n}$ *lisez* $\frac{a}{c^{n'}}$
311	4 en montant, Som. — 1 *lisez* Som. — 10
331	10, $+y^3 \ldots$ *lisez* $+(2y^3 \ldots$
335	10 en montant, s'il ne divise point AB *lisez* s'il ne divise p
347	1 en montant, *mettez le signe* + *entre* $f t^2$ *et* $f' t^2$
348	18, $f t^{n+3}$ *lisez* $f t^{n+2}$
350	5, x au lieu de a *lisez* a au lieu de x
359	8, *mettez le signe* + *devant* $\frac{Q}{U}x^2$
374	16, $\frac{X}{1}$ *lisez* $\frac{X'}{1}$
375	3, le polynôme X *lisez* le polynôme X'
Ibid.	7, $(x-b)^n$ *lisez* $(x-b)^{n'}$
379	7 et suiv. *C'est* V *qui est le produit des facteurs égaux, et* ' *lui des facteurs simples.*
402	6 et 9 en montant, $\frac{1}{2\,3}X'''$ *lisez* $\frac{1}{2.3}X'''$
404	3. $uz+t$ *lisez* $tz+u$
405	11 en montant, R *lisez* 3R
412	2 en mont., du dernier terme —18 *lisez* du dernier term
413	11, $2x^4$ *lisez* $2x^3$
417	15, plus grand coefficient *lisez* plus grand coefficient n
427	16, α et β *lisez* $-\alpha$ et $-\beta$
434	15 en montant, $<\delta$ *lisez* $>\delta$
446	1 en montant, $+\frac{A'''}{1.2}\frac{1}{y^3}$ *lisez* $+\frac{A'''}{2.3}\frac{1}{y^3}$
451	13 en montant, $\frac{99}{403}$ *lisez* $\frac{403}{99}$
464	8, l'équation de x *lisez* l'équation en x
475	12 et 13 en montant, $\frac{1}{2.3}$ *lisez* $\frac{1}{2}$
477	6, $X^{(n-1)}$ *lisez* $X^{(n+1)}$
481	10, quantités positives *lisez* quantités négatives

LEÇONS

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

Objet de l'algèbre. Premières difficultés qui se présentent.

1. Dans toute question qu'on peut proposer sur les nombres, il doit exister, entre les quantités connues et les inconnues, certaines conditions que l'énoncé de la question fait connaître; et la solution a pour but de déterminer les inconnues de manière qu'elles vérifient ces conditions. Il faut donc s'attacher d'abord à bien saisir les diverses relations par lesquelles toutes les quantités connues ou inconnues sont liées entre elles, et trouver ensuite, au moyen de ces relations, quelles opérations on doit effectuer sur les quantités données pour obtenir les inconnues. Tel est l'objet qu'on se propose plus spécialement dans cette partie des mathématiques à laquelle on donne le nom d'Algèbre.

2. Pour mieux apprécier les premiers moyens qu'elle met en œuvre, je prendrai le problème suivant : *Partager* 52 *en trois parties telles que la moyenne partie surpasse de* 9 *la plus petite, et qu'elle soit surpassée de* 13 *par la plus grande.*

D'après cet énoncé, les parties inconnues doivent remplir trois conditions :

1° Que la moyenne soit égale à la plus petite augmentée de 9,

2° Que la plus grande soit égale à la moyenne augmentée de 13;

3° Que la somme des trois parties fasse 52.

Maintenant, voici par quelles déductions on arrive aux valeurs des inconnues :

Puisque la moyenne partie doit être égale à la plus petite plus 9, au lieu de dire que la plus grande doit être égale à la moyenne plus 13, on peut dire qu'elle doit être égale à la plus petite plus 9, plus 13.

Donc la somme des trois parties se compose de 3 fois la plus petite, plus 2 fois 9, plus 13; et comme 2 fois 9, plus 13, font 31, on peut dire encore que cette somme est égale à 3 fois la petite partie, plus 31.

Or, l'énoncé exige que cette même somme fasse 52 : donc, si on retranche 31 de 52, le reste 21 sera égal à 3 fois la petite partie; et, par conséquent, en divisant ce reste par 3, le quotient 7 sera la petite partie.

Alors il est évident que la moyenne partie sera 7 plus 9, ce qui fait 16.

Et il est évident aussi que la plus grande sera 16 plus 13, ce qui fait 29.

Ainsi les trois parties inconnues sont 7, 16, 29.

3. Si, dans l'énoncé de la question, on changeait les nombres donnés, sans faire aucune autre altération, on arriverait aux valeurs des inconnues par des raisonnemens tout-à-fait semblables. Mais on peut proposer la question d'une manière générale, comme il suit :

Partager une quantité donnée en trois parties telles qu'il y ait une différence donnée entre la moyenne et la plus petite, et aussi une différence donnée entre la plus grande et la moyenne.

En ces termes, les quantités données peuvent être telles grandeurs qu'on voudra, et il ne s'agit plus de trouver que les inconnues sont égales à tels ou tels nombres particuliers, mais bien quelles opérations il faut effectuer sur les quantités données pour obtenir ces inconnues. On y parvient encore par les mêmes raisonnemens, et alors voici comment ils se présentent :

La moyenne partie est égale à la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite.

La plus grande est égale à la moyenne, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne. Donc on peut dire aussi qu'elle est égale à la plus petite, plus l'excès de la moyenne sur la plus petite, plus l'excès de la plus grande sur la moyenne.

En faisant la somme des trois parties, on voit donc qu'elle contiendra 3 fois la petite partie, plus 2 fois l'excès de la moyenne sur la petite, plus une fois l'excès de la grande sur la moyenne.

Or, cette somme doit être égale au nombre à partager; donc, en retranchant du nombre à partager 2 fois l'excès de la moyenne partie sur la plus petite et une fois l'excès de la grande sur la moyenne, le reste sera égal à 3 fois la petite partie. Par conséquent, en divisant ce reste par 3, on aura la petite partie.

Alors, en ajoutant à cette partie l'excès dont elle est surpassée par la moyenne, on aura cette moyenne partie.

Puis, en ajoutant à la moyenne partie l'excès dont elle est surpassée par la grande, on connaîtra cette dernière.

4. Dans la solution qu'on vient d'exposer, deux causes de complication sont à remarquer. L'une vient de ce que chaque quantité, connue ou inconnue, est continuellement désignée par l'ensemble de plusieurs mots, comme *le nombre à partager*; *la petite partie*, etc. L'autre résulte de ce que, pour rappeler les relations des quantités entre elles, il faut fréquemment répéter les expressions qui indiquent ces relations, comme *plus*, *moins*, *multiplié par*, etc. A la vérité, ces mots sont en petit nombre dans le problème qui nous a servi d'exemple; mais on comprend que s'il y avait beaucoup de quantités à ajouter, à retrancher, à multiplier, etc., le tableau écrit des diverses relations par lesquelles les quantités sont liées entre elles serait trop étendu pour que l'œil pût en embrasser l'ensemble. Ces difficultés étant bien reconnues, je vais montrer comment on y remédie.

Notation algébrique. Explication de quelques dénominations.

5. Pour faire disparaître l'embarras produit par les périphrases qui servent à désigner les quantités qui entrent dans une question, on représente ces quantités par des lettres. Ordinairement, les *données* sont représentées par les premières lettres de l'alphabet a, b, c,..., et les inconnues le sont par les dernières x, y, z,...

Souvent, pour désigner des grandeurs différentes, mais qui ont entre elles une analogie qu'il importe de ne point oublier, on emploie une même lettre à laquelle on donne un accent ou plusieurs. Par exemple, on écrira a', a'', a''', qu'on énonce ainsi : *a prime*, *a seconde*, *a tierce*. Souvent encore on a recours à l'alphabet grec. Le lecteur donnera sans difficulté à ces premières conventions toute l'extension dont elles sont susceptibles.

Si quelques quantités données sont exprimées en chiffres, et surtout si ces quantités sont des nombres fort simples, il est évident qu'il y aura rarement à gagner, sous le rapport de la brièveté, à les remplacer par des lettres. Mais comme ces nombres s'altèrent par les calculs successifs, il n'est plus possible de reconnaître, à la fin des opérations, de quelle manière ils entrent dans les résultats; et de là il suit qu'en changeant ces nombres dans la question, il faut recommencer tous les calculs qui ont déjà été faits. Quand on veut obvier à cet inconvénient, on le peut encore en mettant des lettres au lieu de ces nombres; et c'est là un des plus grands avantages que procure l'emploi des lettres pour représenter les grandeurs.

6. La seconde difficulté, celle qui naît de la répétition des mots *plus*, *moins*, etc., employées pour désigner les relations des quantités entre elles, se résout naturellement en adoptant des signes particuliers pour indiquer ces diverses relations. Je vais faire connaître les signes en usage.

7. $+$ signifie *plus*, et $-$ signifie *moins*. Ainsi, pour indiquer qu'on ajoute b à a, on écrit $a+b$; et, pour indiquer que b est retranché de a, on écrit $a-b$.

8. On emploie le signe $\times$, ou bien un simple point, pour indiquer une multiplication. En écrivant $a\times b$ ou $a.b$, on fait connaître que la quantité a est multipliée par b. De même, $a\times b\times c$ et $a.b.c$ signifient que a est multiplié par b, et que le produit est multiplié par c.

Lorsque les multiplicateurs successifs sont désignés par de simples lettres, on supprime les signes de multiplication afin de rendre l'écriture plus rapide. Ainsi, abc a la même signification que $a.b.c$ ou $a\times b\times c$.

Quand les facteurs sont des nombres, cette simplification n'est

plus permise : car si on voulait, par exemple, indiquer le produit de 3 par 4, et qu'on écrivît 34, on confondrait ce produit avec le nombre *trente-quatre.*

Lorsqu'on multiplie une quantité littérale par un multiplicateur numérique, on le place au devant de cette quantité : on lui donne alors le nom de *coefficient.* Ainsi $3a$ et $\frac{2}{3}b$ signifient la même chose que $a \times 3$ et $b \times \frac{2}{3}$: 3 et $\frac{2}{3}$ sont des coefficiens.

9. Pour indiquer une division, on écrit le diviseur au-dessous du dividende, et on l'en sépare par un trait horizontal. $\frac{a}{b}$ signifie *a divisé par b.* Quelquefois aussi on écrit $a:b$.

10. On nomme *puissances* d'une quantité les produits qu'on forme en multipliant cette quantité par elle-même une fois ou plusieurs fois. aa est la 2e puissance ou le carré de a; aaa en est la 3e puissance ou le cube; $aaaa$ en est la 4e puissance; ainsi de suite. On indique ces puissances, d'une manière abrégée, en n'écrivant la lettre qu'une seule fois, et en plaçant à sa droite, un peu au-dessus, un nombre qui marque combien de fois elle doit être écrite comme facteur. Ce nombre s'appelle *exposant.* Par exemple, a^4 représentera $aaaa$ ou la 4e puissance de a, et on lira *a exposant quatre*, ou, plus simplement, *a quatre.* Cette notation, imaginée par DESCARTES, a eu la plus heureuse influence sur les progrès de l'algèbre.

Il faut bien prendre garde de confondre le coefficient et l'exposant. Si j'écris $3a$, le nombre 3 est un coefficient; et si j'écris a^3, le nombre 3 est un exposant. Or $3a$ et a^3 expriment des quantités bien différentes : car $3a$ est la même chose que $a+a+a$, et a^3 est la même chose que $a \times a \times a$. On comprendra mieux encore la différence, si on met un nombre particulier à la place de la lettre a. Par exemple, si on met 4, $3a$ représente 3 fois 4 ou 12, tandis que a^3 représente $4 \times 4 \times 4$ ou 64.

11. La quantité qui, étant élevée à une puissance, produit une quantité donnée, est une *racine* de cette dernière. Ce sera une racine 2e, 3e, 4e, etc., selon qu'il faudra en faire la 2e puissance, la 3e, la 4e, etc., pour reproduire la quantité donnée. Ainsi, la racine 4e de 16 est 2, attendu qu'on reproduit le nombre 16 en élevant 2 à la 4e puissance. La racine deuxième prend ordi-

nairement le nom de *racine carrée*, et la racine troisième celui de *racine cubique*.

Le signe $\sqrt{\ }$, qui s'appelle *radical*, indique une racine à extraire. On lui joint un nombre qu'on nomme *exposant* ou *indice*, et qui marque de quelle racine il s'agit. $\sqrt[4]{a}$ indique la racine 4ᵉ de a. Dans la racine carrée, on sous-entend l'indice, et on écrit simplement $\sqrt{a}$.

12. Le signe $=$ est celui de l'égalité. Ainsi, en écrivant $3a+2a=5a$, on indique que si à trois fois a on ajoute le double de a, la somme est égale au quintuple de a. L'ensemble des deux quantités, ainsi séparées par le signe $=$, se nomme une *égalité*. Chacune des deux quantités se nomme *membre*. Celle qui est à gauche est le *premier membre ;* celle qui est à droite est le *second*.

13. Le signe $>$ veut dire *plus grand que ;* et le signe $<$ veut dire *plus petit que*. Ainsi, $a>b$ signifie *a plus grand que b ;* et $a<b$ signifie *a plus petit que b*. Remarquez que l'ouverture du signe est toujours tournée du côté de la plus grande quantité.

14. Les dénominations de *quantité littérale, quantité algébrique*, *expression littérale*, *expression algébrique*, sont employées indifféremment pour désigner un assemblage quelconque de quantités représentées par des lettres, et unies entre elles par les signes des différentes opérations. Telles sont $2a^3$ et $a^3-\sqrt{ab}$.

Chacune des quantités qui sont jointes entre elles par les signes $+$ et $-$ s'appelle *terme*, et assez ordinairement le signe fait partie du terme. Dans l'expression $9a-ab^2+\sqrt{ab}$, il y a trois termes, savoir : $9a$, $-ab^2$, $+\sqrt{ab}$.

On appelle *quantité monôme* ou simplement *monôme*, une expression algébrique qui n'a qu'un seul terme ; et *polynôme*, celle qui en a plusieurs. En particulier, on appelle *binôme*, *trinôme*, *quadrinôme*, *quinôme*, celles qui en ont deux, trois, quatre ou cinq. Quelquefois encore on donne aux monômes le nom de *quantités incomplexes*, et aux polynômes celui de *quantités complexes*.

On appelle *termes semblables* ceux qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposans. Ils peuvent d'ailleurs différer par le signe et par le coefficient. Dans l'expression

$4a^2b - 3ab^2 - 2a^2b$, le premier terme $4a^2b$ est semblable au troisième $-2a^2b$. Toutes les fois qu'un polynôme renferme des termes semblables, il peut recevoir certaine simplification dont on parlera plus loin (29).

En algèbre, on nomme *quantités rationnelles* celles qui ne renferment point de radical. Telles sont 17, $\frac{2}{3}a$, $a + \frac{b}{c}$.

On appelle *quantités entières* celles qui sont rationnelles et ne contiennent aucun dénominateur. Telles sont 47, $2a^2b$, $3a^2 - bc$.

15. Lorsqu'une quantité est composée avec une autre, on dit qu'elle est une *fonction* de cette dernière. Par exemple, l'expression $3x^2 - \sqrt{x}$ est une fonction de x.

Pour désigner d'une manière générale une fonction de x, on écrit $F(x)$, et alors la lettre F est employée comme une abréviation du mot *Fonction*. Lorsqu'on veut représenter plusieurs fonctions différentes de x, on varie la forme de cette initiale. Par exemple, on écrira $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, quelle que soit d'ailleurs la loi d'après laquelle chaque fonction est composée.

Quand on se sert de la même lettre F, et qu'on écrit $F(x)$, $F(y)$, on désigne par là deux fonctions composées semblablement, l'une avec x, et l'autre avec y, de telle sorte que la première se change en la seconde quand on y met y au lieu de x.

Ce qui vient d'être dit s'étend naturellement aux expressions dans lesquelles il entre plus d'une quantité. Ainsi, l'expression $3xy - x + \sqrt{y}$ sera une fonction de x et y; et en écrivant $F(x, y)$ on désignera d'une manière générale une fonction quelconque de x et y.

Application de la notation algébrique,

16. Afin de faire ressortir les avantages qui peuvent résulter de la notation algébrique, je vais l'appliquer à la solution du problème énoncé n° 3.

Je désignerai par a le nombre à partager; par b l'excès de la moyenne partie sur la plus petite; et par c l'excès de la plus grande sur la moyenne.

De plus, je représenterai la petite partie par.. x,
Alors la moyenne sera........................ $x+b$,
La plus grande sera........................ $x+b+c$,
Et la somme des trois parties sera.......... $3x+2b+c$.

Or cette somme doit être égale au nombre à partager a; donc on a l'égalité

$$3x+2b+c=a.$$

Si on retranche $2b$ et c de chaque membre, il vient

$$3x=a-2b-c;$$

et si on divise par 3, on obtient, pour l'inconnue x,

$$x=\frac{a-2b-c}{3}.$$

La plus petite partie étant une fois connue, les deux autres s'en déduisent facilement.

17. La manière dont l'inconnue x est exprimée mérite de fixer l'attention : ce n'est point une valeur numérique, c'est une *formule*, un tableau qui montre de la manière la plus claire quelles opérations on doit effectuer sur les données pour avoir l'inconnue. En effet, on peut remplacer les lettres et les signes par des énonciations conformes aux conventions établies; et alors la formule, ainsi traduite en langage ordinaire, se change en cette règle :

Du nombre à partager retranchez le double de l'excès de la moyenne partie sur la plus petite, et encore l'excès de la plus grande sur la moyenne, puis divisez le reste par 3 *: le quotient sera la plus petite partie.*

Dès qu'on prendra pour les données des nombres particuliers, les opérations pourront s'effectuer : c'est ce qui s'appelle *mettre une formule en nombres*. Par exemple, en adoptant les nombres tels qu'ils sont dans l'énoncé du n° 2, on devra remplacer a par 52, b par 9, c par 13; et alors on aura

$$x=\frac{52-9\times 2-13}{3}=\frac{52-18-13}{3}=\frac{21}{3}=7.$$

18. Les formules qu'il faut mettre en nombres ne sont pas tou-

$= a \times b^2 \times 9 = 8 \times 2^2 \times 9 = 8 \times 4 \times 9 = 288,$
$= \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$

nséquent on aura, pour l'inconnue x,

$$x = \frac{384 - 4}{288 + 4} = \frac{380}{292} = 1\tfrac{88}{292} = 1\tfrac{22}{73}.$$

commençans doivent s'exercer à traduire les formules al-
ies en langage ordinaire et à les mettre en nombres.

Des quantités négatives.

L'algèbre admet dans ses calculs une classe de quantités
ue $-5, -7$, etc., qu'on nomme *quantités négatives*, et
nporte de connaître dès à présent. La question suivante,
e fort simple, m'aidera à me faire mieux comprendre.
*narchand a fait un certain bénéfice dans la première an-
son commerce, et une perte l'année suivante : on demande
gement qui en résulte dans son capital.*
ésignera par a le bénéfice de la première année, et par b
essuyée dans la seconde. Si a surpasse b, il est clair que
al du marchand aura reçu une augmentation exprimée
$-b$.

conservent toujours l'expression $a - b$ pour indiquer le changement du capital; mais, ne pouvant plus retrancher b de a, ils font la soustraction dans un ordre contraire, c'est-à-dire qu'ils retranchent a de b, et ils placent le signe — devant le reste. Par ce signe ils avertissent que le résultat ne doit plus être regardé comme une augmentation apportée au capital, mais bien comme une diminution. Par exemple, si a vaut 7000 francs, et si b vaut 4000 fr., il y a véritablement augmentation de 3000 fr.; mais si, au contraire, a vaut 4000 francs, et si b vaut 7000 fr., au lieu de dire que le capital souffre une diminution de 3000 fr., on dira en termes équivalens, quoique fort éloignés du langage ordinaire, que l'augmentation est de —3000 fr.

Les exemples sont nombreux dans lesquels il y a lieu de considérer ainsi les grandeurs sous deux acceptions tout-à-fait contraires, dont l'une les présente comme devant être ajoutées, tandis que l'autre les présente comme devant être retranchées. Tels sont les gains et les pertes d'un joueur; tels l'avance et le retard d'une montre; telles encore les distances qu'un mobile parcourt sur une ligne, selon qu'il avance vers l'une des extrémités de cette ligne, ou bien vers l'extrémité opposée. C'est pour embrasser d'une manière générale ces deux acceptions contraires, que les algébristes ont employé les *quantités négatives;* et, laissant de côté toute question particulière, c'est de la soustraction qu'ils font naître ces quantités, comme on vient de l'expliquer plus haut.

Ainsi, en résumé, *lorsque dans une soustraction la quantité à retrancher surpasse celle dont on doit la retrancher, on est convenu de soustraire la plus petite de la plus grande, et d'indiquer ce changement d'ordre en plaçant le signe — devant le reste.*

Ce sont les quantités isolées, ainsi précédées du signe —, qu'on nomme *négatives*. Par opposition, celles qui ne sont point affectées de ce signe, sont censées avoir le signe +, et on les nomme *positives*.

20. Reprenons l'expression $a - b$, et supposant que a conserve une grandeur fixe, faisons croître b à partir de zéro. On obtient d'abord des résultats décroissans; et quand b est égal à a, la différence $a - b$ est zéro. Si on continue d'augmenter b, on trouve des quantités négatives; et plus b sera grand, plus ces quantités

négatives, considérées dans leurs valeurs absolues, seront grandes. Par exemple, prenons $a = 3$, et faisons successivement $b = 0, 1, 2, 3$: les valeurs de $a - b$ seront 3, 2, 1, 0. Mais si b continue de croître, et qu'on fasse $b = 4, 5, 6,\ldots$ on aura $-1, -2, -3,\ldots$

Or, parce que ces valeurs négatives viennent à la suite des nombres positifs décroissans 3, 2, 1, 0, on convient de les regarder comme plus petites que zéro ; et, parce que les quantités négatives qui ont une valeur absolue plus considérable viennent après celles qui ont une valeur moindre, on les regarde aussi comme plus petites que ces dernières.

Ainsi, d'après ces conventions, -2 est moindre que zéro, et -5 est moindre que -2. En se servant des signes $<$ et $>$ (13), on peut encore écrire

$$-2 < 0, \quad -5 < -2, \quad \text{ou bien} \quad 0 > -2, \quad -2 > -5.$$

CHAPITRE II.

Du calcul algébrique.

Comment on étend aux quantités négatives les opérations de l'arithmétique.

21. Les quantités algébriques peuvent, comme les nombres, être soumises à diverses opérations, telles que l'addition, la soustraction, etc. Mais, pour les quantités littérales, ces opérations, ainsi que le fait observer M. Lacroix, diffèrent de celles qui se pratiquent sur les nombres en ce que leurs résultats, ne pouvant être que des indications de calculs à effectuer, ne présentent réellement qu'une transformation des opérations, primitivement indiquées, en d'autres qui doivent produire les mêmes résultats. Les règles qu'il faut suivre pour effectuer ces transformations constituent le calcul algébrique.

22. Tant qu'on ne considère que des grandeurs positives, les définitions de l'arithmétique font connaître avec précision l'objet de chaque opération; mais elles deviennent insuffisantes quand on les applique aux quantités négatives. Par exemple, quelle signification ces définitions peuvent-elles donner à des énonciations telles que celles-ci : ajouter -5 et -7, multiplier $+5$ par -7, etc.? et n'est-il pas clair que de pareilles locutions doivent être rejetées comme étant tout-à-fait vides de sens, à moins qu'on ne fixe par quelques conventions nouvelles celui qu'on veut y attacher : or, c'est ce que je vais faire. A cet effet, je reprendrai chacune des quatre opérations; j'étendrai, autant qu'il sera possible, la définition de chacune d'elles aux cas nouveaux qui se présenteront; et quand cela ne se pourra point, j'établirai les conventions nouvelles auxquelles ces cas donnent lieu.

23. ADDITION. Cette opération, telle qu'on la conçoit en arithmétique, a pour objet de trouver une quantité qui contienne à elle seule toutes les unités et parties d'unité qui sont dans plusieurs quantités données. Cette définition ne peut s'appliquer qu'aux quantités positives; par conséquent de nouvelles conventions sont nécessaires pour faire connaître ce que doit être l'addition de deux quantités comme $+3$ et -5, ou comme -3 et $+5$, ou encore comme -3 et -5. Or, on peut comprendre tous ces cas, aussi bien que celui où les deux quantités seraient positives, dans les deux conventions ou règles suivantes :

1° *Pour ajouter deux quantités de même signe, on fait la somme de ces quantités sans faire attention au signe, et on place ce signe devant la somme.*

2° *Pour ajouter deux quantités de signes contraires, on retranche la plus petite de la plus grande, sans égard pour les signes, puis on donne au reste le signe de la plus grande.*

D'après ces conventions, on aura sur-le-champ

$$(+3)+(+5)=+8,\quad (-3)+(-5)=-8,$$
$$(+3)+(-5)=-2,\quad (-3)+(+5)=+2.$$

On a employé les parenthèses afin de mieux faire ressortir les signes qui appartiennent aux nombres et ceux qui servent à indiquer l'addition.

st bon de remarquer que, d'après les conventions mêmes, it changer l'ordre des deux quantités qu'on ajoute, sans que ıltat change.

voit qu'en algèbre l'addition n'entraîne pas toujours avec lée d'augmentation. Cependant la dénomination de *somme* jours employée pour désigner le résultat. Quelquefois on y e mot *algébrique*, par opposition à la *somme arithmétique*, ıquelle on ne considère que les grandeurs absolues des quan· ans aucun égard pour les signes dont elles sont affectées.

Soustraction. En arithmétique, cette opération peut être érée comme ayant pour but de trouver une quantité telle lui ajoutant une quantité donnée on reproduise une autre té donnée. Cette définition est évidemment applicable à tous qui peuvent se présenter. Ils sont au nombre de quatre, et les parcourir successivement.

i les deux quantités sont positives, et qu'on ait à soustraire petite de la plus grande, ce sera le cas ordinaire de l'arith- ıe, et le reste devra être considéré comme ayant le signe +.
a à soustraire la plus grande quantité de la plus petite, cas qui donne naissance aux quantités négatives (19); et ın ôtera encore la plus petite de la plus grande, mais on ra le signe — au reste. Ainsi on a

$$(+7)-(+3)=+4 \quad \text{et} \quad (+3)-(+7)=-4.$$

upposons que d'une quantité positive on ait à soustraire une ıté négative : par exemple, de +3 à retrancher —7.
aut que le résultat soit tel qu'en lui ajoutant —7 on re- +3. De là il suit que le résultat doit être positif; car s'il égatif, en lui ajoutant —7, on aurait un nombre négatif. De comme pour ajouter deux quantités de signes contraires il :trancher la plus petite de la plus grande et donner au reste ıc de la plus grande (23), on voit que le résultat doit être rand que 7, et précisement égal à 3+7 ou 10. Donc

$$(+3)-(-7)=+10.$$

Supposons que d'une quantité négative on doive retrancher

une quantité positive : par exemple, que de -3 on ait à soustraire $+7$.

Le résultat doit être tel qu'en lui ajoutant $+7$ on retrouve -3. Or la somme de deux quantités positives serait positive; donc le résultat doit être négatif. En outre, il est facile de voir que, si on fait abstraction du signe de ce résultat, et qu'on en retranche 7, le reste doit être égal à 3 : donc, ce résultat, en grandeur absolue, est égal à $3+7$ ou 10. En lui donnant le signe $-$, on aura le résultat cherché -10. Donc,

$$(-3)-(+7)=-10.$$

4° Enfin, considérons le cas où les deux quantités sont négatives.

Par exemple, si de -3 il faut retrancher -7, on observera qu'en ajoutant -7 au résultat cherché on doit reproduire -3; et comme 7 surpasse 3, il est clair que ce résultat doit être un nombre positif égal à l'excès de 7 sur 3 : donc,

$$(-3)-(-7)=+4.$$

Si, au contraire, il fallait de -7 soustraire -3, on verrait que le résultat doit être négatif, et que sa grandeur absolue est égale à l'excès de 7 sur 3 : c'est-à-dire qu'on a

$$(-7)-(-3)=-4.$$

Il est à remarquer que dans chacun des quatre cas qu'on vient de parcourir le résultat est toujours le même que si l'on eût ajouté le second nombre, après avoir changé son signe, avec le premier. Bien entendu que dans cette addition on se conforme aux conventions du n° 23. Ainsi, on a cette règle simple et facile à retenir :

La soustraction revient à une addition dans laquelle on ajoute la quantité à soustraire, prise avec un signe contraire, avec l'autre quantité.

Par cette règle, on aurait

$$(-17)-(-29)=(-17)+(+29)=+12.$$
$$(+14)-(-12)=(+14)+(+12)=+26.$$

25. **Multiplication.** Soient a et b deux nombres quelconques, il y a quatre cas à considérer, savoir :

$$+a \times +b, \quad -a \times +b, \quad +a \times -b, \quad -a \times -b.$$

Le premier cas est celui de l'arithmétique, car $+a$ et $+b$ sont la même chose que a et b ; et comme le produit de a par b se représente par ab, et que ab est la même chose que $+ab$, on peut écrire, en mettant les signes en évidence, $+a \times +b = +ab$.

La définition ordinaire de la multiplication peut s'appliquer au second cas; mais pour le moutrer clairement il faut examiner l'une après l'autre les hypothèses de b entier et de b fractionnaire. Si ce multiplicateur est un entier, 3 par exemple, en répétant, suivant les règles de l'addition (23), le multiplicande $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités dans 3, on aura $-a-a-a$ ou $-3a$: c'est-à-dire que, pour multiplier une quantité négative par un nombre entier positif, on fait le produit sans égard aux signes, et qu'on lui donne le signe $-$. De là on conclut qu'on peut diviser une quantité négative par un nombre entier positif, en cherchant le quotient, sans égard aux signes, et en lui donnant le signe $-$.

Supposons que, dans le produit $-a \times +b$, le multiplicateur soit un nombre fractionnaire tel que $\frac{7}{5}$. D'après l'idée attachée à la multiplication, il faut prendre les $\frac{7}{5}$ du multiplicande ; ou, en d'autres termes, il faut diviser ce multiplicande par 5, et multiplier le résultat par 7. Or, on vient de démontrer que ces opérations doivent s'exécuter sans avoir égard au signe $-$, et qu'on doit donner ce signe au résultat; donc $-a \times +\frac{7}{5} = -\frac{7}{5}a$. Donc, quel que soit b, on a toujours $-a \times +b = -ab$.

Dans les deux autres cas, $+a \times -b$ et $-a \times -b$, le multiplicateur est négatif. Or, la définition de la multiplication, en prescrivant de composer le produit avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité, ne montre point comment on doit avoir égard au signe $-$ qui est devant le multiplicateur ; et sous ce rapport elle est insuffisante. Pour corriger ce défaut, on observera que dans les cas où le multiplicateur est positif, le signe du multiplicande se conserve dans le produit ; et par là on est conduit naturellement à ajouter comme complément à la définition cette convention nouvelle que, *dans les cas où le multi-*

plicateur est négatif, il faut faire la multiplication comme s'il était positif, et changer ensuite le signe du produit. De là on conclut immédiatement qu'on doit avoir $+a \times -b = -ab$ et $-a \times -b = +ab$.

Les différens cas qu'on vient d'examiner peuvent se résumer dans cette règle :

Pour multiplier deux quantités, quels que soient leurs signes on fait le produit de ces quantités, sans avoir d'abord égard aux signes; puis on affecte le produit du signe + quand les deux facteurs ont le même signe, et du signe — quand ils ont des signes contraires.

L'usage permet encore d'énoncer la règle des signes par ces locutions abrégées :

+ *par* + *donne* +, — *par* + *donne* —,
+ *par* — *donne* —, — *par* — *donne* +.

Remarquez que, si on change le signe d'un facteur, le produit doit changer de signe, et que si on change les signes des deux facteurs, le produit reste le même. Remarquez aussi que le produit ne change point quand on intervertit l'ordre des deux facteurs.

26. Division. La définition ordinaire convient parfaitement à l'algèbre. Son objet sera toujours de découvrir l'un des facteurs d'un produit donné quand on connaît l'autre facteur; et par conséquent il faudra toujours qu'en multipliant le quotient et le diviseur l'un par l'autre, on reproduise le dividende.

D'abord, il est évident qu'en faisant la division, sans aucune attention aux signes, on trouvera le quotient, abstraction faite du signe qu'il doit avoir. Il reste donc à déterminer quel doit être ce signe.

Lorsque *le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient doit avoir le signe* + : car s'il avait le signe — le produit du diviseur par le quotient serait de signe contraire au diviseur, et par conséquent aussi de signe contraire au dividende.

Mais *quand le dividende et le diviseur ont des signes opposés, le quotient aura le signe* — : car s'il avait le signe +, le produit du diviseur par le quotient serait de même signe que le diviseur; donc on ne reproduirait pas le signe du dividende.

De là on conclut que si a et b sont deux grandeurs absolues, lont le quotient soit désigné par c, on devra avoir

$$\frac{+a}{+b}=+c,\ \frac{-a}{-b}=+c,\ \frac{+a}{-b}=-c,\ \frac{-a}{+b}=-c.$$

Addition et soustraction des monômes.

27. Désignons par a et b deux grandeurs positives. L'addition, u égard aux signes dont ces quantités peuvent être affectées, eut donner les quatre expressions :

[1] $(+a)+(+b)$, $(+a)+(-b)$, $(-a)+(+b)$, $(-a)+(-b)$.

'ant que les lettres a et b ne recevront point de valeurs partiulières, il sera impossible de réduire ces expressions à un seul erme; mais au moins peut-on les simplifier en les débarrassant les parenthèses et de plusieurs signes inutiles.

D'abord les parenthèses ne servent qu'à mieux représenter aux reux le signe qui est propre à chacune des quantités qu'on ajoute : insi elles ne sont pas strictement nécessaires, et on peut les suprimer. De plus, comme a et b signifient la même chose que $+a$ et $+b$, on pourra ôter le signe $+$ placé dans les parenthèes. Par là les quatre expressions deviennent

$$a+b,\quad a+-b,\quad -a+b,\quad -a+-b.$$

Mais il y a encore ici des doubles signes qu'on peut éviter. En effet, d'après la règle de la soustraction (24), l'addition de $-b$ avec une quantité quelconque revient à soustraire b de cette quantité; par conséquent, au lieu de $+-b$, on peut mettre $-b$, et alors les expressions [1] prendront les formes suivantes, qui sont les plus simples qu'on puisse leur donner,

$$a+b\ ,\quad a-b\ ,\quad -a+b\ ,\quad -a-b.$$

Donc, en règle générale, on peut dire que *l'addition de deux monômes se réduit à les placer l'un à la suite de l'autre sans changer leurs signes.*

Par une suite nécessaire, attendu que la soustraction est une

addition dans laquelle la quantité à soustraire est prise avec un signe contraire (24), on conclut que, *dans la soustraction, la quantité à retrancher se place, avec un signe contraire, à la suite de la quantité dont elle doit être retranchée.*

28. Les deux règles qui précèdent s'appliquent immédiatement à l'addition et à la soustraction de tant de monômes qu'on voudra, quels que soient leurs signes. Par exemple, si de $-2a^3$ on veut retrancher $-3a^2b$, et qu'au reste on doive ajouter $5ab^2$ et $-b^3$, on écrira ces quantités les unes à la suite des autres, en ayant soin de conserver les signes des quantités qui sont à ajouter, et de changer les signes de celles qui sont à soustraire. De cette manière, on a pour résultat le polynôme

$$-2a^3+3a^2b+5ab^2-b^3.$$

29. Il peut se faire que parmi les monômes il y en ait qui soient semblables (14). Dans ce cas, le polynôme résultant aura lui-même des termes semblables, et je vais montrer qu'on pourra toujours les remplacer par un seul terme : c'est ce qu'on nomme la *réduction*.

Point de difficulté quand tous les termes sont de même signe. Ainsi on a évidemment

$$2a^2+4a^2+3a^2=9a^2, \text{ et } -2a^2-4a^2-3a^2=-9a^2.$$

Dans chaque exemple ce sont des quantités de même signe qu'on ajoute; par conséquent la première règle du n° 23 donne immédiatement ces réductions.

Pour arriver à la règle qu'il faut suivre quand les termes semblables sont disséminés dans un polynôme, je m'appuierai sur une remarque qui est d'un usage presque continuel : c'est que la valeur d'un polynôme demeure la même, quel que soit l'ordre dans lequel ses termes soient rangés, pourvu que chacun d'eux reste toujours précédé du même signe.

En effet, un polynôme quelconque étant donné, imaginons qu'on ait écrit, comme formant deux sommes séparées, d'un part les termes positifs, et de l'autre les termes négatifs. Si o suit avec attention le détail des additions et des soustractions i diquées dans le polynôme donné, on comprendra sans peine q

ces opérations successives reviennent tantôt à retrancher, sur une partie de la première somme, une partie de la seconde, tantôt à retrancher, sur une partie de la seconde, une partie de la première. Par là il devient clair que le résultat définitif doit être égal à l'excès de la plus grande somme sur la pluspetite et avoir le signe de la plus grande; et comme les deux sommes demeurent les mêmes dans quelque ordre que les termes du polynôme soient placés, on conclut que l'ordre de ces termes peut être interverti à volonté, sans que la valeur du polynôme soit altérée.

Cela posé, supposons que le polynôme donné ait des termes semblables. Par exemple, qu'il soit

$$-8b^3+7a^3+3b^3-9a^2b-5b^3+ab^2+4b^3.$$

On pourra changer de place les quatre termes semblables $-8b^3$, $+3b^3$, $-5b^3$, $+4b^3$, et les rapprocher les uns des autres comme il suit :

$$3b^3+4b^3-8b^3-5b^3+7a^3-9a^2b+ab^2.$$

Alors remarquez que les termes positifs $3b^3+4b^3$ peuvent être remplacés par un seul $+7b^3$; qu'ensuite les termes négatifs $-8b^3-5b^3$ peuvent aussi être remplacés par un seul $-13b^3$. Les quatre termes semblables seront déjà réduits à deux $+7b^3-13b^3$. Mais ces deux-ci se réduisent eux-mêmes à un seul $-6b^3$; par conséquent, en reportant $-6b^3$ à la dernière place, le polynôme simplifié sera

$$7a^3-9a^2b+ab^2-6b^3.$$

En général, *plusieurs termes semblables pourront toujours se réduire à un seul; son coefficient sera la différence entre la somme des coefficiens précédés du signe + et la somme des coefficiens précédés du signe —; et son signe sera le même que celui des coefficiens dont la somme est la plus grande.*

Dans l'application de cette règle, il ne faut pas oublier que le premier terme, quand il n'a pas de signe, est censé avoir le signe +, et que les termes devant lesquels on n'écrit pas de coefficient sont censés avoir le coefficient 1.

30. *Remarque.* Quoique l'ordre des termes soit indifférent, on

les dispose presque toujours de manière que les exposans d'un même lettre aillent en croissant, ou bien en décroissant : cela s'appelle *ordonner*. Le dernier polynôme est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a; et il l'est aussi par rapport aux puissances croissantes de b.

Addition et soustraction des polynômes.

31. Si à $a-b$ on doit ajouter $c+d-e$, pour indiquer cette addition, on enveloppe la seconde quantité entre des parenthèses et on écrit

$$a-b+(c+d-e).$$

Mais je vais montrer que les parenthèses peuvent se supprimer.

Concevons pour un moment qu'on ait effectué les opérations indiquées dans le second polynôme $c+d-e$, et que le résultat soit une quantité positive $+P$. En ajoutant $+P$ avec $a-b$, il vient $a-b+P$. On peut changer la place des termes et écrire $+P+a-b$. Mais ici l'addition de a et la soustraction de b ne doivent venir qu'après les opérations qui donnent $+P$; par conséquent on peut remettre, au lieu de $+P$, le polynôme $c+d-e$, et alors on a $c+d-e+a-b$. Enfin on transportera aux dernières places les termes qui viennent de $+P$, et on aura

$$a-b+c+d-e.$$

Si le second polynôme était égal à une quantité négative $-P$, le même raisonnement se ferait encore en mettant partout $-P$ au lieu de $+P$, et on arriverait encore au même résultat. Dans ce résultat, les termes des deux polynômes se trouvent écrits, avec leurs signes, les uns à la suite des autres; et il est évident que la même chose doit arriver, quels que soient les polynômes qu'on ajoute. De là on conclut cette règle :

Pour ajouter des polynômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant les signes de tous leurs termes.

Après avoir appliqué cette règle, il ne faut pas négliger de faire la réduction des termes semblables, s'il y en a. Pour faciliter cette réduction, on ordonne assez ordinairement les polynômes

rapport à une lettre, et on les écrit les uns sous les autres : alors on fait immédiatement la réduction. Voici un exemple :

$$\begin{array}{l|l} \text{Polynômes à ajouter} & \left\{\begin{array}{r} 8a^2 - \frac{3}{2}ab - 2b^2 - \frac{3}{4} \\ -a^2 + \frac{1}{4}ab + 7c^2 + 2 \\ ab + 2b^2 + 4c^2 + \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \hline \text{Somme...} & 7a^2 - \frac{1}{4}ab + 11c^2 + \frac{7}{4}. \end{array}$$

32. Passons à la soustraction. Pour indiquer qu'on doit soustraire $c+d-c$ de $a-b$, on écrit

$$a - b - (c + d - e);$$

et, pour arriver à une expression débarrassée des parenthèses, on raisonnera comme il suit.

D'après ce qui a été dit n° 24, la soustraction revient à une addition dans laquelle la quantité à soustraire est prise avec un signe contraire. Or, la valeur d'un polynôme est égale à la différence qui existe entre la somme de ses termes positifs et celle de ses termes négatifs; et le signe de cette valeur est celui de la plus grande des deux sommes : donc cette valeur ne fera que changer de signe, si on change dans le polynôme tous les $+$ en $-$, et tous les $-$ en $+$. Il suit de là que, pour soustraire un polynôme d'une quantité quelconque, il suffit de changer les signes de tous ses termes, et de l'ajouter ensuite à cette quantité. Mais, dans l'addition, les polynômes qu'on ajoute se placent à la suite les uns des autres, en conservant les signes de leurs termes; donc,

Pour soustraire un polynôme, il suffit de l'écrire, après avoir changé les signes de tous ses termes, à la suite de la quantité dont il doit être soustrait.

On peut encore démontrer cette règle en prouvant que, si on ajoute au résultat le polynôme qui était à soustraire, on reproduit la quantité dont il devait être soustrait. En effet, pour faire cette addition, on écrira à la suite du résultat les termes de ce polynôme avec leurs signes; mais ces termes se trouvant tous, dans le résultat, avec des signes contraires, il est clair qu'ils seront détruits, et qu'après la réduction il ne restera plus que ceux qui composent la quantité sur laquelle la soustraction devait être faite.

Voici un exemple de soustraction :

Soustraire de...	$9a^2 - 3ab + 2b^2 + \frac{1}{2}bc$
le polynôme....	$5a^2 + 4ab - 3b^2 - \frac{1}{4}bc$
Reste avant la réduction,	$9a^2 - 3ab + 2b^2 + \frac{1}{2}bc$ $-5a^2 - 4ab + 3b^2 + \frac{1}{4}bc,$
Après la réduction,	$4a^2 - 7ab + 5b^2 + \frac{3}{4}bc.$

Multiplication des monômes.

33. Pour indiquer des multiplications successives, on est convenu (8) d'écrire les facteurs à la suite les uns des autres, en les séparant par le signe $\times$, ou seulement par des points, ou même sans aucun signe, quand il n'en résulte point d'ambiguité. Par exemple, si on doit multiplier a^2b par c, et le produit par d^2, on écrira $a^2b \times c \times d^2$, ou $a^2b.c.d^2$, ou simplement a^2bcd^2.

S'il fallait multiplier a^2 par un nombre déterminé, tel que 3 ou $\frac{5}{7}$, ce nombre deviendrait le coefficient de a^2, et on écrirait $3a^2$ ou $\frac{5}{7}a^2$.

Si on avait à indiquer la multiplication de a^2b par cd^2, on pourrait écrire indifféremment $a^2b \times cd^2$, ou $a^2b.cd^2$. Mais on ne devrait pas supprimer le signe; car alors on aurait l'expression a^2bcd^2, dans laquelle on doit voir que a^2b est multiplié par c, et que le produit a^2bc est lui-même multiplié par d^2 : or, ce n'est point là ce qu'on voulait indiquer. A la vérité, les deux expressions $a^2b \times cd^2$ et a^2bcd^2 sont équivalentes, mais il faut le prouver; et c'est ce qu'on fait en rappelant que, d'après un principe démontré en arithmétique, on peut multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs, en multipliant cette quantité successivement par chacun des facteurs (*).

34. Les règles des signes ayant été établies (n° 25), on laissera ici les signes de côté. Soient d'abord deux quantités telles que a^2 et a^3. D'après la définition de l'exposant, a^2 et a^3 sont la même chose que aa et aaa; donc $a^2 \times a^3 = aa \times aaa$. Or, par le

(*) Soit m une quantité qu'on doit multiplier par le produit abc. Puisque le produit ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs, on aura $m \times abc = abcm = mabc$: c'est le principe dont il s'agit.

pe rappelé plus haut, on a $aa \times aaa = aaaaa$; donc

$$a^2 \times a^3 = a^5.$$

n prenait d'autres exposans, il est clair qu'il faudrait en-
:s ajouter pour avoir l'exposant du produit. Donc, en géné-
'and on multiplie des puissances d'une meme quantité, on
'onner à cette quantité un exposant egal à la somme de
'es facteurs.

lettre sans exposant doit être regardée comme ayant l'ex-
1 : car, par exemple, on aurait $a^3 \times a = a^4$.

A présent, considérons des monômes quelconques. Soit à
:r le produit

$$3a^2b^4c \times 7a^3cd^2.$$

ux monômes peuvent être écrits ainsi, $3\times a^2\times b^4\times c$ et
$\times c\times d^2$; et, par le principe déjà cité, le produit est égal à

$$3\times a^2\times b^4\times c\times 7\times a^3\times c\times d^2.$$

ngeant l'ordre des facteurs, il devient

$$3\times 7\times a^2\times a^3\times b^4\times c\times c\times d^2.$$

lieu de 3×7 on peut mettre 21; au lieu des deux facteurs
:s a^2 et a^3, on peut mettre leur produit qui, d'après la
uvée plus haut, est a^5; au lieu des deux facteurs égaux à
:ttra leur produit c^2; et quant aux facteurs b^4 et d^2, on les
u produit sans aucune altération. Alors on aura

$$3a^2b^4c\times 7a^3cd^2 = 21a^5b^4c^2d^2.$$

:ut faire des raisonnemens analogues sur tels monômes
udra; donc, abstraction faite du signe, *le produit de*
nômes s'obtiendra en multipliant les coefficiens entre
donnant à chaque lettre commune aux deux monômes
:ant égal à la somme de ceux dont elle est affectée dans
ìmes, et en prenant les autres lettres sans changer leurs
r.

mbinant cette règle avec celle des signes qui a été établie
, on trouve sur-le-champ

$$-7a^4bd^2 \times 13a^3b^2c = -91a^7b^3cd^2,$$
$$-\tfrac{2}{3}ab^4c \times -\tfrac{5}{7}a^2c = +\tfrac{10}{21}a^3b^4c^2.$$

Multiplication des polynômes.

36. Si l'on a des polynômes tels que a^2-ab+2 et $2a-b$, et qu'on veuille indiquer leur produit, on devra employer des parenthèses ou des crochets, et écrire

$$(a^2-ab+2)(2a-b), \quad \text{ou} \quad [a^2-ab+2][2a-b].$$

Quelquefois aussi, mais rarement, on emploie des barres, comme ci-dessous :

$$\overline{a^2-ab+2} \times \overline{2a-b}.$$

37. Pour effectuer de pareilles multiplications, je raisonnerai d'abord comme si les soustractions qui sont indiquées dans les polynômes ne devaient jamais amener de quantités négatives; et je prouverai ensuite que la règle, à laquelle on arrive, dans cette hypothèse, s'étend à tous les cas.

Supposons, en premier lieu, qu'un seul facteur soit complexe, comme dans l'expression

$$(a+b-c) \times m.$$

Si on avait simplement à multiplier a par m, le produit serait am. Quand c'est $a+b$ qu'on doit multiplier par m, il est évident qu'on aura le produit en prenant séparément m fois la quantité a, m fois la quantité b, et en ajoutant les deux produits : or ces produits partiels sont exprimés par am et bm; donc $(a+b)\times m = am+bm$. Mais quand c'est $a+b-c$ qui est le multiplicande, la quantité $a+b$ étant diminuée de c, il s'ensuit qu'en multipliant $a+b$ par m, on doit avoir un produit trop grand de m fois c; donc de ce produit, qui est $am+bm$, il faut retrancher celui de c par m, qui est cm; donc enfin

$$(a+b-c)\times m = am+bm-cm.$$

En quelque nombre que soient les termes du polynôme, on voit que dans le produit chacun d'eux se trouvera multiplié par m, et conservera le signe qu'il avait dans le polynôme.

Supposons le multiplicande et le multiplicateur tous deux complexes. Par exemple, soit

$$(a+b-c)\times(m-n+p).$$

Imaginons qu'on ait effectué les opérations indiquées dans le polynôme $a+b-c$, et qu'il ait pour valeur T. Le produit à effectuer deviendra $T\times(m-n+p)$. Alors l'un des facteurs étant monôme, on aura, par ce qui vient d'être dit,

$$\begin{aligned}(a+b-c)\times(m-n+p) &= T\times(m-n+p)\\ &= Tm-Tn+Tp.\end{aligned}$$

Puisque T représente la valeur du polynôme $a+b-c$, Tm est égal au produit de $a+b-c$ par m; et, d'après ce qui précède, ce produit est $am+bm-cm$.

De même Tn est égal au produit de $a+b-c$ par n, lequel est $an+bn-cn$.

Et pareillement, Tp est égal au produit de $a+b-c$ par p, ou à $ap+bp-cp$.

Or, de Tm on doit retrancher Tn, et ensuite on doit ajouter Tp; donc il faudra, à la suite des termes du premier produit, écrire tous ceux du second avec des signes contraires (32), et tous ceux du troisième avec leurs signes (31). En conséquence, on aura

$$\begin{aligned}(a+b-c)\times(m-n+p) = &+am+bm-cm\\ &-an-bn+cn\\ &+ap+bp-cp.\end{aligned}$$

De là on tire cette règle : *Pour effectuer la multiplication des polynômes, on multiplie successivement tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en ayant soin de conserver tous les signes du multiplicande quand le terme du multiplicateur a le signe +, et de les changer tous quand ce terme a le signe —.*

Si, dans les deux polynômes, on regarde tous les termes, pris avec leurs signes, comme des monômes isolés, si alors on multiplie successivement les premiers par chacun des seconds, et si ensuite on ajoute tous les produits, il est évident qu'on aura le même résultat que par la règle précédente.

38. Maintenant il faut démontrer que cette règle convient à tous les cas; mais auparavant je ferai deux remarques.

La première, c'est que, de quelque manière qu'on intervertisse l'ordre des termes dans deux polynômes, le résultat qu'on trouve en leur appliquant cette règle ne changera pas de valeur. En effet, d'après cette règle même, il est évident qu'il contiendra toujours les mêmes termes : seulement ils y seront dans un ordre différent, ce qui n'altère en rien sa valeur.

La seconde remarque, c'est qu'en changeant tous les signes de l'un des polynômes, les termes du résultat changeront de signes, et par suite la valeur représentée par ce résultat en changera également. A quoi j'ajouterai, comme conséquence immédiate, que si on changeait aussi les signes de l'autre polynôme, les termes du résultat ne seraient point altérés : car, après le premier changement, ils devraient en subir un second qui rétablirait le résultat tel qu'il était d'abord.

Cela posé, je nommerai V l'ensemble des termes qu'on obtient en appliquant la règle à deux polynômes quelconques, et je vais prouver que le produit de ces polynômes est toujours égal à V. D'abord supposons que ces polynômes aient des valeurs positives, mais qu'en effectuant les additions et les soustractions qui y sont indiquées on doive passer par des quantités négatives avant d'arriver à la dernière opération. Comme on peut changer l'ordre des termes d'un polynôme sans changer sa valeur, j'écrirai dans chaque facteur tous les termes positifs aux premiers rangs, et à leur suite tous les termes négatifs : alors la difficulté dont il s'agit disparaîtra, et la règle fera trouver le produit cherché. Or, d'après notre première remarque, ce produit est égal à V.

Quand l'un des deux polynômes a une valeur négative, c'est que la somme de ses termes négatifs l'emporte sur celle de ses termes positifs. En changeant les signes de tous ses termes, la valeur de ce polynôme deviendra positive, sans autre altération : alors on pourra appliquer la règle, et, d'après la seconde remarque, on aura un produit de signe contraire à V. Mais, puisqu'on a pris positivement un facteur qui devait être négatif, ce produit doit être de signe contraire au produit cherché (25); donc V est le produit cherché.

Enfin, quand les deux polynômes ont des valeurs négatives, on changera les signes de tous leurs termes, ce qui donnera deux polynômes dont les valeurs seront positives, et dont on pourra trouver le produit par la règle du n° précédent. D'après la seconde remarque, ce produit aura les mêmes termes que V; mais les valeurs des deux facteurs ayant changé de signe, leur produit n'a pas dû en changer; donc le produit cherché est encore égal à V.

39. Pour plus de facilité, on ordonne les polynômes qu'on doit multiplier. Un exemple montrera comment on dispose l'opération.

Multiplicande	$3a^3 - 5a^2b - \frac{1}{2}ab^2$
Multiplicateur	$-2a^2 - 3ab + b^2.$
Produits partiels	$-6a^5 + 10a^4b + a^3b^2$
	$- 9a^4b + 15a^3b^2 + \frac{3}{2}a^2b^3$
	$+ 3a^3b^2 - 5a^2b^3 - \frac{1}{2}ab^4$
Produit...	$-6a^5 + a^4b + 19a^3b^2 - \frac{7}{2}a^2b^3 - \frac{1}{2}ab^4$

La première ligne des produits partiels a été trouvée en multipliant tous les termes du multiplicande par le premier terme $-2a^2$ du multiplicateur. Les signes du multiplicande ont été changés, parce que ce terme a le signe $-$.

La seconde ligne des produits partiels a été trouvée en multipliant les termes du multiplicande par le second terme $-3ab$ du multiplicateur; et on a dû changer encore tous les signes du multiplicande.

La troisième ligne des produits partiels renferme les produits de tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+b^2$ du multiplicateur; et comme ce terme a le signe $+$, on a conservé les signes du multiplicande.

Enfin, en opérant les réductions entre tous ces produits, on remplace $+10a^4b-9a^4b$ par $+a^4b$, $+a^3b^2+15a^3b^2+3a^3b^2$ par $+19a^3b^2$, $+\frac{3}{2}a^2b^3-5a^2b^3$ par $-\frac{7}{2}a^2b^3$. Alors on a le produit cherché, tel qu'il est écrit plus haut.

40. Quand on veut ordonner des polynômes par rapport à une lettre, il peut arriver qu'il y ait plusieurs termes où cette lettre soit affectée du même exposant. Dans ce cas on ordonnera ces termes entre eux par rapport à une autre lettre, comme on le voit dans le polynôme $ax^2-x^2+a^2x-ax-a$. Il contient deux termes

en x^2 qu'on a ordonnés entre eux par rapport à a, et aussi deux termes en x qu'on a ordonnés de la même manière.

Mais le plus souvent on réunit les termes qui contiennent une même puissance de x en un produit dont cette puissance sera un facteur. Ainsi on remarquera que le produit $(a-1)x^2 = ax^2 - x^2$, que $(a^2-a)\,x = a^2x - ax$; et en conséquence le polynôme ci-dessus s'écrira sous cette forme : $(a-1)\,x^2 + (a^2-a)\,x - a$.

Pour offrir l'exemple d'une multiplication dans laquelle on emploie cette seconde manière d'ordonner, je prendrai le suivant:

$$\begin{array}{l}
(a-1)\,x^2 + (a^2-a)\,x - a \\
\underline{(a+1)\,x^2 - a^2x \qquad\qquad\qquad} \\
(a^2-1)\,x^4 + (a^3-a)\,x^3 - (a^2+a)\,x^2 \\
\qquad\qquad - (a^3-a^2)\,x^3 - (a^4-a^3)\,x^2 + a^3x \\
\hline
(a^2-1)\,x^4 + (a^2-a)\,x^3 - (a^4-a^3+a^2+a)\,x^2 + a^3x
\end{array}$$

On considère dans chaque polynôme tous les termes qui contiennent une même puissance de x comme n'en formant qu'un seul, et on suit la règle générale du n° 37. Mais alors, parmi les opérations partielles, il y a des multiplications de polynômes. Ainsi, pour multiplier le multiplicande par $(a+1)x^2$, qui est la première partie du multiplicateur, on aura à multiplier $a-1$, a^2-a et $-a$ par $a+1$. On trouve que ces produits sont a^2-1, a^3-a, $-(a^2+a)$; et ce sont eux qui, dans la première ligne des produits partiels, sont placés devant les puissances x^4, x^3, x^2. On forme de même la seconde ligne. Les commençans doivent surtout avoir grand soin de ne point commettre d'erreur dans les signes.

41. Au moyen de la multiplication, on démontre plusieurs propositions d'un usage très-fréquent. Effectuons les multiplications ci-après :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{+ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2, \end{array}
&
\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2, \end{array}
&
\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{-ab-b^2} \\ a^2-b^2. \end{array}
\end{array}$$

Le premier produit est le carré de $a+b$; et comme les lettres a et b peuvent représenter telles quantités qu'on voudra, on conclut que *le carré de la somme de deux quantités contient le carré*

de la première, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.

Semblablement, la deuxième multiplication prouve que *le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première, moins deux fois le produit des deux quantités, plus le carré de la seconde.*

Enfin, la troisième multiplication démontre que *le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces deux quantités.*

Si on multipliait par $a+b$ le carré de $a+b$, on trouverait comment le cube de la somme de deux quantités se compose avec ces deux quantités. En multipliant le cube par $a+b$, on reconnaîtrait de quelles parties se compose la quatrième puissance, et ainsi de suite.

42. Ces propositions peuvent souvent abréger les calculs. Supposons qu'on ait à effectuer le produit

$$(3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4)(3a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Le premier facteur est la somme des deux quantités

$$3a^3b+2a^2b^2 \text{ et } ab^3-b^4,$$

tandis que le second facteur en est la différence; donc, en vertu de la troisième règle du n° précédent, le produit demandé est égal à la différence des carrés de ces deux quantités. Or, l'un de ces carrés étant celui d'une somme, et l'autre celui d'une différence, on peut les former par les deux premières règles. De cette manière, on trouve sur-le-champ le produit cherché

$$9a^6b^2+12a^5b^3+4a^4b^4-a^2b^6+2ab^7-b^8.$$

Division des monômes.

43. Les règles des signes étant connues (26), je supposerai que les monômes soient positifs, et je proposerai, par exemple, d'effectuer la division indiquée dans l'expression

$$\frac{48a^7b^3c^2}{6a^4b^3},$$

plus haut exposant que tous les autres produits partiels. Donc ce produit partiel doit se retrouver dans le terme *A* sans aucune altération. Ainsi, en prenant le terme du dividende où une lettre a le plus haut exposant, et en le divisant par le terme du diviseur où cette lettre a le plus haut exposant, on sera sûr d'avoir un terme du quotient. On peut même remarquer que ce terme est aussi celui qui, dans le quotient, doit renfermer cette même lettre au plus haut exposant.

Comme le dividende *A* provient de l'addition des termes qu'on obtient en multipliant tous les termes de *B* par chaque terme de *C*, il s'ensuit qu'en multipliant le diviseur par le terme qui vient d'être trouvé au quotient, et en retranchant ce produit du dividende, le reste sera égal au produit du diviseur par les autres termes du quotient qui sont encore inconnus.

Il est évident qu'on peut raisonner sur ce reste, après y avoir fait les réductions qu'amène la soustraction, comme sur le dividende *A*. Par conséquent, on conclura que si on divise le terme qui, dans ce nouveau dividende, contient une lettre au plus haut exposant par le terme qui, au diviseur, contient aussi cette lettre au plus haut exposant, on connaîtra un second terme du quotient.

On fera le produit du diviseur par ce terme, et on le retranchera du dernier dividende. On obtiendra ainsi un second reste, qui lui-même devra être considéré comme un nouveau dividende partiel, et sur lequel on pourra encore répéter les mêmes raisonnemens, ce qui fera connaître un troisième terme du quotient.

En continuant de la même manière, il est clair qu'on doit trouver tous les termes du quotient, et on sera averti qu'il n'y en a plus à connaître, quand on sera parvenu à un reste zéro.

Il est important de remarquer que les raisonnemens précédens subsisteraient encore si, au lieu des termes où une lettre a les plus hauts exposans, on considérait ceux où elle est affectée des moindres exposans. Par conséquent, dans les divisions partielles, on peut se servir de ces derniers aussi bien que des premiers.

On facilitera beaucoup les calculs en ordonnant les polynômes de manière que les exposans d'une même lettre aillent en croissant ou en décroissant. De cette manière, les termes du dividende et du diviseur, qui doivent être divisés l'un par l'autre, se trouve-

ront les premiers sur la gauche; et la même chose arrive encore dans les autres divisions partielles, si on a soin de laisser toujours les restes ou dividendes partiels ordonnés comme le dividende primitif. La disposition des calculs est d'ailleurs la même qu'en arithmétique.

S'il restait quelques nuages dans l'esprit du lecteur, l'exemple suivant achèvera de les dissiper.

	Dividende.	*Diviseur.*
	$14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4$	$2a^2 - 3ab + 2b^2$
	$-14a^5 + 21a^4b - 14a^3b^2$	*Quotient.*
1er reste...	$-6a^4b + 7a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4$	$7a^3 - 3a^2b - ab^2$
	$+6a^4b - 9a^3b^2 + 6a^2b^3$	
2e reste...	$-2a^3b^2 + 3a^2b^3 - 2ab^4$	
	$+2a^3b^2 - 3a^2b^3 + 2ab^4$	
3e reste...	$0 \quad 0 \quad 0$	

Après avoir ordonné les polynômes par rapport aux exposans décroissans de la lettre a, et en supposant que le quotient soit aussi ordonné de la même manière, on est certain que le 1er terme $14a^5$ du dividende est le produit du 1er terme $2a^2$ du diviseur par le 1er terme du quotient; de sorte qu'en divisant $14a^5$ par $2a^2$ on connaîtra le 1er terme du quotient. Ce terme doit être positif, comme résultant de la division de deux termes positifs (26) : il est égal à $7a^3$.

Alors on multiplie le diviseur par $7a^3$, et on soustrait le produit du dividende. A cet effet, on écrit les termes de ce produit, en changeant leurs signes, au-dessous du dividende, puis on fait les réductions. On obtient ainsi le 1er reste.

Dans ce reste, le 1er terme est $-6a^4b$, et en le divisant par $2a^2$ on obtient $-3a^2b$ pour le 2e terme du quotient. On multiplie encore le diviseur par ce terme, on pose encore les produits partiels, en changeant leurs signes, au-dessous du 1er reste, et après la réduction, on a le 2e reste.

Enfin, le 1er terme de ce reste est $-2a^3b^2$, et en le divisant par $2a^2$, on trouve que le 3e terme du quotient est $-ab^2$. On forme le 4e reste de la même manière que les précédens; mais ici ce reste étant zéro, on en conclut que l'opération est terminée, et que le quotient cherché est $7a^3 - 3a^2b - ab^2$.

Continuation. Division dans les cas plus compliqués.

46. Quand on ordonne, par rapport à une lettre, les polynômes qu'on veut diviser, il peut arriver que plusieurs termes contiennent cette lettre au même degré. Alors on doit avoir soin d'ordonner ces termes entre eux par rapport à une autre lettre. Par exemple, s'il s'agit des termes $abx^2 + a^2x^2 - b^2x^2$, qui contiennent tous trois x^2, on les ordonnera par rapport à a, et on les disposera horizontalement, de l'une de ces deux manières,

$$a^2x^2 + abx^2 - b^2x^2, \quad (a^2 + ab - b^2)\,x^2;$$

ou bien verticalement, de l'une de ces deux-ci,

$$\begin{array}{r} a^2x^2 \\ +\,abx^2 \\ -\,b^2x^2, \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} a^2 \\ +\,ab \\ -\,b^2 \end{array}\right| x^2.$$

Quelle que soit celle qu'on adopte, on y reconnaît avec la même facilité que a^2x^2 est le 1er terme, que $+abx^2$ est le 2e, et que $-b^2x^2$ est le 3e.

Alors on pourra suivre tout-à-fait, pour la division, la marche qui a été tracée dans l'article précédent; car il est clair que dans chaque division partielle le 1er terme du dividende devra toujours être le produit du 1er terme du diviseur par le 1er de ceux qui sont à trouver au quotient. On obtiendra ainsi tous les termes du quotient, ordonnés entre eux de la même manière que le dividende et le diviseur.

47. On peut encore se représenter dans la pensée tous les termes de chaque polynôme, qui contiennent une même puissance de la lettre par laquelle on a ordonné d'abord, comme ne formant qu'un seul terme; et alors les divisions partielles pourront être elles-mêmes des divisions complexes qu'il faudra effectuer à part.

Pour nous convaincre de l'exactitude de ce procédé, prenons deux polynômes ordonnés par rapport à x, tels que

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad Mx^2 + Nx + P,$$

et supposons que les lettres A, B..., P, représentent des quantités

complexes qui ne contiennent point x. Il est clair que, dans le produit des deux polynômes, la partie qui contient x au plus haut degré est égale à $Ax^3 \times Mx^2$; donc, réciproquement, en divisant cette partie par Ax^3, on retrouvera la partie Mx^2, qui contient les termes de l'autre facteur dans lesquels x a le plus haut exposant. On voit que le raisonnement est exactement le même que si les diverses puissances de x n'étaient multipliées que par des monômes. L'exemple suivant lèvera toutes les difficultés.

N. B. Les termes affectés de la même puissance de x sont ordonnés en colonne ; et, pour abréger, on n'écrit pas les termes qui doivent détruire la 1re colonne de chaque dividende partiel. Par la même raison, on sous-entend dans chaque reste, les colonnes du dividende qui devraient s'y placer sans altération.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
a^4 & x^4+a^5 & x^3-a^5b & x^2+a^4b^3 & x-a^2b^6 \\
-a^3b & \quad -a^4b & \quad -2a^4b^2 & \quad +2a^3b^4 & \\
+a^2b^2 & \quad +a^3b^2 & \quad -ab^5 & & \\
-ab^3 & \quad +a^2b^3 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
a^2 & x^2+a^3x-a^2b^2 & \\
-ab & & \\ \hline
a^2 & x^2-a^2b & x+b^4 \\
+b^2 & \quad -ab^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
-a^5 & x^3+a^4b^2 & x^2 \\
-a^3b^2 & \quad +a^2b^4 & \\ \hline
-a^4b & x^3-a^5b & x^2+\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\
+a^2b^3 & \quad -a^4b^2 & \\
 & \quad +a^2b^4 & \\
 & \quad -ab^5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+a^5b & x^2-a^4b^3 & x \\
+a^4b^2 & \quad -a^3b^4 & \\ \hline
+a^2b^4 & x^2+a^3b^4\,x\ldots\ldots & \\
-ab^5 & & \\
 & -a^3b^4\,x+a^2b^6 & \\ \hline
 & \quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

1re division partielle
$$\left\{\begin{array}{l|l}
\quad a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3 & a^2-ab \\ \cline{2-2}
-a^4+a^3b & a^2+b^2 \\ \cline{1-1}
\qquad +a^2b^2-ab^3 & \\
\qquad -a^2b^2+ab^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}\right.$$

2e division partielle
$$\left\{\begin{array}{l|l}
-a^4b+a^2b^3 & a^2-ab \\ \cline{2-2}
+a^4b-a^3b^2 & -a^2b-ab^2 \\ \cline{1-1}
-a^3b^2+a^2b^3 & \\
+a^3b^2-a^2b^3 & \\ \cline{1-1}
\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}\right.$$

3e division partielle
$$\left\{\begin{array}{l|l}
+a^2b^4-ab^5 & a^2-ab \\ \cline{2-2}
-a^2b^4+ab^5 & +b^4 \\ \cline{1-1}
\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}\right.$$

48. Comme dernier cas de la division, je mentionnerai celui où le diviseur ne contient point une lettre x, par rapport à laquelle on a ordonné le dividende. Soient Ax^2+Bx+C ce dividende, et M le diviseur qui ne contient point x. Pour que le quotient multiplié par M reproduise le dividende, il faudra que ce quotient contienne les mêmes puissances de x que le dividende, et qu'en multipliant par M les parties de ce quotient qui renferment ces puissances, on retrouve les quantités Ax^2, Bx, C. Donc, pour faire la division proposée, on doit diviser séparément par le diviseur les parties du dividende affectées des diverses puissances de x.

49. Quelquefois on peut décomposer le dividende en facteurs, de manière que le diviseur y soit en évidence; et il suffit alors de le supprimer pour avoir le quotient. Par exemple, soit à diviser

$$x^4-4ax^3+4a^2x^2-4b^2x^2 \quad \text{par} \quad x^2-2ax+2bx.$$

On observera que les trois premiers termes du dividende sont le carré de x^2-2ax (41), et que de ce carré on retranche $4b^2x^2$ qui est le carré de $2bx$. Le dividende est donc la différence des carrés des deux quantités x^2-2ax et $2bx$: par conséquent il est égal au produit de la somme de ces deux quantités, multipliée par leur différence (41); et, en se bornant à indiquer la multiplication, il peut s'écrire ainsi

$$(x^2-2ax+2bx)(x^2-2ax-2bx).$$

Le premier facteur est le diviseur proposé; donc l'autre facteur est le quotient. Il n'y a qu'une très-grande habitude du calcul qui puisse suggérer de pareilles décompositions.

Continuation. A quels symptômes on reconnaît la possibilité ou l'impossibilité de la division.

50. Dans le n° 45, pour découvrir le procédé de la division, on a supposé que le dividende était un produit du diviseur par un polynôme inconnu. Je vais montrer qu'on peut reconnaître, par ce procédé même, si cette condition a lieu ou non : c'est-à dire, en d'autres termes, qu'on apprendra si la division est possible ou si elle ne l'est pas.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait ordonné par rapport aux puissances descendantes de la lettre x. Il est clair que dans le 1[er] terme de chacun des restes successifs, l'exposant de x est moindre que dans le 1[er] terme du reste précédent; et, par conséquent, on doit nécessairement arriver à un reste nul, ou à un reste dont le 1[er] terme contienne x à un exposant moindre que le 1[er] terme du diviseur.

Dans le premier cas, la division est possible. En effet, c'est en retranchant du dividende les produits du diviseur par les différens termes de la quantité placée au quotient qu'on est arrivé au reste zéro : or, c'est la somme de ces produits partiels qui compose le produit du diviseur par la quantité écrite au quotient; donc le dividende est égal à ce produit.

Dans le second cas, il est évident que le 1[er] terme du reste ne pourra pas se diviser par le 1[er] terme du diviseur. Or, quand on suppose que le dividende est un produit du diviseur, on a vu dans les raisonnemens du n° 45 que cette division doit donner un terme du quotient; donc, puisque cette division est impossible, celle des polynômes proposés l'est également. Ainsi, la division ci-dessous est impossible, et la raison en est que le 1[er] terme du reste $3x-1$ ne peut plus se diviser par le 1[er] terme x^2 du diviseur.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+x^2-9x+8 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
-2x^3-4x^2+6x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2-3x+8 & \\
+3x^2+6x-9 & \\ \cline{1-1}
+3x-1 &
\end{array}$$

Quelquefois l'impossibilité de la division se manifestera sans pousser l'opération aussi loin, attendu qu'il peut y avoir dans le 1[er] terme du diviseur différentes lettres qui empêchent les divisions partielles. Il convient même, avant de commencer l'opération, de porter son attention sur chacune des lettres communes aux deux polynômes proposés; et si, pour l'une d'elles, il arrive que les termes qui, dans le dividende et le diviseur, la contiennent respectivement au plus haut exposant ou bien au plus faible, ne soient pas divisibles l'un par l'autre, on sera certain que la division proposée est impossible. Cette observation doit s'appliquer aussi aux divisions partielles auxquelles le calcul peut conduire.

Dans le dernier exemple, on peut, si on veut, compléter le quotient en lui ajoutant une expression fractionnaire dans laquelle sera indiquée la division du dernier reste par le diviseur, et alors on aura

$$\frac{2x^3+x^2-9x+8}{x^2+2x-3}=2x-3+\frac{3x-1}{x^2+2x-3}.$$

Le second membre de cette égalité est souvent employé à la place du premier; et ce qui rend cette transformation remarquable, c'est que, dans la partie fractionnaire, le numérateur ne contient plus x à un aussi haut degré que le dénominateur. En cela, elle a quelque analogie avec l'extraction des entiers en arithmétique.

51. Il y a, pour reconnaître l'impossibilité de la division, un autre symptôme, qui se fonde sur ce que le terme du dividende dans lequel une lettre a le moindre exposant doit provenir, sans réduction, de la multiplication des termes du diviseur et du quotient dans lesquels cette lettre a le moindre exposant. De là il suit qu'après avoir ordonné par rapport aux exposans décroissans d'une lettre, si on divise le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, on doit obtenir le dernier du quotient, c'est-à-dire, celui où cette lettre a le plus faible exposant. Par conséquent, lorsque les opérations successives conduisent à placer au quotient cette lettre avec un exposant plus faible, on sera certain que la division est impossible : car les opérations subséquentes ne donneront que des exposans moindres.

Dans l'exemple suivant, si la division était possible, le dernier terme du quotient devrait être $-x^4$: or le calcul conduit à mettre au quotient le terme $-x^4$, sans que la division se termine; on est donc assuré qu'elle ne doit pas se terminer, et dès-lors il est inutile de la continuer, à moins qu'on ne veuille effectuer la transformation dont j'ai parlé à la fin du numéro précédent.

$$\begin{array}{l|l}
x^9+x^7-ax^5+ax^4 & x^4+x^3+a \\ \cline{2-2}
-x^9-x^8-ax^5 & x^5-x^4 \\ \cline{1-1}
-x^8+x^7-2ax^5+ax^4 & \\
+x^8+x^7+ax^4 & \\ \cline{1-1}
+2x^7-2ax^5+2ax^4 &
\end{array}$$

52. Quand on ordonne par rapport aux puissances ascendantes

e lettre, l'impossibilité de la division se manifeste d'une ma-
: analogue. Alors le dernier terme du dividende divisé par le
ier terme du diviseur doit donner le terme du quotient où
: lettre a le plus haut exposant; donc, si le calcul amène au
ient cette lettre avec un exposant plus fort, la division sera
ossible, puisque les calculs suivans amèneraient des exposans
re plus forts.

3. Je citerai ici deux exemples de division qui conduisent à
ésultats remarquables, dont nous ferons usage plus tard.

: premier exemple sera la division de x^m-a^m par $x-a$. Si on
e les binômes x^2-a^2, x^3-a^3, x^4-a^4, par $x-a$, on trouve

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a,$$

$$\frac{x^3-a^3}{x-a}=x^2+ax+a^2;$$

$$\frac{x^4-a^4}{x-a}=x^3+ax^2+a^2x+a^3.$$

perçoit une loi fort simple dans ces quotiens : 1° tous les
es sont additifs; 2° le premier terme et le dernier sont for-
en ôtant une unité aux exposans de x et de a dans le divi-
e; 3° dans l'intervalle, les exposans de x vont en diminuant
: unité, et ceux de a en augmentant d'une unité, de telle
que la somme des exposans de x et de a, dans chaque terme,
onstamment la même.

suivant cette loi, si on désigne par m un nombre entier
if quelconque, on devrait conclure

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

points indiquent ici une lacune qui doit être remplie par
ermes qu'on sous-entend, et qui sont soumis à la même loi
les précédens. Ce quotient n'est établi que sur une simple
ogie. A la vérité, on pourrait y parvenir en divisant immédiate-
x^m-a^m par $x-a$, et en faisant attention à la manière
chaque terme du quotient se trouve formé; mais il sera plus
le de le vérifier en le multipliant par le diviseur $x-a$. Il
alors

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots - a^{m-1}x - a^m. \end{array}$$

Or, il est évident que dans la première ligne chaque terme, à partir du second, doit avoir au-dessous de lui un terme égal et de signe contraire par lequel il est détruit, de sorte qu'après la réduction on retrouve le dividende $x^m - a^m$.

Le deuxième exemple sera la division du polynôme $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u$ par $x - a$.

$$\begin{array}{l|l} x^m + px^{m-1} \quad + qx^{m-2} \ldots\ldots + tx + u & x - a \\ \hline \quad \left.\begin{array}{l} +a \\ +p \end{array}\right| x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-1} \left.\begin{array}{l} +a \\ +p \end{array}\right| x^{m-2} \left.\begin{array}{l} +a^2 \\ +pa \\ +q \end{array}\right| x^{m-3} \ldots \begin{array}{l} +a^{m-1} \\ +pa^{m-2} \\ +qa^{m-3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +t \end{array} \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} +a^2 \\ +pa \\ +q \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

En divisant x^m par x, on a x^{m-1} pour le 1er terme du quotient.

Dans le premier reste, la partie en x^{m-1} est $(a+p)\,x^{m-1}$: on la divise par x, et on trouve $(a+p)\,x^{m-1}$ au quotient.

Dans le reste suivant, la partie en x^{m-2} est $(a^2+pa+q)x^{m-2}$: on la divise par x, et on obtient $(a^2+pa+q)x^{m-3}$ au quotient.

En continuant de la même manière, et en considérant toujours comme un seul terme tous ceux qui renferment la même puissance de x, on aperçoit clairement que chaque terme du quotient se forme du précédent en le multipliant par a, en ajoutant au produit le terme qui a la même puissance de x dans le dividende, et en divisant ensuite par x.

Il suit de là que, dans le quotient, la partie indépendante de x sera $a^{m-1} + pa^{m-1} + qa^{m-2} \ldots + t$. Si on multiplie le diviseur par cette quantité, la partie en x détruira celle qui doit se trouver dans le dernier dividende partiel, et il viendra, pour reste,

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} \ldots + ta + u.$$

La division s'arrête ici, et l'on doit remarquer que ce reste n'est autre chose que le dividende dans lequel on remplacerait x par a.

Lorsque ce reste est nul, la division se fait exactement. Ainsi,

on peut déjà regarder comme démontrée la proposition suivante, dont l'importance sera reconnue plus tard : *Si* a *est une quantité qui, mise à la place de* x, *rende le polynôme* $x^m + px^{m-1} +$ etc., *égal à zéro, ce polynôme sera divisible par* x—a.

Fractions algébriques.

54. On donne le nom de *fractions algébriques* à des expressions telles que $\frac{3a}{2b}$, $\frac{a^2 - b^2}{2a + b}$, qui indiquent le quotient d'une division, soit qu'on puisse l'effectuer ou qu'on ne le puisse pas.

Si les numérateurs et les dénominateurs étaient des nombres entiers, il est évident que ces fractions devraient entrer dans les calculs par les mêmes règles que les fractions de l'arithmétique. Mais comme ces numérateurs et ces dénominateurs peuvent représenter des quantités quelconques, M. Reynaud observe avec raison que quelques explications nouvelles sont nécessaires.

55. Désignons par a et b deux quantités quelconques, et par q leur quotient, on aura

$$\frac{a}{b} = q, \text{ d'où } a = bq.$$

Si on multiplie a et bq par une quantité quelconque m, il vient

$$am = bqm \text{ ou } am = q \times bm; \text{ donc } \frac{am}{bm} = q.$$

Mais q représente le quotient de a par b; donc

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

De là on conclut, comme en arithmétique, qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par une même quantité.

De ce principe résultent aussi, comme en arithmétique, la simplification des fractions et leur réduction au même dénominateur.

La simplification d'une fraction s'opère en supprimant les facteurs communs à ses deux termes. Ainsi

$$\frac{12a^3bc^3}{18a^4bc^2} = \frac{2c}{3a}, \quad \frac{a^2 - 4b^2}{2a + 4b} = \frac{a - 2b}{2}.$$

La réduction des fractions au même dénominateur peut se faire en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres. Mais il convient de rappeler que s'il y a des facteurs qui appartiennent à plusieurs dénominateurs, on obtiendra un dénominateur commun plus simple en prenant chacun des facteurs qui entrent dans les dénominateurs des fractions proposées, et donnant à chacun la plus haute puissance dont il soit affecté dans ces dénominateurs. Par exemple, soient les fractions

$$\frac{3a^4}{40b^2c}, \quad \frac{7b^6}{18a^2c^3}, \quad \frac{11c^5}{45a^2b^2}.$$

Les trois dénominateurs peuvent s'écrire ainsi :

$$2^3 \times 5 \times b^2c, \quad 3^2 \times 2 \times a^2c^3, \quad 3^2 \times 5 \times a^2b^2.$$

Alors, on prendra chacun des facteurs avec son plus haut exposant, et le dénominateur commun sera

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times a^2b^2c^3, \quad \text{ou} \quad 360a^2b^2c^3 \text{ (*)}.$$

Pour réduire les fractions à ce dénominateur, on le divise d'abord par chaque dénominateur successivement, ce qui donne les trois quotiens

$$9a^2c^2, \quad 20b^2, \quad 8c^3;$$

ensuite on multiplie les trois numérateurs respectivement par ces trois quotiens; enfin on place sous les produits le dénominateur commun $360a^2b^2c^3$, et les trois fractions deviennent

$$\frac{27a^6c^2}{360a^2b^2c^3}, \quad \frac{140b^8}{360a^2b^2c^3}, \quad \frac{88c^8}{360a^2b^2c^3}.$$

Si avec les fractions on a des quantités de forme entière, on pourra leur donner le dénominateur commun, après les avoir multipliées préalablement par ce dénominateur.

(*) En arithmétique, pour trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, sans les décomposer en facteurs, on s'élève successivement aux multiples de l'un d'eux, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit divisible par chacun des autres nombres. Pour abréger, ce sont les multiples du plus grand nombre qu'il convient d'essayer.

56. Quand on veut réduire en une seule fraction plusieurs termes qui ont des dénominateurs différens, on commence par les réduire au même dénominateur, et alors on aura des expressions telles que celle-ci

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m},$$

dans laquelle les lettres désignent telles quantités qu'on voudra. Si on multiplie chaque fraction par m, l'expression entière sera multipliée par m, et on aura $a+b-c$. Or, en divisant ce produit par m, on doit revenir à la première quantité; donc

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Ainsi, après avoir réduit les fractions au même dénominateur, on fait, sur les numérateurs, les additions et les soustractions qu'on devait faire sur les fractions, puis on donne au résultat le dénominateur commun.

Considérons les multiplications et les divisions de fractions. Soient

$$p=\frac{a}{b},\ q=\frac{c}{d}.$$

On devra avoir $pb=a$, $qd=c$; donc $pb\times qd=a\times c$, ou $pq\times bd=ac$. De là on tire

$$pq=\frac{ac}{bd};$$

donc on multiplie des fractions entre elles en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

De cette règle on conclut celle de la division. En effet, elle donne

$$\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b};$$

donc $\frac{ad}{bc}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$: or, la quantité $\frac{ad}{bc}$ est aussi égale au produit $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$; donc on divise une fraction par une fraction en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Les quantités entières seront comprises dans les fractions en leur donnant l'unité pour dénominateur.

57. Pour donner un exemple de calcul algébrique, je proposerai de simplifier cette expression

$$\frac{\left(a-\frac{b^2}{2a}\right)\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)}{1-\frac{a}{a+b}}.$$

En réduisant chaque terme entier en fraction de même dénominateur que celle dont il est suivi, puis renversant la quantité fractionnaire qui sera en diviseur, pour la mettre en multiplicateur, cette expression devient

$$\frac{2a^2-b^2}{2a}\times\frac{ab-b^2}{a+b}\times\frac{a+b}{b}.$$

Après qu'on aura multiplié les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, il est facile d'apercevoir que b et $a+b$ seront des facteurs communs aux deux termes de la fraction résultante. On peut donc les supprimer, et on aura

$$\frac{(2a^2-b^2)(a-b)}{2a}.$$

Si on juge à propos d'effectuer la multiplication, il viendra

$$\frac{2a^3-2a^2b-ab^2+b^3}{2a};$$

et même, s'il y avait quelque utilité à diviser par $2a$ tous les termes du numérateur, on pourrait écrire

$$a^2-ab-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2a}.$$

Comme exercice, je proposerai encore au lecteur d'effectuer la transformation suivante :

$$\frac{\left(1-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(a-2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)}=\frac{(a^2-ab-b^2)(a+b)}{2ab^2(a-b)}.$$

De l'exposant zéro et des exposans négatifs.

58. Quand on divise l'une par l'autre deux puissances de la même quantité, telles que a^m et a^n, la règle des exposans (34) donne

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Les raisonnemens qui ont conduit à cette règle supposent l'exposant du dividende plus grand que celui du diviseur; mais je vais montrer comment, au moyen de conventions nouvelles, la même règle peut s'étendre aux autres cas.

Supposons d'abord qu'on applique cette règle au cas où les deux exposans sont égaux : on trouvera a^0 pour résultat. Or, l'exposant d'une lettre indiquant le nombre de fois que cette lettre est prise comme facteur (10) et, l'expression a^0 ne pouvant recevoir de cette définition aucune interprétation, on reste maître de lui donner tel sens qu'on veut. Mais comme elle vient d'une division dans laquelle le diviseur est égal au dividende, et qu'alors le quotient est toujours l'unité, on est convenu de regarder l'expression a^0 comme équivalente à l'unité. Ainsi désormais, *toute quantite qui aura l'exposant zéro sera égale à* 1.

Supposons, en second lieu, que l'exposant de a dans le diviseur surpasse celui du dividende, et qu'on ait $n=m+p$. En appliquant encore la règle des exposans, on aurait pour quotient a^{-p}; et cette expression, dans laquelle l'exposant est négatif, ne peut elle-même avoir aucune signification, si ce n'est en vertu de quelque convention nouvelle. Toutefois, il est convenable que cette convention permette de considérer la puissance négative a^{-p} comme le quotient de a^m par a^{m+p}. Or, si on remarque que ce quotient peut se représenter par la fraction $\frac{a^m}{a^{m+p}}$, qu'on peut le simplifier en divisant les deux termes de cette fraction par a^m, et qu'alors il devient $\frac{1}{a^p}$, on est naturellement conduit à regarder l'expression a^{-p} comme équivalent à $\frac{1}{a^p}$; c'est-à-dire que *toute quan-*

tité affectée d'un exposant négatif équivaut au quotient de l'unité divisée par cette même quantité, après qu'on a changé le signe de son exposant.

Au moyen des nouvelles conventions qu'on vient de faire connaître, on aura toujours, m et n étant des nombres entiers positifs quelconques,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Par suite, on aura aussi

$$\frac{a^m b^n c^p}{a^r b^s c^t} = \frac{a^m}{a^r} \times \frac{b^n}{b^s} \times \frac{c^p}{c^t} = a^{m-r} b^{n-s} c^{p-t}.$$

59. On emploie quelquefois l'exposant zéro pour conserver la trace d'une lettre que le calcul fait disparaître; et l'exposant négatif, pour présenter une quantité fractionnaire sous forme entière. C'est ainsi qu'on écrira

$$\frac{2a^3b^2x^2}{abx^2} = 2 \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b} \times \frac{x^2}{x^2} = 2a^2bx^0,$$

$$\frac{3a^4b^2}{c^2d} = 3a^4b^2 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d} = 3a^4b^2c^{-2}d^{-1}.$$

60. Puisque les exposans négatifs sont admis dans les expressions algébriques, il faut chercher les règles suivant lesquelles ils doivent se combiner dans les calculs. Or, il est digne de remarque que ces règles sont toutes comprises dans les mêmes énoncés que celles qui ont été trouvées pour les exposans positifs. Rien de plus simple à démontrer.

Par la nature des exposans négatifs, on a

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

Dans chacun de ces produits l'exposant de a est la somme des exposans des facteurs. Ainsi, dans la multiplication des puissances d'une quantité, l'exposant de cette quantité est toujours la somme des exposans des facteurs. Par une conséquence nécessaire, on conclut, que dans la division, l'exposant du quotient s'obtiendra

toujours en retranchant celui du diviseur de celui du dividende.

61. Tout ce qui a été dit dans la division des polynômes repose principalement sur cette proposition que, si deux polynômes et leur produit sont ordonnés par rapport à une même lettre, le premier terme du produit est le produit des premiers termes des deux facteurs, et le dernier terme est le produit des derniers termes de ces facteurs. Or, cette proposition subsiste également quand il y a des exposans négatifs, et dès-lors la théorie de la division n'aura aucune modification à souffrir.

Quand on ordonne des polynômes par rapport aux exposans décroissans d'une lettre quelconque x, il faut bien faire attention à l'ordre qu'on est convenu d'établir entre les grandeurs selon leurs signes. D'après le n° 20, les exposans négatifs devront venir après x^0, c'est-à-dire après les termes qui ne contiennent point x; et, parmi ces exposans, ceux qui sont les plus forts en valeur absolue devront être rangés les derniers. Exemple :

$$2ax^2 - abx + ab^2 - a^2b^2x^{-1} - a^3b^2x^{-2}.$$

Cela posé, si la proposition dont il s'agit ne semble point assez évidente, on pourra la démontrer comme il suit. Soient A et B deux polynômes quelconques ordonnés comme ci-dessus, et désignons par k un nombre positif supérieur au plus grand exposant négatif qui se trouve dans A et B. Si on multiplie A et B par x^k, sans troubler l'ordre des termes, on aura deux noveaux polynômes A' et B' qui ne renfermeront plus que des exposans positifs, et qui seront encore ordonnés par rapport aux puissances descendantes de x. De plus, il est clair que si les premiers termes de A et B sont ax^m et bx^n (m et n pouvant être des nombres négatifs), ceux de A' et B' seront ax^{m+k} et bx^{n+k}; donc, en multipliant les nouveaux polynômes l'un par l'autre, le premier terme du produit sera

$$abx^{m+n+2k}.$$

Semblablement, si les derniers termes de A et B sont fx^p et gx^q, ceux des nouveaux polynômes seront fx^{p+k} et gx^{q+k}; et par suite le dernier terme de leur produit sera

$$fgx^{p+q+2k}.$$

Le produit des nouveaux polynômes est égal à $Ax^k\times$ ABx^{2k}, et il est évident qu'en le divisant par x^{2k} on revien produit AB des polynômes primitifs. Mais par là le proc cesse pas d'être ordonné, et ses deux termes extrêmes se sent à

$$abx^{m+n} \text{ et } fgx^{p+q} :$$

or, c'est précisément ce qui était à démontrer.

CHAPITRE III.

Équations du premier degré.

Quelques définitions.

62. Revenons aux questions dont la solution exige les re ces de l'algèbre. Si on se reporte à celle qui a été traitée d n° 16, on remarquera qu'après avoir désigné par x la plus partie du nombre à partager, par b l'excès de la moyenne plus petite, et par c l'excès de la plus grande sur la moyenn a reconnu que la somme $3x+2b+c$ devait être égale à ce bre; et, comme ce nombre était représenté par a, on : l'égalité

$$3x+2b+c=a.$$

De là, ensuite, on est parvenu facilement à la valeur de x.

Proposons-nous encore ce problème : *Trouver un n dont le quintuple diminué de* 13 *soit égal à son triple aug de* 11.

En représentant par x le nombre inconnu, son quintuple nué de 13 sera exprimé par $5x-13$, et son triple augmenté le sera par $3x+11$. Or, d'après l'énoncé, il faut que ces quantités soient égales; donc on doit avoir

$$5x-13=3x+11.$$

Ajoutons 13 à chaque membre de cette égalité, puis retranchons-en $3x$, on aura

$$5x - 13 + 13 - 3x = 3x + 11 + 13 - 3x,$$

où bien, en effectuant les réductions,

$$2x = 24.$$

Alors, en divisant par 2, on obtient

$$x = \frac{24}{2} = 12,$$

c'est-à-dire que le nombre cherché est 12. En effet, si on ôte 13 du quintuple de 12, il reste 47 ; et si on ajoute 11 au triple de 12, on trouve encore le même nombre 47.

La question précédente ne renfermait qu'une seule inconnue, et elle n'a conduit qu'à une seule égalité. D'autres questions pourraient contenir plus d'une inconnue et donner plus d'une égalité. Mais quel que soit le nombre des inconnues, la solution de la question devra toujours offrir deux parties bien distinctes. Dans la première, on exprimera au moyen des signes algébriques les relations entre les quantités connues et les quantités inconnues, ce qui mènera à égaler entre elles certaines expressions ; et, dans la seconde, on déduira de ces égalités les valeurs des inconnues. La première partie ne peut être soumise à aucune règle précise ; mais la deuxième est assujettie à des règles générales qui font l'objet principal de l'algèbre, et dont je vais commencer l'exposition après avoir expliqué quelques nouvelles dénominations dont l'usage est continuel.

63. Lorsque deux expressions algébriques ne sont pas actuellement égales, mais qu'elles renferment une ou plusieurs quantités inconnues qu'il faut déterminer de manière qu'elles deviennent égales, on les joint par le signe $=$, comme si elles étaient actuellement égales, et l'on donne à l'ensemble des deux expressions, ainsi réunies, le nom d'*équation*.

Par exemple, désignez par x une quantité inconnue, et posez

$$2x + 3 = x + 7;$$

ce sera là une équation. La quantité $2x+3$ étant la même chose

que $x+7+x-4$, on reconnaît sur-le-champ qu'elle ne peut devenir égale à $x+7$ qu'en donnant à x la valeur 4.

Lorsqu'on peut démontrer que deux expressions ont des valeurs égales, et qu'on les joint par le signe $=$, elles forment une *égalité*.

Ainsi, en posant

$$(x+1).(x-2)=x^2-x-2,$$

on aurait une égalité : car en effectuant le produit $(x+1)(x-2)$, on trouve x^2-x-2.

Si on désigne par a, b, c, d, quatre nombres connus en proportion géométrique, et qu'on écrive

$$a\times d=b\times c,$$

ce sera encore une égalité : car il est démontré que dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

Si les deux quantités séparées par le signe $=$ sont égales et exprimées tout-à-fait de la même manière, elles forment une *identité*.

Par exemple, on a des identités quand on écrit

$$4=4,\quad x^2+2=x^2+2.$$

Qu'il s'agisse d'une équation, d'une égalité, ou d'une identité, il est inutile d'avertir que les noms de *premier membre* et de *second membre* désignent toujours les deux quantités séparées par le signe $=$.

64. D'après les définitions précédentes, quand on parle d'*équations*, on doit toujours entendre qu'il y a des inconnues à trouver, et que les valeurs de ces inconnues doivent être telles, qu'en les substituant à la place des lettres qui les représentent, les équations doivent se changer en de véritables égalités. Le mot *égalité* rappelle des quantités qui sont actuellement égales, mais dont l'égalité doit être démontrée, si elle ne l'a déjà été. Enfin l'*identité* est une égalité évidente d'elle-même.

Dans l'usage, on s'écarte souvent de l'acception rigoureuse des termes, et l'on confond l'équation et l'égalité. Cela tient à ce que,

dans les raisonnemens, on a besoin presque toujours de supposer que les inconnues soient remplacées par leurs valeurs ; et, comme ces valeurs doivent rendre effectivement les deux membres de chaque équation égaux entre eux, on conçoit que, sous ce point de vue, les équations deviennent des égalités.

Souvent aussi, lorsqu'on veut désigner une égalité telle que $3\times4=2\times6$, ou $(a+1)(a-1)=a^2-1$, on se sert du mot *identité* : c'est que, par la pensée, on regarde les opérations indiquées comme déjà effectuées, et qu'alors en effet on aurait de vraies identités, $12=12$, ou $a^2-1=a^2-1$.

65. Déterminer les valeurs des inconnues qui sont engagées dans des équations, c'est chercher toutes les valeurs qui, étant mises dans ces équations à la place des inconnues, peuvent rendre les deux membres égaux entre eux. Cela s'appelle *résoudre* les équations.

Il suit de là qu'on peut vérifier les valeurs des inconnues, en les substituant dans les équations, et en effectuant tous les calculs indiqués dans les deux membres de chacune d'elles. Alors les équations devront être *identiques*, c'est-à-dire se réduire à des identités. On dit alors que les équations *sont vérifiées*, ou bien encore qu'elles *sont satisfaites*.

66. Les équations qu'on peut avoir à résoudre ne sont pas toutes également simples. Dans un très-grand nombre de cas, on les ramène à ne contenir que des termes joints entre eux par les signes $+$ et $-$, dans lesquels les inconnues sont élevées à des puissances positives, et multipliées soit entre elles, soit par des quantités données. Alors, ce qu'on nomme le degré d'une équation, c'est la somme des exposans des inconnues, prise dans le terme où cette somme est la plus forte.

Ainsi, par exemple, considérons les équations

[1] $2x-a=b-x$, [2] $ax-by=cx-d$,
[3] $2x^2+a=4x+2$ [4] $xy^4-2x^3=y^3-1$,

dans lesquelles les inconnues sont x et y. Les équations [1] et [2] seront du premier degré ; l'équation [3], du second ; et l'équation [4], du cinquième.

Quelques principes généraux relatifs aux équations. Transposition des termes. Evanouissement des dénominateurs.

67. *On peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une équation, sans que les valeurs des inconnues soient altérées.*

Il est évident en effet que les mêmes valeurs, qui satisfont à l'équation dans son état primitif, doivent y satisfaire également dans le second état, et *vice versâ*.

68. De là il résulte qu'*on peut effacer, dans l'un des deux membres d'une équation, une quantité qui est ajoutée ou retranchée à ce membre, pourvu qu'on l'écrive dans l'autre membre avec un signe contraire.* Cela revient évidemment à ajouter à chaque membre de l'équation cette quantité, prise avec un signe contraire à celui dont elle est précédée dans le membre où elle se trouve.

Au moyen de cette règle, on pourra faire passer d'un membre dans l'autre, tels termes qu'on voudra, en ayant soin de changer leurs signes. C'est ce qu'on appelle la *transposition* des termes. Ainsi, qu'on aît l'équation

$$17x - 3 = 45 + 11x.$$

Si on veut mettre dans le premier membre les termes qui contiennent x, et les autres dans le second, on effacera $+11x$ dans le second membre, et on écrira $-11x$ dans le premier; et pareillement on effacera -3 dans le premier, et on écrira $+3$ dans le second. Alors l'équation devient

$$17x - 11x = 45 + 3.$$

69. *On peut aussi, sans que les valeurs des inconnues en soient altérées, multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité, pourvu que cette quantité ne renferme aucune inconnue.*

En effet, les mêmes valeurs des inconnues doivent évidemment satisfaire à l'équation dans les deux états (*).

(*) Il est bien entendu, sans qu'il soit nécessaire de le dire, que la quantité par laquelle on multiplie ou divise l'équation n'est ni nulle ni infinie.

Mais il faut bien remarquer que la proposition pourrait cesser d'être vraie, si la quantité par laquelle on multiplie ou on divise les deux membres contenait les inconnues : car, si cela était, certaines valeurs des inconnues, qui satisfont à l'équation dans un des deux états, pourraient n'y pas satisfaire dans l'autre. Par exemple, qu'on ait l'équation $2x=4$, et qu'on multiplie chaque membre par $x-1$, il viendra $2x(x-1)=4(x-1)$: cette dernière équation admettra évidemment la valeur $x=1$, qui ne satisfait pas à la première.

70. De la proposition précédente il résulte que, si une quantité donnée est facteur dans les deux membres, on pourra simplifier l'équation en divisant les deux membres par cette quantité. Par exemple, si on a

$$27a^2bx+18a^3b=9a^2b^2-45a^3x,$$

on pourra diviser tous les termes par $9a^2$, et l'équation deviendra

$$3bx+2ab=b^2-5ax.$$

71. Une autre remarque, qui découle immédiatement de la même proposition, c'est qu'on peut changer les signes de tous les termes d'une équation : car cela revient à multiplier les deux membres par -1. Il est d'ailleurs évident (32) que, par ce changement de signes, les valeurs des deux membres ne font que changer de signe, et que par conséquent si elles sont égales avant, elles le sont encore après, et *vice versâ*.

72. Mais cette proposition est surtout d'une grande utilité pour ramener une équation, qui renferme des dénominateurs, à n'avoir plus que des termes entiers. On obtient sur-le-champ cette transformation en multipliant les deux membres par une quantité qui soit divisible par chaque dénominateur de l'équation. Alors, en effet, chaque terme fractionnaire contiendra dans son numérateur tous les facteurs de son dénominateur; de sorte qu'en les supprimant, la division indiquée par ce dénominateur se trouvera effectuée, et il n'y aura plus que des termes entiers. Quant à la quantité par laquelle on multiplie l'équation, il convient de choisir toujours la plus simple possible, comme on le fait dans la réduction des fractions au même dénominateur. De là résulte la règle suivante :

Pour chasser les dénominateurs d'une équation, on forme une

quantité qui soit divisible par chaque dénominateur, et ordinairement on la prend la plus simple possible; on multiplie ensuite chaque terme entier par cette quantité, et le numérateur de chaque terme fractionnaire par le quotient que donne cette quantité divisée par le dénominateur; puis on supprime tous les dénominateurs.

Comme exemple, prenons d'abord l'équation

$$\frac{ax}{b}-b=\frac{a}{3}+\frac{5x}{2}.$$

Ici la quantité la plus simple qui soit divisible par les différens dénominateurs n'est autre que leur produit. Alors la règle revient à multiplier le numérateur de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres, et chaque terme entier par le produit de tous ces dénominateurs. De cette manière il vient

$$2\times3\times ax-2\times3\times b\times b=2\times b\times a+3\times b\times 5x,$$

ou, en effectuant les multiplications,

$$6ax-6b^2=2ab+15bx.$$

En second lieu, soit l'équation

$$5a+\frac{a^2x}{18b^2}=\frac{3a^2}{4b}-\frac{bx}{9a}.$$

La quantité la plus simple qui soit divisible par les dénominateurs est $36ab^2$, et les quotiens sont $2a$, $9ab$, $4b^2$. Il faudra donc multiplier les numérateurs des fractions par ces quotiens, et le terme entier $5a$ par $36ab^2$. On a ainsi

$$5a\times36ab^2+a^2x\times2a=3a^2\times9ab-bx\times4b^2;$$

et, en effectuant les produits,

$$180a^2b^2+2a^3x=27a^3b-4b^3x.$$

Soit encore l'équation

$$2b-\frac{ax}{6b}=\frac{a^2x}{ab+b^2}-\frac{3a^2b}{2a^2-2b^2}.$$

En décomposant les dénominateurs en facteurs, ils deviennent

$$2.3.b,\quad (a+b)b,\quad 2(a+b)(a-b);$$

et on voit que la quantité la plus simple qui puisse se diviser par chacun d'eux, est $2.3.b(a+b)(a-b)$ ou $6a^2b-6b^3$. Les quotiens sont

$$a^2-b^2,\quad 6a-6b,\quad 3b;$$

par conséquent, pour chasser les dénominateurs de l'équation, je multiplierai les numérateurs des fractions par ces quotiens, et le terme entier $2b$ par la quantité $6ab^2-6b^3$. Alors il vient

$$12ab^3-12b^4-a^3x+ab^2x=6a^3x-6a^2bx-9a^2b^2.$$

73. Ce qui a été dit dans ce paragraphe est applicable à toute espèce d'équation, et suffit pour résoudre celles du 1er degré.

Résolution d'une équation du 1er degré à une seule inconnue.

74. La difficulté de résoudre les équations dépend de leur degré et du nombre des inconnues. Je vais parcourir ici, dans différens exemples, tous les cas que peut présenter une équation du 1er degré à une seule inconnue.

Exemple I. Soit l'équation

$$[1]\qquad 18x-61=13x-31.$$

En transposant $13x$ dans le premier membre, et -61 dans le second, on aura

$$18x-13x=61-31;$$

et, en effectuant les réductions,

$$5x=30.$$

Enfin, en divisant les deux membres par 5, on obtient

$$x=6.$$

De là on conclut que l'inconnue x est égale à 6. Et en effet remarquez que, d'après les principes des n°s 68 et 69, les équations successives par lesquelles on est passé doivent admettre les mêmes valeurs de x que l'équation [1]. Or il est évident que la dernière, $x=6$, est satisfaite en mettant 6 à la place de x, et qu'elle ne peut pas l'être autrement; par conséquent il en doit être de

même de l'équation [1]. Ce raisonnement s'applique à tous les exemples qui vont suivre.

Pour vérifier si les calculs ont été faits avec exactitude, on substituera la valeur de x dans l'équation, et on examinera si elle la rend identique. C'est effectivement ce qui arrive; car on trouve successivemment

$$18 \times 6 - 61 = 13 \times 6 - 31,$$
$$108 - 61 = 78 - 31,$$
$$47 = 47.$$

75. Exemple II. Soit l'équation

$$[2] \qquad 2ax - bx + 2ab = 4a^2 - ab - 3ax.$$

Je ferai encore passer dans le premier membre les termes qui contiennent x, et dans le second tous les autres. Il vient

$$2ax - bx + 3ax = 4a^2 - ab - 2ab;$$

et, en réduisant, on a

$$5ax - bx = 4a^2 - 3ab.$$

Les deux membres ne peuvent plus ici se réduire à des monômes; mais en remarquant que le premier est la même chose que le produit $(5a-b)x$, l'équation peut s'écrire ainsi

$$(5a-b)x = 4a^2 - 3ab.$$

Alors il n'y a plus qu'à diviser les deux membres par le multiplicateur de x, et l'on obtiendra la valeur de cette inconnue, savoir :

$$x = \frac{4a^2 - 3ab}{5a - b}.$$

Vérification. On substitue cette expression à la place de x dans l'équation [2], on effectue les calculs, et l'on parvient à une identité, comme on le voit ci-dessous :

$$\frac{2a(4a^2 - 3ab)}{5a - b} - \frac{b(4a^2 - 3ab)}{5a - b} + 2ab = 4a^2 - ab - \frac{3a(4a^2 - 3ab)}{5a - b},$$

$$\frac{8a^3 - 6a^2b - 4a^2b + 3ab^2 + 10a^2b - 2ab^2}{5a - b}$$

$$= \frac{20a^3 - 4a^2b - 5a^2b + ab^2 - 12a^3 + 9a^2b}{5a - b},$$

$$\frac{8a^3 + ab^2}{5a - b} = \frac{8a^3 + ab^2}{5a - b}.$$

76. **Exemple III.** Soit l'équation

$$[3] \qquad \frac{x}{4} - 4 = \frac{5x}{3} - \frac{7}{6}.$$

On peut encore suivre la même marche que dans les exemples précédens; mais il est plus commode de chasser les dénominateurs par la règle connue (72). Le calcul se réduit à convertir tous les termes en 12es et à supprimer le dénominateur commun. Il viendra

$$\begin{aligned} 3x - 48 &= 20x - 14, \\ 3x - 20x &= 48 - 14, \\ -17x &= 34, \\ x &= \frac{34}{-17} = -2. \end{aligned}$$

Remarquez que pour passer de l'équation $-17x=34$ à la valeur de x, c'est par -17 qu'on doit diviser 34, ce qui amène le quotient négatif -2.

Vérification. On substitue la valeur $x = -2$ dans l'équation [3], et il vient

$$\begin{aligned} \frac{-2}{4} - 4 &= \frac{-2 \times 5}{3} - \frac{7}{6}, \\ -\frac{6}{12} - \frac{48}{12} &= -\frac{40}{12} - \frac{14}{12}, \\ -\frac{54}{12} &= -\frac{54}{12}. \end{aligned}$$

77. **Exemple IV.** Soit l'équation

$$[4] \qquad \frac{3bx}{2a^2} - \frac{x-b}{a+b} = \frac{bx-a^2}{a^2-b^2} - \frac{x}{4a}.$$

On chasse d'abord les dénominateurs au moyen de la règle du n° (72), ce qui revient à multiplier les deux membres de l'équation par la quantité $4a^2(a^2-b^2)$: on a ainsi

$$6bx(a^2-b^2) - 4a^2(a-b)(x-b) = 4a^2(bx-a^2) - ax(a^2-b^2).$$

Ensuite, pour mettre en évidence les termes affectés de x, on effectue les multiplications, et il vient

$$\begin{aligned} 6a^2bx - 6b^3x - 4a^3x + 4a^2bx + 4a^3b - 4a^2b^2 \\ = 4a^2bx - 4a^4 - a^3x + ab^2x. \end{aligned}$$

En transposant, réduisant et ordonnant, on trouve

$$-3a^3x+6a^2bx-ab^2x-6b^3x=-4a^4-4a^3b+4a^2b^2.$$

D'après la remarque du n° 71, on aurait pu donner le signe + au premier terme $3a^3x$, en ayant soin de changer tous les signes de l'équation. De cette manière, la dernière équation eût été

$$3a^3x-6a^2bx+ab^2x+6b^3x=4a^4+4a^3b-4a^2b^2.$$

On peut l'écrire ainsi

$$(3a^3-6a^2b+ab^2+6b^3)\,x=4a^2(a^2+ab-b^2);$$

et par suite

$$x=\frac{4a^2(a^2+ab-b^2)}{a^3-6a^2b+ab^2+6b^3}.$$

78. Exemple V. Soit l'équation

$$[5] \qquad \frac{2}{1-x}+1=\frac{x}{1+x}.$$

Comme l'inconnue x est engagée dans les dénominateurs, on ne voit pas comment tirer de cette équation la valeur de x, si on ne les fait pas disparaître. Mais en les chassant, il vient

$$2+2x+1-x^2=x-x^2;$$

puis, en transposant et réduisant,

$$x=-3.$$

Remarque. Les règles pour chasser les dénominateurs sont fondées sur le principe du n° 69, lequel peut cesser d'être vrai quand l'inconnue se trouve dans la quantité par laquelle on multiplie ou on divise l'équation. Or, l'évanouissement des dénominateurs revient à multiplier toute l'équation par un produit divisible par chaque dénominateur; par conséquent, lorsque l'inconnue entre dans les dénominateurs, et c'est ce qui arrive à l'équation [5], il y a lieu d'examiner si toute valeur de x qui satisfait à l'équation, avant la disparition de ces dénominateurs, y satisfait encore après, et *vice versâ*.

Afin de n'effectuer que des changemens qui n'altèrent point

l'inconnue, transportons le 2e membre dans le 1er, et réduisons tout au même dénominateur ; il vient

$$\frac{x+3}{1-x^2}=0.$$

Si on égale le numérateur à zéro, on a $x=-3$; c'est la valeur trouvée plus haut, et elle convient véritablement à l'équation ci-dessus, car, en la substituant à la place de x, le 1er membre devient égal à zéro. Il est évident d'ailleurs qu'aucune autre valeur ne le rendrait égal à zéro ; ainsi, dans ce cas, on peut ne tenir aucun compte du dénominateur.

Il n'en est pas toujours de même : car, dans certains cas, une valeur qui rend nul le numérateur d'une fraction peut aussi rendre nul son dénominateur, et alors la fraction peut n'être pas nulle. Je reviendrai plus tard, avec quelques développemens, sur cette observation, et en même temps je parlerai des *valeurs infinies* dont j'ai fait abstraction jusqu'ici. *Voyez* le CHAP. V.

79. Laissant pour le moment ces difficultés de côté, je résumerai toutes les explications dans lesquelles je suis entré, au sujet des équations du 1er degré, dans la règle suivante :

1° *Chassez les dénominateurs, s'il y en a, et effectuez les opérations nécessaires pour que l'équation ne contienne plus que des termes multipliés par l'inconnue, et des termes tout connus.*

2° *Transposez dans le 1er membre les termes affectés de l'inconnue, et dans le 2e les termes tout connus ;*

3° *Donnez au 1er membre la forme d'un produit dont l'inconnue soit l'un des facteurs, et alors divisez les deux membres par le multiplicateur de cette inconnue.*

Le lecteur qui voudrait dès à présent s'exercer à la résolution des problèmes peut se transporter à la page 71, et suivre ensuite jusqu'au problème de la page 79.

Résolution de deux équations du 1er degré à deux inconnues.

80. Quand on a à résoudre deux équations du 1er degré, qui contiennent deux inconnues, le moyen qu'on emploie consiste principalement à *éliminer* l'une de ces deux inconnues, c'est-à-

dire, à déduire des deux équations données une nouvelle équation qui ne renferme plus cette inconnue, et de laquelle on puisse tirer la valeur de l'inconnue restante. Plusieurs méthodes peuvent être employées pour effectuer cette *élimination* : je vais les exposer successivement.

81. Première méthode, *dans laquelle l'élimination est faite par* comparaison. L'explication sera plus facile en prenant un exemple. Soient les deux équations

$$[1] \qquad 3y - 7x = 4,$$
$$[2] \qquad 2y + 5x = 22.$$

Supposons pour un moment qu'on soit assuré qu'il existe deux nombres qui, mis à la place de x et de y, satisfassent en même temps à ces deux équations, et considérons x et y comme représentant ces nombres eux-mêmes : alors on pourra raisonner sur ces équations comme si elles étaient des égalités actuelles. Or ces équations donnent

$$[3] \qquad y = \frac{7x + 4}{3},$$

$$[4] \qquad y = \frac{22 - 5x}{2};$$

et comme ces valeurs doivent être égales, on a

$$[5] \qquad \frac{7x + 4}{3} = \frac{22 - 5x}{2}.$$

Voici donc une équation du 1er degré à laquelle l'inconnue x doit satisfaire, et par conséquent on en pourra tirer la valeur de cette inconnue. Par les procédés établis dans le paragraphe précédent, n° 74, on aura

$$14x + 8 = 66 - 15x,$$
$$29x = 58,$$
$$x = 2.$$

En mettant cette valeur de x dans une des deux expressions de y, qui sont écrites plus haut, on connaîtra la valeur de cette inconnue. Il est d'ailleurs évident qu'en faisant cette substitution dans l'une ou dans l'autre, on doit trouver le même résultat : car la valeur de x, ayant été déduite de l'équation [5], doit rendre

identiques les deux membres de cette équation, lesquels sont précisément les deux expressions de y dont il s'agit. La substitution étant faite dans la première, il vient

$$y=\frac{7\times 2+4}{3}=\frac{18}{3}=6.$$

Ainsi les valeurs des deux inconnues sont

$$x=2, y=6.$$

Par la manière dont ces valeurs ont été trouvées, on est certain qu'elles conviennent aux deux équations données. En effet, elles conviennent évidemment aux deux équations [3] et [4]; et comme celles-ci, en chassant les dénominateurs et en transposant dans le premier membre les termes en x, ramènent aux proposées [1] et [2], il s'ensuit que les valeurs de x et de y doivent aussi satisfaire à ces équations.

Cette dernière remarque était nécessaire : car, pour arriver aux valeurs $x=2, y=6$, on a supposé qu'il y avait des valeurs de x et de y qui vérifiaient les deux équations données, et rien ne prouvait que cette supposition fût vraie. Il restait donc encore à examiner si les valeurs trouvées, pour x et y, satisfaisaient réellement aux deux équations.

Dans cette vue, on aurait pu substituer ces valeurs immédiatement dans les équations, afin de voir si elles les rendent identiques. C'est en effet ce qui a lieu : car, par cette substitution, la première devient

$$3\times 6-7\times 2=4, \text{ ou } 18-14=4, \text{ ou } 4=4;$$

et la seconde,

$$2\times 6+5\times 2=22, \text{ ou } 12+10=22, \text{ ou } 22=22.$$

Toutefois on doit comprendre qu'une pareille vérification ne prouve rien pour le cas où l'on aurait d'autres équations à résoudre; par conséquent une démonstration, fondée sur le procédé même qui sert à trouver les valeurs des inconnues, était indispensable pour prouver que ces valeurs doivent toujours satisfaire aux équations.

82. **Deuxième méthode**, *dans laquelle l'élimination est faite par* **substitution**. Reprenons les deux équations

$$[6] \qquad 3y - 7x = 4,$$
$$[7] \qquad 2y + 5x = 22;$$

et considérons toujours x et y comme représentant deux nombres qui satisfont à ces équations. De la première, on tire

$$[8] \qquad y = \frac{7x+4}{3}.$$

On peut donc, dans la seconde équation, remplacer y par cette valeur; et cette équation, ne renfermant plus alors que la seule inconnue x sans cesser d'être du 1er degré, servira à déterminer cette inconnue. La substitution donne

$$[9] \qquad 2 \times \frac{7x+4}{3} + 5x = 22;$$

et de cette équation on déduit successivement

$$14x + 8 + 15x = 66,$$
$$29x = 58,$$
$$x = 2.$$

Cette valeur étant mise dans celle de y, qui a été tirée de la première équation, on trouve encore

$$y = \frac{7 \times 2 + 4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

On a donc, pour x et y, les mêmes valeurs que tout-à-l'heure. Mais il faut s'assurer que ce nouveau procédé doit toujours donner des valeurs qui conviennent aux équations proposées.

Remarquons d'abord que la valeur $y=6$ ayant été trouvée en faisant $x=2$ dans l'équation [8], il s'ensuit que les valeurs $x=2$, $y=6$, doivent satisfaire à cette équation. Or, en multipliant par 3 et remettant $7x$ dans le premier membre, cette équation devient l'équation [6]; donc déjà les valeurs $x=2$, $y=6$, satisfont à l'équation [6].

Ensuite, la valeur $x=6$ doit vérifier l'équation [9] d'où elle est déduite. Mais, dans cette équation, la fraction qui est multi-

pliée par 2, n'étant autre chose que le deuxième membre de l'équation [8], doit devenir égale à 6 quand on remplace x par 2; donc il revient tout-à-fait au même de faire $x=2$ dans l'équation [9], ou bien de faire $x=2$ et $y=6$ dans l'équation [7]; par conséquent cette dernière se trouve aussi vérifiée par les valeurs $x=2, y=9$.

83. TROISIÈME MÉTHODE, *dans laquelle l'élimination est faite par* RÉDUCTION. Il faut d'abord, par des préparations convenables, amener chacune des deux équations à la forme

$$ax+by=c.$$

Alors on voit que si, dans les deux équations, l'une des inconnues avait le même coefficient, on ferait disparaître cette inconnue en retranchant, membre à membre, les équations l'une de l'autre, ou bien en les ajoutant, selon que les termes qui contiennent cette inconnue seraient de même signe ou de signes contraires. De cette manière, on formerait une nouvelle équation qui ne renfermerait plus que l'autre inconnue, et on en pourrait tirer la valeur de cette inconnue. Or, il est évident qu'on amènera toujours une inconnue à avoir le même coefficient dans les deux équations, en multipliant les deux membres de chaque équation par le coefficient dont cette inconnue est affectée dans l'autre équation : ainsi, voilà un nouveau moyen de résoudre les deux équations.

Pour exemple, reprenons encore les équations

$$3y-7x=4,$$
$$2y+5x=22.$$

Si on veut d'abord connaître x, on multipliera les deux membres de la première équation par 2, coefficient de y dans la seconde, et les deux membres de la seconde par 3, coefficient de y dans la première. Par ces multiplications il vient

$$6y-14x=8,$$
$$6y+15x=66;$$

et en retranchant ces équations l'une de l'autre, membre à membre, on a

$$29x=58, \quad \text{d'où} \quad x=2.$$

Pour avoir y, on pourrait substituer cette valeur dans l'une

des deux équations proposées. Mais si on veut trouver y par le même procédé que x, on multipliera la première de ces équations par 5, coefficient de x dans la deuxième, et la deuxième par 7, coefficient de x dans la première. Par là, elles deviennent

$$15y - 35x = 20,$$
$$14y + 35x = 154;$$

puis en ajoutant celles-ci, membre à membre, on a

$$29y = 174, \text{ d'où } y = 6.$$

On retrouve donc encore les mêmes valeurs, $x=2$ et $y=6$, que par les deux autres procédés.

Cette troisième méthode est, comme on voit, assez simple; mais il importe, comme dans les deux précédentes, de faire voir que les valeurs de x et de y, auxquelles elle conduit, ne peuvent pas manquer de satisfaire aux deux équations. Comme ceci exige des explications qu'il serait difficile de suivre sur des équations particulières, je représenterai les deux équations d'une manière générale par

$$[a] \quad \begin{cases} A = B, \\ A' = B'. \end{cases}$$

Cela posé, si on les multiplie respectivement par des nombres quelconques m et n, et qu'ensuite on les ajoute, on a $mA + nA' = mB + nB'$, et je vais montrer qu'on peut remplacer par cette équation l'une des deux proposées, la deuxième, par exemple : c'est-à-dire que les deux équations $[a]$ ont absolument les mêmes solutions que celles-ci

$$[b] \quad \begin{cases} A = B \\ mA + nA' = mB + nB' \end{cases}$$

En effet, si de la dernière on retranche le produit de la précédente par m, il vient $nA' = nB'$, ou, en divisant par n, $A' = B'$. Donc, de même que le système des équations $[b]$ est une conséquence du système $[a]$, réciproquement le système $[a]$ est une conséquence du système $[b]$. Donc les valeurs de x et de y qui conviennent au dernier ne peuvent pas manquer de convenir aussi au premier. Or, si les multiplicateurs m et n sont choisis, comme on le fait dans la 3e méthode, de manière que l'équa-

tion $mA+nA'=mB+nB'$ ne contienne plus y, si de cette équation on tire la valeur de x, et si on la substitue dans l'équation $A=B$ pour en tirer ensuite la valeur de y; il est évident qu'on aura ainsi des valeurs de x et de y qui conviendront aux équations [b] : donc elles conviendront aussi aux proposées [a].

Maintenant il faut encore justifier le procédé dans lequel on calcule la seconde inconnue de la même manière que la première. Supposons, à cet effet, qu'après avoir déduit des équations [a], l'équation $mA+nA'=mB+nB'$, on les multiplie de nouveau par d'autres nombres m' et n', et qu'on les ajoute encore. On aura une nouvelle équation $m'A+n'A'=m'B+n'B'$; et je dis qu'on peut aussi considérer les équations [a] comme des conséquences de celles-ci

$$[c] \qquad \begin{cases} mA+nA'=mB+nB', \\ m'A+n'A'=m'B+n'B'. \end{cases}$$

Pour le montrer, multiplions ces dernières respectivement par n' et n, puis retranchons-les l'une de l'autre : A' et B' disparaissent, et il vient

$$(mn'-nm')A=(mn'-nm')B, \quad \text{ou} \quad A=B.$$

Pareillement, en multipliant les équations [c] par m' et m, et en retranchant la première de la seconde, il vient

$$(mn'-nm')A'=(mn'-nm')B', \quad \text{ou} \quad A'=B'.$$

Ainsi, les deux systèmes [a] et [c] sont réciproquement une conséquence l'un de l'autre. Or, on peut choisir les multiplicateurs m, n, m', n' de telle sorte que la première équation [c] ne renferme plus y, et que la deuxième ne renferme plus x. Il est donc évident que les valeurs qu'on en tire immédiatement, pour x et y, doivent convenir aux proposées. C'est ce qui restait à démontrer.

84. Remarques. J'ai supposé qu'on obtenait les équations [c] par voie d'addition. Cette manière d'opérer comprend celle où l'on emploierait la soustraction : car si, par exemple, après avoir multiplié les équations [a] par m et n, on voulait retrancher la 2e de la 1re, cela reviendrait évidemment à les ajouter après les avoir multipliées par m et $-n$.

J'ai aussi supposé tacitement que $mn'-nm'$ n'était pas zéro. Si

cela était, les équations dans lesquelles la quantité $mn'-nm'$ était facteur des deux membres, se réduiraient identiquement à $o=o$, et l'on n'en pourrait plus conclure $A=B$, $A'=B'$. Il suit de là que, pour remplacer les équations [a] par les équations [c], il faut choisir m, n, m', n' de manière qu'on n'ait pas $mn'-nm'=o$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$: c'est donc à dire que les nombres m et n ne doivent pas être proportionnels à m' et n'. Or, quand on fait l'élimination par RÉDUCTION (83), on prend pour m et n les coefficiens de y dans les équations proposées, et pour m' et n' ceux de x : si donc les coefficiens de x sont proportionnels à ceux de y, la méthode semblera en défaut. Cette difficulté sera éclaircie plus tard (131).

L'opération par laquelle on rend égaux les coefficiens de l'inconnue qu'on fait disparaître est parfaitement analogue à la réduction des fractions au même dénominateur, et elle présente les mêmes simplifications. Par exemple, si les équations étaient

$$21y+20x=165,$$
$$77y-30x=295,$$

comme les coefficiens de y se décomposent en 7×3 et 7×11, on les rendrait égaux en multipliant les équations respectivement par 11 et par 3. Semblablement, ceux de x deviendraient égaux en multipliant les équations par 3 et par 2.

Les deux premières méthodes amènent le plus souvent des dénominateurs qu'il faut faire disparaître. Cet inconvénient n'a pas lieu dans la troisième ; et même il est à observer qu'avec un peu d'habitude on pourra, quand les coefficiens seront peu compliqués, effectuer d'un seul coup, comme si c'était une opération unique, et les multiplications qui réduisent à l'égalité les coefficiens d'une inconnue, et l'addition ou la soustraction qui fait disparaître cette inconnue.

Quelque méthode qu'on emploie, il est clair qu'après l'élimination d'une inconnue, l'équation résultante doit toujours donner la même valeur pour l'inconnue restante. Il suit de là que si, en faisant usage d'un procédé d'élimination, on ramène l'équation résultante à la forme $ax=b$, a et b étant des quantités connues,

on sera sûr que tout autre procédé donnera ou la même équation, ou une équation qui ne différera de celle-là que par un facteur commun à ses deux membres : autrement, on n'aurait pas la même valeur pour x.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du 1er degré, contenant un pareil nombre d'inconnues.

85. Soient les équations

[1] $4x - 3y + 2z = 40,$
[2] $5x + 9y - 7z = 47,$
[3] $9x + 8y - 3z = 97.$

Par l'une des trois méthodes connues, on pourra éliminer l'inconnue z entre la première équation et chacune des deux autres. Si on emploie l'élimination par réduction, il vient sur-le-champ

[4] $38x - 3y = 374,$
[5] $30x + 7y = 314.$

Les valeurs de x et de y devront satisfaire à ces deux équations et par conséquent on saura les déterminer.

Si entre ces deux équations on élimine y, toujours par réduction, on trouve

$$356x = 3560, \text{ d'où } x = 10.$$

En mettant cette valeur dans l'équation [4], on aura

$$380 - 3y = 374, \text{ d'où } y = 2.$$

Enfin, en portant les valeurs de x et de y dans l'équation [1], on a

$$40 - 6 + 2z = 40, \text{ d'où } z = 3.$$

Donc les valeurs des trois inconnues seront $x=10$, $y=2$, $z=3$.

Il est bien évident que ces valeurs sont les seules qui puissent satisfaire aux trois équations proposées ; mais est-il certain qu'elles y satisfassent? Pour s'en assurer, il faut observer que, par la manière dont ces valeurs ont été trouvées, on est sûr qu'elles doivent satisfaire aux équations [1], [4], [5]. Mais, d'après ce qui a été

exposé n° 83, l'équation [2] est une conséquence des équations [1] et [4]; et l'équation [3] est une conséquence de [1] et [5] : donc les valeurs de x, y, z, qui vérifient les équations [1], [4], [5], ne peuvent pas manquer de vérifier aussi les équations [1], [2], [3].

86. En généralisant le procédé qui vient d'être employé pour trois équations, on peut établir la règle suivante :

Pour résoudre plusieurs équations du 1er degré en nombre égal aux inconnues, éliminez une inconnue entre l'une de ces équations et chacune des autres : vous aurez ainsi de nouvelles équations, qui renfermeront une inconnue de moins, qui seront en nombre égal à celui des inconnues restantes, et qui seront encore du 1er degré. Opérez sur ces équations comme sur les proposées, c'est-à-dire, éliminez encore une inconnue entre l'une de ces nouvelles équations et chacune des autres. En continuant toujours de même, vous parviendrez à une équation du 1er degré qui ne renfermera plus qu'une seule inconnue. Alors, de cette dernière équation vous tirerez la valeur de cette inconnue; puis, remontant aux équations précédentes, vous déterminerez successivement les valeurs des autres inconnues.

87. Quand on apercevra des facteurs communs à tous les termes d'une équation, il ne faut pas oublier de les supprimer : par là on rendra les calculs plus simples. Soient, par exemple, les équations

$$10x - 20y + 30z = 60,$$
$$8x + 12y - 16z = 80,$$
$$27x - 18y + 45z = 234.$$

On voit que la 1re peut se diviser par 10, la 2e par 4, et la 3e par 9. En conséquence, au lieu des équations ci-dessus, on aura à résoudre les suivantes :

$$x - 2y + 3z = 6,$$
$$2x + 3y - 4z = 20,$$
$$3x - 2y + 5z = 26.$$

L'élimination de x, entre la 1re de ces équations et les deux autres, donne ces deux-ci

$$7y - 10z = 8,$$
$$4y - 4z = 8 :$$

ou bien, si on simplifie la dernière en la divisant par 4,

$$7y - 10z = 8,$$
$$y - z = 2.$$

L'élimination de y entre celles-ci donne

$$3z = 6, \text{ d'où } z = 2.$$

On substitue cette valeur dans l'équation $y-z=2$, et il vient

$$y - 2 = 2, \text{ d'où } y = 4.$$

Enfin on met les valeurs de y et de z dans l'équation $x-2y+3z=6$, et l'on a

$$x - 8 + 6 = 6, \text{ d'où } x = 8.$$

88. Un cas doit être prévu ici parce qu'il embarrasse quelquefois les commençans : c'est celui où toutes les inconnues n'entrent pas dans chacune des équations. La méthode ne change pas pour cela ; seulement il y aura quelques éliminations de moins à effectuer.

Comme exemple, prenons les quatre équations

$$7u - 13z = 87,$$
$$3u + 14x = 57,$$
$$10y - 3x = 11,$$
$$2x - 11z = 50.$$

Il est visible qu'en éliminant l'inconnue u entre les deux premières, l'équation résultante ne contiendra que les deux inconnues x et z; par conséquent, en la joignant à la dernière, on aura deux équations qui feront connaître ces deux inconnues. Ces deux équations sont

$$98x + 39z = 138,$$
$$2x - 11z = 50.$$

Pour éliminer x, multiplions la dernière équation par 49, et retranchons-la de la précédente, il vient

$$578z = -2312, \text{ d'où } z = -4.$$

Substituons cette valeur dans l'équation $2x-11z=50$, on a

$$2x + 44 = 50, \text{ d'où } x = 3.$$

On voit par là que les conventions de l'algèbre constituent une véritable langue, dans laquelle on peut traduire l'énoncé d'un problème, et représenter avec la plus exacte fidélité toutes les relations de grandeur qu'ont entre elles les quantités connues et les quantités inconnues. Établir ces relations par des équations, cela s'appelle *mettre le problème en équation*, ou *le traduire en langage algébrique*. Les réflexions précédentes serviront de guide pour y parvenir.

On peut aussi les réduire à cette règle générale : *Après avoir choisi la quantité ou les quantités qu'on prend pour inconnues, on les représente par des lettres; puis on indique, à l'aide des signes algébriques, les opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier les valeurs des inconnues, si elles étaient données.*

Mais, pour bien comprendre toute l'utilité de cette règle, les commençans doivent l'appliquer à un grand nombre d'exemples; et bientôt, par cet exercice, ils acquerront une sagacité qui leur tiendra lieu de préceptes.

Souvent une question, qui au premier aspect présente plusieurs inconnues, se résout cependant avec un nombre moindre d'inconnues, et quelquefois même avec une seule. Ce dernier cas, par exemple, arrive quand on reconnaît tout d'abord que l'une des inconnues étant trouvée, les autres pourraient s'en déduire immédiatement par des opérations très simples, par une addition, par une soustraction, etc. C'est ce qu'on verra dans quelques uns des problèmes dont je vais développer les solutions.

Exemples de problèmes à une seule inconnue.

92. PROBLÈME I. *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à* 36, *et la différence égale à* 10.

Je prendrai pour inconnue le plus grand des deux nombres cherchés, et je le désignerai par x. Puisque la différence des deux nombres doit être 10, le plus petit sera désigné par $x-10$; et comme la somme de ces deux nombres doit être égale à 36, on posera l'équation

$$x+x-10=36.$$

Elle revient à celle-ci $2x = 46$,
d'où $x = 23$.

Donc le plus grand des deux nombres est 23, et par suite le plus petit est 23—10 ou 13. En effet, on a 23+13=36.

Solution générale. Le problème peut s'énoncer généralement en ces termes: *Trouver deux quantités dont on connaît la somme et la différence.*

Ici il y a deux quantités connues qui doivent rester quelconques, et il faudra aussi les représenter par des lettres. Je désignerai par a la somme donnée, par b la différence, et toujours par x la plus grande des quantités cherchées. La plus petite s'exprimera alors par $x—b$, et l'équation du problème sera

$$x + x - b = a,$$

ou bien $$2x = a + b;$$

donc $$x = \frac{a+b}{2}.$$

Voici l'expression de la plus grande partie. Il faut en retrancher b pour avoir l'autre partie, et il vient

$$x - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Ainsi, pour calculer les deux quantités inconnues, on a les formules

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad x - b = \frac{a-b}{2}.$$

Elles peuvent aussi s'écrire de cette manière

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \quad x - b = \frac{a}{2} - \frac{b}{2};$$

et sous cette forme elles font voir que, *quand on connaît la somme et la différence de deux quantités, la plus grande est est égale à la demi-somme plus la demi-différence, et la plus petite est égale à la demi-somme moins la demi-différence.*

Supposez que la somme connue soit 36 et que la différence soit 20 : on aura

la plus grande quantité $= \frac{36}{2} + \frac{10}{2} = 18 + 5 = 23$,

et la plus petite ......$= \frac{36}{2} - \frac{10}{2} = 18 - 5 = 13$.

Ces valeurs sont celles qui conviennent à l'énoncé particulier qui a été proposé d'abord.

93. PROBLÈME II. *Deux fontaines versent uniformément leur eau dans le même bassin, et l'on connaît le temps que chacune, coulant seule, met à remplir ce bassin : on demande combien de temps il leur faudrait pour le remplir, si elles coulaient ensemble.*

Je représente par a le nombre d'heures qu'il faut à la première fontaine, coulant seule, pour remplir le bassin ; par b, celui qu'il faut à la seconde ; par x, celui qu'il faut aux deux fontaines coulant ensemble.

Pour vérifier le temps x, s'il était donné, je chercherais la partie du bassin que remplit la première fontaine pendant ce temps ; celle que remplit la seconde pendant ce même temps ; et les deux parties réunies devraient donner la capacité entière du bassin.

Or, en prenant cette capacité pour unité, les parties de cette capacité, que fournissent les deux fontaines dans le temps x, sont les quatrièmes termes des proportions

$$a : x :: 1 : \frac{x}{a}, \quad b : x :: 1 : \frac{x}{b};$$

donc, puisque ces parties réunies doivent donner le bassin entier, on aura l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Si on chasse les dénominateurs, il vient

$$bx + ax = ab, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Pour prendre un cas particulier, supposons que la première fontaine mette $1^{h}\frac{1}{2}$ à remplir le bassin, et que la seconde mette $2^{h}\frac{1}{4}$. Il faudra, dans la valeur de x, faire $a = 1\frac{1}{2}$ et $b = 2\frac{1}{4}$. Alors cette valeur devient

$$x = \frac{1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{9}{4}}{\frac{3}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}.$$

94. PROBLÈME III. *Un père ordonne par son testament que l'aîné de ses enfans prendra, sur le bien qu'il leur laisse, une somme a*

plus la n^{me} *partie du reste ; que le second prendra, après que l'aîné aura prélevé sa part, une somme* 2a *plus la* n^{me} *partie du reste ; que le troisième prendra, après le prélèvement de ces deux parts, la somme* 3a *plus la* n^{me} *partie du reste ; et ainsi de suite. Or, il arrive que tous les enfans se trouvent ainsi également partagés et que le bien du père est tout-à-fait épuisé. On demande quel est le bien du père, la part de chaque enfant, et le nombre des enfans.*

Si le bien du père était connu, on pourrait aisément former la part du 1er enfant, et puisqu'ils sont également partagés, elle serait celle de tous les autres. Ensuite, en divisant le bien du père par cette part, on aurait le nombre des enfans. C'est pourquoi je prendrai pour inconnue le bien du père.

Si cette inconnue était donnée, pour la vérifier, on formerait la part de chaque enfant, d'après la loi qu'indique l'énoncé ; et quand on arriverait à celle du dernier enfant, le bien du père devrait être entièrement épuisé, et toutes les parts devraient être égales. Mais il est évident que la seule condition d'égalité entre la 1re part et la 2e suffira pour déterminer la valeur de l'inconnue ; il restera donc encore, après l'avoir trouvée, à examiner si les autres conditions sont remplies.

Comme la solution du problème, considérée dans toute sa généralité, pourrait paraître trop difficile, je l'expliquerai d'abord sur des nombres particuliers. Par exemple, je supposerai que *le premier enfant prenne sur le bien du père une somme de* 1000 *fr., plus le* 5e *de ce qui reste ; que le deuxième enfant prenne, après que la première part aura été prélevée, une somme de* 2000 *fr., plus le* 5e *du reste ; ainsi de suite.*

Soit x le bien du père. Après avoir prélevé 1000 fr. le reste est $x-1000$; par conséquent la part du 1er enfant est

$$1000+\frac{x-1000}{5} \text{ ou } \frac{4000+x}{5} \dots \text{ 1}^{\text{re}} \text{ part.}$$

En ôtant cette part du bien total x, il reste à partager entre les autres enfans

$$x-\frac{4000+x}{5} \text{ ou } \frac{4x-4000}{5}.$$

Sur cela le 2[e] enfant doit prendre 2000 fr. plus le 5[e] du reste. Or, après avoir pris 2000 fr., le reste est

$$\frac{4x - 4000}{5} - 2000 \quad \text{ou} \quad \frac{4x - 14000}{5};$$

par conséquent, en ajoutant à 2000 le 5[e] de ce reste, on aura la part du 2[e] enfant, savoir :

$$2000 + \frac{4x - 14000}{25} \quad \text{ou} \quad \frac{36000 + 4x}{25} \ldots\ 2^{e} \text{ part.}$$

Sans s'occuper des autres enfans, on peut dès à présent former l'équation du problème. En effet, l'énoncé indiquant qu'ils sont tous également partagés, il faut que les deux premières parts soient égales; et de là résulte l'équation

$$[1] \qquad \frac{4000 + x}{5} = \frac{36000 + 4x}{25}.$$

En chassant les dénominateurs, il vient

$$20000 + 5x = 36000 + 4x,$$

d'où

$$x = 16000.$$

Si on remplace x par cette valeur dans l'expression de la 1[re] part, on aura la valeur de cette part

$$\frac{4000 + 16000}{5} = 4000;$$

et, puisque toutes les parts doivent être égales, en divisant le bien du père par cette part, le quotient 4 sera le nombre des enfans.

Donc le bien du père = 16000,
la part de chaque enfant = 4000,
et le nombre des enfans = 4.

Il se présente ici une observation importante. La valeur de x a été déduite de l'équation [1], qui exprime seulement l'égalité de la 2[e] part à la 1[re] : il reste donc encore à examiner si les deux autres parts lui sont aussi égales. Or, en défalquant de l'héritage entier les deux premières parts, qui font ensemble 8000, il reste 8000 fr.; et, sur ces 8000 fr., le 3[e] enfant doit prendre 3000 fr. plus le 5[e] du reste : donc il aura

$$3000 + \frac{8000 - 3000}{5} = \frac{20000}{5} = 4000.$$

Ensuite, cette part étant ôtée de 8000 fr., il reste 4000 fr., sur quoi le 4e enfant doit prendre 4000 fr. et le 5e du reste. Il aura donc aussi 4000 fr., et l'héritage sera épuisé. Ainsi toutes les vérifications sont satisfaisantes.

Exposons maintenant la solution générale. En nommant toujours x le bien du père, on aura

$$1^{re} \text{ part} = a + \frac{x-a}{n};$$

et, après le prélèvement de cette part, ce qui reste du bien est

$$x - a - \frac{x-a}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)(x-a)}{n}.$$

Par suite, on aura

$$2^e \text{ part} = 2a + \frac{(n-1)(x-a) - 2an}{n^2}.$$

Donc, en égalant la 1re part à la 2e, on aura l'équation

$$a + \frac{x-a}{n} = 2a + \frac{(n-1)(x-a) - 2an}{n^2}.$$

Après l'évanouissement des dénominateurs, elle devient celle-ci

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - x - an + a - 2an,$$

d'où le bien du père $\quad x = an^2 - 2an + a,$

ou, autrement, $\quad x = a\,(n-1)^2.$

Au moyen de cette valeur, on peut calculer la 1re part, qui sera aussi celle de chaque enfant. On a donc

$$\text{part d'un enfant} = a + \frac{x-a}{n} = a + \frac{an^2 - 2an + a - a}{n}$$
$$= a + an - 2a = a\,(n-1).$$

Enfin, en divisant le bien total par cette part, on trouve

$$\text{le nombre des enfans} = n - 1.$$

Mais l'observation faite plus haut se reproduit ici. Par la manière dont on a établi l'équation du problème, on est bien sûr que la 2e part sera égale à la 1re; mais il reste à vérifier s'il en est de même de toutes les autres.

Du bien entier $a(n-1)^2$ ôtez la part du 1[er] enfant, il reste

$$a(n-1)^2-a(n-1)=a(n-1)(n-1-1)=a(n-1)(n-2).$$

La part du 2[e] enfant sera donc

$$2a+\frac{a(n-1)(n-2)-2a}{n}=\frac{a(n-1)(n-2)+2a(n-1)}{n}$$
$$=\frac{a(n-1)(n-2+2)}{n}=a(n-1).$$

Elle est égale à la première, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Du bien entier ôtez les deux premières parts, il restera

$$a(n-1)^2-2a(n-1)=a(n-1)(n-1-2)=a(n-1)(n-3).$$

Par suite, la part du 3[e] enfant sera

$$3a+\frac{a(n-1)(n-3)-3a}{n}=\frac{a(n-1)(n-3)+3a(n-1)}{n}$$
$$=\frac{a(n-1)(n-3+3)}{n}=a(n-1).$$

Elle est égale aux précédentes, et par conséquent le reste du bien, en défalquant les trois premières parts, sera

$$a(n-1)^2-3a(n-1)=a(n-1)(n-1-3)=a(n-1)(n-4).$$

En continuant ainsi, on voit clairement que les calculs s'effectueront toujours de telle sorte que toutes les parts seront égales à $a(n-1)$. Par conséquent, il est clair aussi qu'après avoir formé $n-1$ parts, le bien sera totalement épuisé : car la somme de toutes ces parts sera $a(n-1)\times(n-1)$, ou $a(n-1)^2$, ce qui est la valeur du bien à partager.

Il peut se faire qu'on éprouve de la difficulté à comprendre que les calculs doivent toujours amener des parts égales; mais en calculant encore quelques parts, les lois selon lesquelles s'effectuent les réductions ne pourront point échapper. Au reste, voici un raisonnement qui ne peut laisser aucun doute.

Admettons qu'après avoir calculé un certain nombre de parts, on les ait toujours trouvées égales entre elles, et examinons si la part suivante leur sera aussi égale. Soit k le nombre des parts déjà

calculées, lesquelles sont toutes égales à $a(n-1)$. Ce qui reste du bien total, en défalquant toutes ces parts, est

$$a(n-1)^2 - ka(n-1) = a(n-1)(n-1-k).$$

La part suivante sera

$$(k+1)a + \frac{a(n-1)(n-1-k)-(k+1)a}{n}$$
$$= \frac{a(n-1)(n-1-k)+a(k+1)(n-1)}{n}$$
$$= \frac{a(n-1)(n-1-k+k+1)}{n} = a(n-1);$$

et l'on voit que cette part est égale aux précédentes.

Remarquez maintenant que k est un nombre entier quelconque; donc si on fait $k=2$, on conclura que la 2e part est égale à la 1re; si on fait $k=3$, on conclura que la 3e part est égale aux deux premières; et ainsi de suite. Donc toutes les parts seront égales.

Exemples de problèmes à plusieurs inconnues.

95. Problème IV. *Un entrepreneur a payé 105 fr. pour 17 journées de maçon et 10 journées de manœuvre; et plus tard, sans que le travail ait changé de prix, il a payé 84 fr. pour 10 journées de maçon et 17 journées de manœuvre. Combien gagnait par jour le maçon, et combien le manœuvre?*

Appelons x le gain du maçon, et y celui du manœuvre. Pour 17 journées de maçon et 10 journées de manœuvre, l'entrepreneur doit $17x+10y$; donc, d'après l'énoncé, on a $17x+10y=105$.

Pour 10 journées de maçon et 17 journées de manœuvre, il doit $10x+17y$; donc, d'après l'énoncé, on a $10x+17y=84$.

Ainsi, les deux équations à résoudre sont

$$17x+10y=105,$$
$$10x+17y=84;$$

et pour cela on pourra employer celle des trois méthodes qu'on voudra.

1°. Si on emploie l'*élimination par comparaison*, on aura

$$y=\frac{105-17x}{10},\ y=\frac{84-10x}{17};$$
$$\frac{105-17x}{10}=\frac{84-10x}{17},$$
$$1785-289x=840-100x,$$
$$100x-289x=840-1785,$$
$$-189x=-945,$$
$$x=\frac{945}{189}=5.$$

En portant cette valeur dans la 1re valeur de y, il vient

$$y=\frac{105-85}{10}=2.$$

Ainsi, le maçon gagnait 5 fr., et le manœuvre gagnait 2 fr.

2°. Si on fait l'*élimination par substitution*, on a, en tirant la 1re équation la valeur de y,

$$y=\frac{105-17x}{10},$$
$$10x+\frac{17(105-17x)}{10}=84,$$
$$100x+1785-289x=840,$$
$$-189x=-945,$$
$$x=\frac{945}{189}=5;$$

et par suite on a encore, comme tout-à-l'heure,

$$y=\frac{105-85}{10}=2.$$

3°. Enfin servons-nous de l'*élimination par réduction*. Po éliminer y, on multipliera les équations respectivement par 17 par 10, puis on retranchera la 2e de la 1re, ce qui donne

$$289x-100x=1785-840,$$
$$189x=945,$$
$$x=\frac{945}{189}=5.$$

Pour éliminer x, on multipliera la 1re équation par 10, la 2e par 17; et, par la soustraction, on aura

$$289y - 100y = 1428 - 1050,$$
$$189y = 378,$$
$$y = \frac{378}{189} = 2.$$

On aurait pu encore trouver y en substituant la valeur $x = 5$ dans l'une des équations du problème, dans la 1re, par exemple. On a ainsi $85 + 10y = 105$, d'où $y = 2$, comme ci-dessus.

96. PROBLÈME V. *Une personne possède un capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne, qui possède* 10000 *fr. de plus que la première et qui fait valoir son capital à* 1 *de plus p.* 100, *a un revenu plus grand de* 800 *fr. Une troisième, qui possède* 15000 *fr. de plus que la première et qui fait valoir son bien à* 2 *de plus p.* 100, *a un revenu plus grand de* 1500 *fr. On demande les biens des trois personnes, et à quel intérêt chacune fait valoir son bien.*

Nommons x le capital de la première personne, et y l'intérêt p. 100 qu'elle en retire. D'après l'énoncé même, la seconde personne aurait un capital égal à $x + 10000$, qu'elle ferait valoir à l'intérêt de $y + 1$ p. 100; et la troisième, un capital égal à $x + 15000$, qu'elle ferait valoir à l'intérêt de $y + 2$ p. 100.

Les revenus que ces trois personnes tirent de leurs capitaux se trouveraient par les proportions

$$100 : x :: y : \frac{xy}{100},$$
$$100 : x + 10000 :: y + 1 : \frac{(x+10000)(y+1)}{100},$$
$$100 : x + 15000 :: y + 2 : \frac{(x+15000)(y+2)}{100}.$$

Mais, d'après l'énoncé, la seconde personne reçoit 800 fr. de revenu de plus que la première, et la troisième 1500 fr. de plus; donc on a les deux équations

$$\frac{(x+10000)(y+1)}{100} = \frac{xy}{100} + 800,$$
$$\frac{(x+15000)(y+2)}{100} = \frac{xy}{100} + 1500.$$

Je chasse les dénominateurs, j'effectue les multiplications, je supprime le terme xy qui est commun aux deux membres de chaque équation, et je fais passer tous les termes connus dans les seconds membres. Alors ces équations deviennent

$$x + 10000y = 70000,$$
$$2x + 15000y = 120000.$$

Pour éliminer x, du double de la 1re équation je retranche la 2e: il vient

$$5000y = 20000, \quad \text{d'où} \quad y = 4.$$

Puis, pour avoir x, je substitue cette valeur dans la 1re équation, ce qui donne

$$x + 40000 = 70000, \quad \text{d'où} \quad x = 30000.$$

Donc la première personne possède un capital de 30000 fr., qu'elle fait valoir à l'intérêt de 4 p. 100; la deuxième, un capital de 40000 fr., qu'elle fait valoir à l'intérêt de 5 p. 100; et la troisième, un capital de 45000 fr., qu'elle fait valoir à l'intérêt de 6 p. 100.

97. PROBLÈME VI. *On a acheté séparément les charges de trois voitures. La première, qui contenait* 30 *mesures de seigle,* 20 *d'orge et* 10 *de froment, a coûté* 230 *fr. La seconde, qui contenait* 15 *mesures de seigle,* 6 *d'orge et* 12 *de froment, a coûté* 138 *fr. La troisième, qui contenait* 10 *mesures de seigle,* 5 *d'orge et* 4 *de froment, a coûté* 75 *fr. On demande combien coûte la mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment?*

En nommant x, y, z les trois inconnues, il est clair que les équations du problème seront

$$30x + 20y + 10z = 230,$$
$$15x + 6y + 12z = 138,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

On peut simplifier la 1re équation en divisant tous ses termes par 10, et la seconde, en divisant ses termes par 3. En conséquence, au lieu des trois équations ci-dessus, on aura celles-ci

$$3x + 2y + z = 23,$$
$$5x + 2y + 4z = 46,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

En éliminant, par réduction, z entre la 1re équation et les deux autres, il vient

$$7x+6y=46,$$
$$2x+3y=17.$$

En éliminant de la même manière y entre celles-ci, on a

$$3x=12, \quad \text{d'où} \quad x=4.$$

Si on met cette valeur dans l'équation $2x+3y=17$, elle devient

$$8+3y=17, \quad \text{d'où} \quad y=3.$$

Enfin, en substituant les valeurs de x et y dans l'équation $3x+2y+z=23$, on trouve

$$12+6+z=23, \quad \text{d'où} \quad z=5.$$

Donc la mesure de seigle vaut 4 fr., celle d'orge 3 fr., et celle de froment 5 fr.

98. PROBLÈME VII. *Un officier qui commande à trois compagnies, l'une de Suisses, l'autre de Souabes et la troisième de Saxons, veut donner un assaut avec une partie de ses troupes. Il est chargé de partager 901 écus entre les soldats des trois compagnies; mais ceux-ci consentent qu'il soit donné un écu à chaque soldat qui montera à l'assaut, et que le reste soit distribué également entre tous les autres. Or il se trouve que si les Suisses donnent l'assaut, chaque soldat des autres compagnies reçoit $\frac{1}{2}$ écu; que si les Souabes vont à l'assaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{3}$ d'écu; et que si les Saxons donnent l'assaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{4}$ d'écu. On demande de combien d'hommes était chaque compagnie?*

Soit x le nombre des Suisses, y celui des Souabes, z celui des Saxons.

Si les Suisses vont à l'assaut, chacun d'eux recevant un écu, le nombre d'écus qui resterait à distribuer entre les autres serait $901-x$, et par conséquent ce que chacun de ceux-ci recevrait serait $\frac{901-x}{y+z}$.

Si les Souabes montent à l'assaut, ce qui reviendrait à chacun des hommes restans serait $\frac{901-y}{x+z}$.

Enfin, si les Saxons vont à l'assaut, chaque homme restant recevrait $\frac{901-z}{x+y}$.

Or, d'après l'énoncé, ces trois quotiens devraient être respectivement égaux à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; donc les équations du problème sont

$$\frac{901-x}{y+z}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{901-y}{x+z}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{901-z}{x+y}=\frac{1}{4}.$$

En chassant les dénominateurs et transposant, elles deviennent

$$2x+y+z=1802,$$
$$x+3y+z=2703,$$
$$x+y+4z=3604.$$

Par l'élimination de z on trouve

$$x-2y=-901,$$
$$7x+3y=3604.$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne

$$17x=4505,\quad \text{d'où}\quad x=\frac{4505}{17}=265.$$

Cette valeur étant mise dans l'équation $x-2y=-901$, on a

$$265-2y=-901,\quad \text{d'où}\quad y=\frac{1166}{2}=583.$$

Enfin, en remplaçant, dans l'équation $2x+y+z=1802$, x et y par leurs valeurs, on a

$$530+583+z=1802,\quad \text{d'où}\quad z=689.$$

Donc il y avait 265 hommes dans la compagnie suisse, 583 dans la compagnie souabe, et 689 dans la saxonne.

Enoncés de problèmes à résoudre.

99. Comme exercices, je proposerai ici quelques problèmes à résoudre. Jusqu'au problème XIX, ils n'exigent qu'une seule inconnue.

PROBLÈME VIII. *Un maître promet à son domestique, en le prenant à son service,* 200 *fr. par an et un habit. Il le renvoie au bout de* 10 *mois, lui donne* 160 *fr. et lui laisse l'habit. On demande le prix de l'habit.* Réponse : 40 fr.

PROBLÈME IX. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'algèbre qui nous reste, passa dans sa jeunesse le sixième du temps qu'il vécut, un douzième dans l'adolescence, ensuite il se maria, et passa dans cette union le septième de sa vie augmenté de* 5 *ans, avant d'avoir un fils auquel il survécut de* 4 *ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut?* Réponse : 84 ans.

PROBLÈME X. *Un père a* 49 *ans et son fils en a* 11. *Quand l'âge du père ne sera-t-il plus que le triple de celui de son fils?* Réponse : Dans 8 ans.

PROBLÈME XI. *Un père laisse quatre fils et* 8600 *fr. Par son testament, il ordonne que la part de l'aîné soit double de celle du second, moins* 100 *fr., que le second ait trois fois autant que le troisième, moins* 200 *fr., et que le troisième ait quatre fois autant que le quatrième, moins* 300 *fr. Quelles sont les parts des quatre fils?* Réponse : Le 1er fils, 4900 fr.; le 2e, 2500 fr.; le 3e, 900 fr.; le 4e, 300 fr.

PROBLÈME XII. *Un père veut, par son testament, que ses trois fils partagent son bien de la manière suivante : L'aîné,* 3000 *fr. de moins que la moitié de tout l'héritage; le second,* 2400 *fr. de moins que le tiers de tout le bien; le troisième,* 1800 *fr. de moins que le quart du bien. Quel était le bien du père et quelle est la part de chaque héritier?* Réponse : Le père laisse 86400 fr.; le 1er fils reçoit 40200 fr.; le 2e, 26400 fr.; le 3e, 19800 fr.

PROBLÈME XIII. *Un courrier faisant* 5 *lieues en* 2 *heures était parti de Paris depuis* 9 *heures, lorsqu'on a envoyé après lui un*

autre courrier qui faisait 11 *lieues en* 3 *heures. On demande à quelle distance celui-ci a joint le premier?* Réponse : 70 lieues $\frac{5}{7}$.

Problème XIV. *Une montre marquant midi, l'aiguille des minutes se trouve sur celle des heures : à quelle heure se fera la prochaine rencontre?* Réponse : A $1^h\ 5'\frac{5}{11}$.

Problème XV. *Un nombre est composé de trois chiffres; la somme des chiffres est* 13; *le chiffre des unités est triple de celui des centaines; et quand on ajoute* 396 *à ce nombre, on obtient une somme qui est ce nombre renversé : on demande quel est ce nombre?* Réponse : 256.

Problème XVI. *Une personne ayant des jetons dans les deux mains, en prend un de la droite pour l'ajouter à ceux de la gauche, et par là il s'en trouve autant dans l'une que dans l'autre. Si elle en eût fait passer deux de la gauche dans la droite, cette dernière main en aurait contenu le double de ce qui serait resté dans l'autre. Combien y avait-il d'abord de jetons dans chaque main?* Réponse : Il y avait 8 jetons dans la gauche, et 10 dans la droite.

Problème XVII. *Un renard poursuivi par un lévrier a* 60 *sauts d'avance. Il en fait* 9 *pendant que le lévrier n'en fait que* 6; *mais* 3 *sauts du lévrier en valent* 7 *du renard. On demande combien le lévrier doit faire de sauts pour atteindre le renard.* Réponse : 72 sauts.

Problème XVIII. *On a* 32 *kilog. d'eau de mer qui contiennent* 16 *hectog. de sel : combien faut-il y ajouter d'eau douce pour que* 32 *kilog. du nouveau mélange ne contiennent plus que* 2 *hectog. de sel?* Réponse : 224 kilog.

Problème XIX. *Un réservoir, qui est plein d'eau, peut se vider par deux robinets de grandeurs inégales. On ouvre l'un d'eux, et on fait couler le quart de l'eau; puis alors on ouvre l'autre, et on les laisse couler tous les deux. Le réservoir achève de se vider, et emploie pour cela $\frac{5}{4}$ d'heure de plus qu'il n'a fallu au premier robinet pour vider le quart de l'eau. Si on eût ouvert les deux robinets dès le commencement, le réservoir se serait vidé un quart d'heure plus tôt. Combien faudrait-il au*

premier robinet, s'il coulait constamment seul, pour vider le réservoir ? Réponse : 4 heures.

PROBLÈME XX. *Un mulet et un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne, et dit au mulet : Il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge pour que la mienne soit double de la tienne. Le mulet répond : Et moi, si je prends un quintal de ta charge, la mienne sera triple de la tienne. On demande combien de quintaux ils portent chacun.* Réponse : Le mulet porte 2 quintaux $\frac{3}{5}$, et l'âne 2 quintaux $\frac{1}{5}$.

PROBLÈME XXI. *Deux personnes doivent ensemble 870 fr. Elles ont de l'argent toutes deux, mais pas assez chacune pour acquitter seule cette dette commune. Le premier débiteur dit donc au second : Si vous me donnez les $\frac{2}{3}$ de votre argent, je paierai seul la dette sur-le-champ. Le second lui répond qu'il pourrait aussi acquitter seul la dette, si l'autre lui donnait les $\frac{3}{4}$ du sien. On demande combien ils ont l'un et l'autre ?* Réponse : Le 1er débiteur a 580 fr., et le 2e a 435 fr.

PROBLÈME XXII. *Une personne charitable rencontre des pauvres, et veut donner 25 centimes à chacun ; mais il lui manque pour cela 10 centimes. Alors elle ne donne que 20 centimes à chaque pauvre, et il lui reste 25 centimes. Combien avait-elle de monnaie, et quel était le nombre des pauvres ?* Réponse : Elle avait 1 fr. 65 cent., et il y avait 7 pauvres.

PROBLÈME XXIII. *Le testament d'un oncle porte que chacun de ses neveux aura 12000 fr., et chacune de ses nièces 9000 fr., sur la somme de 120000 fr. qu'il leur laisse après sa mort. Par cette disposition il ne reste rien de cette somme. Si au contraire chaque nièce eût eu 12000 fr., et chaque neveu 9000 fr., il serait resté 9000 fr. Trouver le nombre des neveux et des nièces.* Réponse : 7 neveux et 4 nièces.

PROBLÈME XXIV. *Trois frères ont acheté une vigne pour 2000 fr. Le troisième dit qu'il pourrait la payer seul, si le second lui donnait la moitié de son argent ; le second dit que, si l'aîné lui donnait seulement le tiers du sien, il paierait la vigne*

seul; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du troisième pour payer seul la vigne. Combien chacun avait-il d'argent?
Réponse : L'aîné a 1680 fr.; le 2e, 1440 fr.; le 3e, 1280 fr.

PROBLÈME XXV. *Un homme, qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine de trois grandeurs, est convenu de payer pour chaque vase qu'il cassera autant qu'il recevra pour chaque vase qu'il rendra en bon état.*

On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens, et 9 grands; il casse les moyens, rend les autres en bon état, et reçoit 28 fr.

On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands; cette fois il rend les petits et les moyens en bon état, mais il casse les grands, et il reçoit seulement 3 fr.

Enfin, on lui remet 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands; il casse tous ces derniers, et ne reçoit en conséquence que 4 fr.

On demande quel est le prix du transport d'un vase de chaque grandeur?

Réponse : Le prix est de 2 fr. pour les petits, de 3 fr. pour les moyens, et de 4 fr. pour les grands.

CHAPITRE V.

Interprétation et usage des quantités négatives dans les problèmes. De l'impossibilité et de l'indétermination dans le 1er degré. Discussion des problèmes. Des symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$. Remarques sur les équations où il y a des dénominateurs contenant l'inconnue.

Interprétation et usage des quantités négatives dans les problèmes.

100. Pour ne point embarrasser les commençans j'ai laissé de côté certaines particularités fort remarquables qui peuvent se rencontrer dans les équations et dans les problèmes du 1er degré. Je me

propose de les faire connaître dans ce chapitre; et d'abord je parlerai de l'interprétation et de l'usage des quantités négatives dans les problèmes en général Pour être bien comprise, cette importante théorie doit être expliquée sur des exemples.

101. **Problème.** *Un particulier a employé dans l'été un ouvrier pendant* 13 *journées; et dans l'hiver pendant* 17 *journées, pour chacune desquelles il lui donnait* 2 *francs de moins que pour une journée d'été. La première fois, l'ouvrier a subi une retenue de* 22 *francs pour quelques dégats qu'il avait causés; la seconde fois, il a mérité par son zèle une gratification de* 28 *fr.; et cependant il a reçu chaque fois la même somme. Quel est le prix d'une journée d'été?*

Soit x le prix d'une journée d'été. La somme que l'ouvrier a dû recevoir, la première fois, sera exprimée par $13x-22$. Comme il a par journée d'hiver 2 fr. de moins que par journée d'été, la somme qu'il a dû recevoir, la seconde fois, sera exprimée par $17(x-2)+28$. Or, d'après l'énoncé, il reçoit chaque fois la même somme; donc on doit avoir

$$[1] \qquad 17(x-2)+28=13x-22.$$

De là on déduit successivement

$$\begin{aligned} 17x-34+28&=13x-22, \\ 17x-13x&=34-28-22, \\ 4x&=-16, \\ x&=-4. \end{aligned}$$

Ainsi, pour répondre à la question, il faudrait dire que le gain de l'ouvrier, pendant un jour d'été, est -4 fr., ce qui n'offre absolument aucun sens. Il faut donc conclure que l'énoncé renferme des conditions impossibles.

Pour mettre cette conséquence dans tout son jour, remarquons d'abord que les changemens opérés sur l'équation [1], pour arriver à l'équation $x=-4$, n'altèrent point l'inconnue. Or, la dernière est vérifiée en remplaçant x par -4, et ne peut pas l'être autrement; donc il en doit être de même de l'équation [1].

En second lieu, remarquons encore que, s'il existe une valeur de x qui convienne à la question, elle doit nécessairement vérifier

l'équation [1]. Donc, puisque cette vérification ne peut s'opérer que par une valeur négative, on a raison de conclure que la question est impossible.

Mais une observation qui est bien importante, c'est que la valeur négative $x=-4$, devant vérifier l'équation [1], qui est l'expression immédiate des conditions du problème, indique par cela même comment on peut modifier l'énoncé en un autre qui ne renfermera plus aucune impossibilité, et qui, après cette rectification, admettra pour solution la valeur de x déjà trouvée, mais prise positivement. C'est ce qu'on va expliquer.

Dans l'équation [1] remplacez x par $-x$, elle devient

$$[2] \qquad 17(-x-2)+28=-13x-22.$$

Or, soit qu'on mette -4 dans la première, ou 4 dans la seconde, il est évident que les deux substitutions doivent donner exactement le même résultat; donc, puisque la première équation doit être vérifiée par la valeur $x=-4$, la deuxième le sera par la valeur $x=4$. Ainsi toute question dont l'enoncé sera exprimé par l'équation [2] aura pour solution $x=4$. Mais comme il n'en existe aucune qui puisse conduire à ne mettre dans le second membre que des termes négatifs, je changerai tous les signes de cette équation, et je l'écrirai ainsi

$$[3] \qquad 17(x+2)-28=13x+22.$$

Alors, pour que la question proposée admette la solution $x=4$, on voit qu'il suffit de modifier son énoncé de telle manière que *le prix de la journée d'hiver surpasse de 2 fr. celui de la journée d'été; que la somme gagnée dans les 13 jours d'été soit augmentée de 22 fr.*, au lieu d'être diminuée; et qu'au contraire *la somme gagnée pendant les 17 jours d'hiver subisse une retenue de 28 fr.*, au lieu d'un accroissement. De cette manière le nouvel énoncé sera celui-ci :

Un particulier a employé dans l'été un ouvrier pendant 13 journées; et dans l'hiver pendant 17 journées, pour chacune desquelles il recevait 2 fr. de plus que pour une journée d'été. La première fois, l'ouvrier a mérité en outre par son zèle une gratification de 22 fr.; mais, la seconde fois, il a subi une re-

tenue de 28 fr., à raison de quelques dégats qu'il avait causés. Il a reçu chaque fois la même somme, et l'on veut connaître le prix de la journée d'été.

Ainsi rectifiée, il est de toute évidence que la question conduit à l'équation [3], qui admet la même valeur $x=4$ que l'équation [2]. Par conséquent cette valeur résout la question dans le sens précis du nouvel énoncé. On doit remarquer surtout que les quantités données dans l'énoncé primitif sont restées sans altération dans le nouveau. Seulement quelques unes d'entre elles, qui étaient désignées d'abord comme soustractives, sont devenues additives, ou *vice versâ*.

102. En général, quel que soit le problème proposé, si son énoncé exige que l'inconnue x soit positive, et si l'équation donne une valeur négative $x=-a$, on doit conclure que le problème est impossible. Pour rectifier l'énoncé, on remplace dans l'équation x par $-x$, ce qui changera les signes de certains termes; puis, sans altérer les quantités données, on modifie l'acception sous laquelle elles sont considérées, de telle sorte que les changemens de signes de l'équation correspondent exactement à ce changement d'acception. Alors on sera sûr, sans qu'il soit besoin de résoudre aucune nouvelle équation, que la valeur positive $x=a$ conviendra au dernier énoncé. A moins toutefois qu'il ne renferme encore quelques conditions, qu'on n'aurait pas pu exprimer dans l'équation : comme si, par exemple, il exigeait que l'inconnue fût un nombre entier.

Au reste, on conçoit que cette rectification peut se faire d'une infinité de manières différentes; mais il faut toujours, dans le nouvel énoncé, avoir soin de se tenir le plus près qu'on pourra de l'énoncé primitif.

103. PROBLÈME. *Deux courriers partent de deux points* A *et* B, *situés sur la même route* ABX, *et vont dans la même direction vers un point* C, *placé au-delà de* B *par rapport à* A. *On connaît les distances des points* A *et* B *au point* C, *savoir :* AC=110 *kilomètres et* BC=50 *kilom. De plus on sait que la vitesse du courrier parti du point* A *est de* 10 *kilom. par heure, et que celle du courrier parti du point* B *est de* 6 *kilom. On demande à quel point de la route les courriers se joindront.*



Supposons que la jonction se fasse au point R, et soit la distance $CR=x$. Les chemins parcourus par les deux courriers seront $AR=110-x$ et $BR=50-x$. Puisque le premier fait 10 kilom. par heure, et le second 6, les nombres d'heures employées par eux pour parcourir les distances AR et BR seront exprimés par $\frac{110-x}{10}$ et $\frac{50-x}{6}$. Comme ils sont partis en même temps, ces deux nombres doivent être égaux; donc l'équation du problème est

$$[4] \qquad \frac{110-x}{10}=\frac{50-x}{6}.$$

En multipliant les deux membres par 30 pour chasser les diviseurs, puis continuant les calculs, il vient

$$330-3x=250-5x,$$
$$5x-3x=250-330,$$
$$2x=-80,$$
$$x=-40.$$

Voici encore une valeur négative, et cependant on aurait tort d'affirmer que la question est impossible. Il est évident, en effet, que le courrier qui, au départ, est derrière, allant plus vite que celui qui est devant, doit finir par l'atteindre. Mais nous avons supposé en formant l'équation [4] que la rencontre se faisait en R avant le point C, et rien n'autorisait une pareille supposition. Ainsi c'est dans cette supposition, et non dans l'énoncé, que se trouve l'absurdité accusée par la valeur négative.

Il faut donc faire une supposition contraire, c'est-à-dire, placer la rencontre en quelque point tel que R′, au-delà de C. Alors, en posant $CR'=x$, l'équation à résoudre sera

$$\frac{110+x}{10}=\frac{50+x}{6}.$$

Mais aucun calcul nouveau n'est nécessaire. En effet, cette équation n'est autre que l'équation [4] où l'on aurait mis $-x$ au lieu de x; donc, puisque celle-ci est satisfaite par la valeur $x=-40$,

l'équation ci-dessus doit l'être par la valeur positive $x=40$. De cette manière, on apprend que la rencontre a véritablement lieu au-delà du point C, à la distance de 40 kilom.

Il suit de là que l'équation [4] donnera toujours la solution du problème, pourvu qu'on regarde la valeur négative de x comme devant être portée à droite du point C, c'est-à-dire, du côté opposé à celui où on l'avait supposée située.

104. L'exemple que je viens de traiter montre qu'une valeur négative de l'inconnue peut aussi, dans certains cas, provenir d'une fausse supposition qui a été faite pour arriver à l'équation du problème. Et en même temps on doit soigneusement remarquer que non-seulement le signe —, qui se trouve devant la valeur de l'inconnue, indique de quelle manière l'erreur doit être rectifiée, mais encore que la valeur de cette inconnue, en faisant abstraction du signe, donne la vraie solution du problème.

Remarque. On aurait pu résoudre le dernier problème en prenant la distance BR pour inconnue; et ensuite, pour connaître la distance du point C au point de rencontre, on aurait retranché BR de BC. Alors on voit bien que si le reste est négatif, c'est que la rencontre a eu lieu en un point R′ situé au-delà de C, et à une distance CR′, précisément égale à ce reste pris positivement.

105. Problème. *Deux courriers sont partis en même temps de deux villes différentes et parcourent la même ligne. On connaît la distance des deux villes, ainsi que la vitesse de chaque courrier, c'est-à-dire, le nombre de kilomètres que chacun d'eux fait en une heure. On demande en quel point de la route ils se joindront.*



Ainsi conçue en termes généraux, la question présente deux cas distincts : celui où les courriers vont dans le même sens, et celui où ils vont à la rencontre l'un de l'autre.

Premier cas. Je suppose que les deux courriers tendent vers le point C, situé au-delà du point B par rapport au point A, et que R soit le point où ils se joignent. Je nommerai

d la distance des points de départ A et B,

m la vitesse du courrier parti du point A,

n celle du courrier parti du point B,

x la distance iuconnue AR, parcourue par le premier courrier au moment où il atteint l'autre.

Cela posé, le chemin BR fait par le second courrier sera AR —AB ou $x-a$. En divisant x par m, on aura le temps que le premier courrier emploie à faire le chemin AR; et en divisant $x-a$ par n, on aura le temps employé par le second courrier à faire le chemin BR. Ces chemins doivent être parcourus dans le même temps; donc on a

[5] $$\frac{x}{m}=\frac{x-d}{n}.$$

De là on tire

$$nx=mx-md,$$
$$mx-nx=md,$$
$$x=\frac{md}{m-n}.$$

Deuxième cas. Je suppose que les deux courriers aillent à la rencontre l'un de l'autre, et que leur jonction ait lieu au point R, situé comme ci-dessous :



En conservant les mêmes dénominations que tout-à-l'heure, l'égalité entre les temps employés par les courriers pour faire, l'un le chemin AR, et l'autre le chemin BR, sera

[6] $$\frac{x}{m}=\frac{d-x}{n}.$$

Cette équation n'est autre que l'équation [5] dans laquelle on aurait remplacé n par $-n$; car alors le second membre devient $\frac{x-d}{-n}$, ce qui est la même chose que $\frac{d-x}{n}$. De là on conclut que l'équation [5] suffira pour résoudre les deux cas du problème, pourvu que l'on convienne de regarder la vitesse du courrier parti du point B comme changeant de signe quand la direction de ce courrier vient à changer.

106. Par la question qui vient d'être traitée, on voit que les quantités négatives peuvent servir à renfermer dans une seule équation, et par conséquent aussi dans une seule formule, plu-

sieurs cas d'une même question, dont chacun semblerait, au premier aperçu, exiger une solution distincte. C'est là aussi ce qui fait que ces quantités sont d'un usage presque continuel dans toutes les branches des mathématiques. Il n'est pas possible de caractériser avec précision les questions dans lesquelles la solution d'un seul cas peut s'étendre ainsi à plusieurs autres, par de simples changemens de signes; cependant on doit comprendre dès à présent que cette extension a lieu surtout dans les questions générales, où il faut considérer plusieurs cas qui ne diffèrent entre eux que par l'acception de certaines quantités, lesquelles sont additives pour quelques cas et soustractives pour les autres. Ainsi, la même lettre sera regardée comme représentant une quantité positive ou négative, selon qu'elle désignera un gain ou une perte, une vitesse imprimée dans un sens ou une vitesse de sens contraire, une distance située à droite d'un point ou une distance située à gauche, etc.

107. Les remarques auxquelles ont donné lieu les trois problèmes qu'on vient de traiter s'appliquent à toute espèce de question, quel que soit le nombre des inconnues et le degré des équations. Elles se résument comme il suit :

1° La valeur négative d'une inconnue peut indiquer quelquefois une condition impossible dans l'énoncé d'un problème. Alors il suffit de donner, dans cet énoncé, à quelques quantités des acceptions contraires, pour faire cesser toute impossibilité; et la valeur négative, qui a été trouvée d'abord, étant prise positivement, donnera la solution de la question ainsi rectifiée (102).

2° La valeur négative de l'inconnue peut aussi indiquer, non une absurdité, mais une supposition erronée; et, dans ce cas, elle donne toujours la solution du problème, pourvu qu'on prenne la quantité qu'elle représente dans un sens contraire à celui qu'on lui a d'abord attribué (104).

3° Enfin, en considérant certaines quantités comme positives ou négatives, selon qu'on les envisage sous certaines acceptions, ou sous des acceptions contraires, on peut réunir en une seule équation, ou en une seule formule, les différens cas d'une même question (106).

108. Après ces remarques, le lecteur traitera lui-même, sans difficulté, la question suivante :

PROBLÈME. *Un aubergiste fait avec un chasseur ce marché : Tous les jours où le chasseur apportera une pièce de gibier, il recevra de l'aubergiste une somme* a, *mais aussi il lui rendra une somme* b *tous les jours où il n'en apportera point. Après un nombre* n *de jours, il peut arriver que l'aubergiste et le chasseur ne se doivent rien, ou que le premier doive au second, ou le second au premier, une somme* c. *Trouver une formule qui fasse connaître dans les trois cas le nombre de jours où le chasseur a apporté du gibier.* Réponse : $x=\frac{bn+c}{a+b}$.

Cas d'impossibilité et d'indétermination dans les équations et dans les problèmes du 1er degré.

109. PROBLÈME. *Trouver un nombre dont le tiers augmenté de 75, et les cinq douzièmes diminués de 35, fassent autant que ses trois quarts ajoutés à 49.*

On voit immédiatement que l'équation du problème est

$$[1] \qquad \frac{x}{3}+75+\frac{5x}{12}-35=\frac{3x}{4}+49.$$

En transposant et en chassant les dénominateurs, il vient

$$\frac{x}{3}+\frac{5x}{12}-\frac{3x}{4}=9,$$
$$4x+5x-9x=108,$$
$$0=108.$$

Ici l'on parvient à une absurdité évidente, $0=108$. Il n'y a donc aucune valeur de x qui puisse vérifier l'équation [1]; et par suite il n'en existe pas non plus qui satisfasse à la question. C'est pourquoi l'on applique alors la dénomination d'*absurde* ou d'*impossible* à l'équation et à la question.

L'impossibilité peut se rendre sensible sur l'équation [1], en faisant, dans son 1er membre, la réduction des termes semblables. Par là elle devient

$$\frac{3x}{4}+40=\frac{3x}{4}+49;$$

et dès-lors il est évident que les deux membres auront toujours

tre eux une différence de 9 unités, quelque valeur qu'on mette la place de x.

Cette impossibilité est bien différente de celle qui avait lieu ans le n° 101. Si alors le problème était impossible, ce n'était oint parce qu'il n'existait aucune quantité qui pût se prêter aux érifications de calcul exigées par l'énoncé, mais bien parce que a valeur de x était négative, et que l'énoncé repoussait toute aleur de cette espèce. Dans le problème qui vient de nous occuper, l'impossibilité est *absolue*, c'est-à-dire qu'aucune quantité, de quelque nature qu'elle soit, ne peut donner l'égalité établie dans son énoncé.

110. PROBLÈME. *Trouver un nombre tel qu'en ajoutant la moitié de ce nombre augmenté de* 10, *les* $\frac{2}{3}$ *de ce même nombre augmenté de* 20, *et encore les* $\frac{5}{6}$ *de ce nombre diminué de* 34, *on ait une somme égale à deux fois l'excès de ce nombre sur* 5.

Ici l'équation du problème est

$$[2] \qquad \frac{x+10}{2}+\frac{2(x+20)}{3}+\frac{5(x-34)}{6}=2(x-5).$$

En chassant les dénominateurs, réduisant et transposant, il vient

$$3x+30+4x+80+5x-170=12x-60,$$
$$3x+4x+5x-12x=170-30-80-60,$$
$$0=0.$$

Comme on arrive à deux membres qui sont identiques, on en conclut que l'inconnue x doit rester tout-à-fait indéterminée : c'est-à-dire qu'on peut prendre x égal à 2, ou à 3, ou à tel autre nombre qu'on voudra.

Et en effet, si on remonte à l'équation [2], et si on effectue les calculs indiqués dans son 1[er] membre, on trouve qu'il équivaut à $\frac{3x+30+4x+80+5x-170}{6}$, ou, en réduisant, à $\frac{12x-60}{6}$, ou bien encore, en simplifiant, à $2x-10$. Ce résultat étant précisément égal au 2[e] membre $2(x-5)$, il s'ensuit que l'équation [2] n'est autre chose qu'une véritable égalité, qui a lieu quel que soit x. Dans tous les cas analogues, l'équation et la question sont dites *indéterminées*.

111. **Problème.** *Avez-vous abattu beaucoup de pièces de gibier? demande-t-on à un chasseur. Celui-ci répond : Il faudrait en ajouter 5 au tiers de celles que j'ai tuées l'an passé, pour avoir la moitié de ce que j'ai tué cette année; mais si, du triple de cette dernière moitié, vous ôtez 5, vous aurez juste ce que j'ai tué l'an passé. Combien le chasseur a-t-il abattu de gibier chaque année?*

En nommant x le nombre de pièces tuées cette année, et y celui des pièces tuées l'année précédente, on doit avoir

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,$$
$$y=\frac{3x}{2}-5.$$

Après avoir mis dans la 1re équation la valeur de y donnée par la 2e, il vient

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{5}{3}+5,$$
$$3x-3x=30-10,$$
$$0=20:$$

égalité absurde, de laquelle on conclut qu'il n'existe pas des valeurs de x et de y qui satisfassent aux deux équations. Par conséquent, le problème renferme des conditions impossibles à remplir.

On peut d'ailleurs rendre l'impossibilité sensible sur les équations mêmes : car, en chassant les dénominateurs et transposant, elles deviennent

$$3x-2y=30,\ \ 3x-2y=10;$$

et alors on voit que les deux premiers membres sont les mêmes, tandis que les seconds sont des nombres différens.

Remarquez bien que chacune des deux équations, si on la prend isolément, est possible, et que même elle admet une infinité de solutions. L'impossibilité consiste donc en ce que les deux équations ne peuvent avoir aucune solution commune, ou, ce qui est la même chose, en ce que les deux conditions du problème ne peuvent jamais avoir lieu ensemble. C'est pourquoi l'on dit de ces

conditions, et aussi des équations qui les expriment, qu'elles sont *contradictoires* ou *incompatibles*.

112. Supposons que la première condition du problème restant la même, on change seulement la seconde, et qu'on y remplace le nombre 5 par 15. Alors les équations du problème seraient

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5,$$
$$y=\frac{3x}{2}-15;$$

et, en mettant dans la 1re la valeur de y donnée par la 2e, il vient

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-5+5, \quad \text{d'où} \quad 0=0,$$

De là on conclut qu'on peut attribuer à l'inconnue x telle valeur qu'on voudra, et qu'en lui adjoignant la valeur correspondante de y, déduite de l'une des deux équations, on satisfera toujours à l'autre.

On rendra ceci évident sur les équations mêmes en chassant les dénominateurs et en transposant les termes : car on les ramène ainsi toutes deux à l'équation unique $3x-2y=30$, ce qui prouve que les deux conditions indiquées dans l'énoncé du problème ne sont différentes qu'en apparence. Alors les deux équations, aussi bien que la question dont elles sont la traduction, sont dites *indéterminées*, attendu qu'on peut y satisfaire d'une infinité de manières.

113. J'ai énoncé comme règle générale, n° 90, que des équations du 1er degré, en nombre égal aux inconnues, déterminent un système de valeurs pour ces inconnues, et n'en déterminent qu'un seul. Mais en même temps j'ai prévenu que cette règle était sujette à quelques exceptions. Les exemples précédens ont montré en effet qu'il pouvait y avoir dans les équations *impossibilité* ou *indétermination*. De plus, je vais montrer que dans tous les cas où il y aura exception, ce sera toujours l'*impossibilité* ou l'*indétermination* qu'on devra rencontrer.

Par les procédés de calcul qui servent à effectuer les éliminations, il est clair qu'il ne peut arriver que trois cas :

1° On peut parvenir à une équation unique du 1[er] degré à une seule inconnue. Dans ce cas, qui est le plus ordinaire, on détermine pour l'inconnue restante une valeur unique, puis en remontant aux équations précédentes, on détermine aussi une valeur unique pour chacune des autres inconnues.

2° On peut trouver, à la fin ou dans le cours des opérations, une équation dans laquelle les termes inconnus se détruisent mutuellement, et où les deux membres soient des quantités données différentes l'une de l'autre. Il y a alors absurdité évidente, et l'on doit conclure que quelques valeurs qu'on attribue aux inconnues (je suppose qu'il y en ait plusieurs), on ne pourra point satisfaire aux équations primitives, ni par conséquent à la question dont elles dérivent.

3° Si aucun de ces deux cas n'a lieu, on doit trouver une ou plusieurs équations dans lesquelles les inconnues disparaissent, et dont les deux membres soient égaux à la même quantité. On reconnaît alors qu'on peut donner à ces inconnues telles valeurs qu'on voudra, et qu'ensuite, au moyen de ces valeurs, on pourra calculer les autres inconnues. Il y a donc ici une véritable *indétermination* dans les équations primitives, et par conséquent aussi dans le problème dont elles expriment les conditions.

114. Quand on ne considère que deux équations à deux inconnues, si on arrive à une égalité absurde, comme il est évident que chaque équation prise séparément est possible, on doit conclure, ainsi qu'on l'a fait n° 111, que les deux équations sont contradictoires ou incompatibles; et, si on arrive à une égalité évidente, on conclut que l'une des équations est toujours vérifiée quand l'autre l'est, ce qui revient à dire qu'elle en est une conséquence.

Mais quand on a plus de deux équations (cependant toujours en nombre égal aux inconnues), l'impossibilité et l'indétermination peuvent tenir à des causes plus variées. Par exemple, lorsqu'on a trois équations à trois inconnues, il y aura impossibilité si une équation est incompatible avec chacune des deux autres, ou bien seulement avec leur ensemble sans l'être avec aucune d'elles séparément. Et pareillement il y aura indétermination, si une équation est une conséquence de l'une des deux autres, ou si deux équations sont des conséquences de la troisième, ou encore si

l'une des équations est une conséquence de l'ensemble des deux autres, sans l'être d'aucune d'elles prises séparément.

En général, quand on voudra savoir *si une équation est incompatible* avec l'ensemble de plusieurs équations, ou bien *si elle en est une conséquence*, on considérera dans ces équations des inconnues en nombre égal à ces équations, on en tirera les valeurs en fonction des autres inconnues, comme si elles étaient données, puis on les substituera dans la première équation. Si alors on tombe sur une égalité absurde, la première équation sera incompatible avec le système des autres équations; et au contraire elle en sera une conséquence, si on tombe sur une égalité identique.

115. Voici deux exemples sur lesquels le lecteur peut s'exercer :

$$\begin{cases} x+3y-6z-6u=7, \\ 2x+y-4z-2u=15, \\ 4x-y-5z+5u=30, \\ 5x+10y-22z-20u=39. \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y-6z-6u=8, \\ 2x+5y-10z-9u=12, \\ 2x+4y-8z-9u=14, \\ 5x+12y-24z-24u=34. \end{cases}$$

Le premier exemple conduit à une absurdité, et l'on reconnaîtra qu'en effet la 4e équation est incompatible avec l'ensemble des deux premières.

Le second exemple conduit à une identité, et il sera facile de reconnaître que la 4e équation est une conséquence des trois autres prises ensemble, tandis qu'elle ne l'est d'aucune d'elles prise isolément, ni même de la réunion de deux quelconques d'entre elles. Pour satisfaire à ces équations, on trouve

$$u=-2,\ x=2,\ y=2z-2,$$

et l'inconnue z reste arbitraire.

116. Je terminerai cet article en remarquant que les cas d'impossibilité dont j'ai parlé sont bien les seuls qui puissent se présenter dans les équations, mais que dans les problèmes il peut y en avoir beaucoup d'autres. Par exemple, il pourra se faire que, d'après l'énoncé, une inconnue doive être un nombre entier, et que l'on trouve une fraction; ou bien que cette inconnue doive être moindre qu'un certain nombre, et que l'on trouve une valeur plus grande; etc.

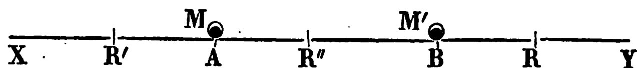
En général, l'énoncé d'un problème peut imposer à une inconnue, ou à plusieurs, des restrictions qu'il est impossible d'ex-

primer par des équations; et dans ces cas, après qu'on a trouvé les valeurs des inconnues, il reste encore à vérifier si elles satisfont à toutes ces restrictions. C'est ainsi que dans le Problème III, p. 74, quelques conditions n'ont pas été introduites dans l'équation, et que nous avons dû reconnaître si elles étaient remplies par la solution déduite de cette équation.

Discussion des problèmes.

117. Lorsqu'on a résolu un problème dans lequel les quantités données sont représentées par des lettres, la valeur de l'inconnue (je suppose, pour fixer les idées, qu'il n'y en a qu'une) est exprimée par une formule qui indique les opérations à exécuter sur les données. Or, on peut concevoir que ces données reçoivent toutes les valeurs possibles, et examiner s'il en résulte quelques cas qui offrent des particularités remarquables : c'est là ce qui s'appelle *discuter* le problème. L'exemple suivant montrera comment on doit se diriger dans ces discussions.

118. PROBLÈME. *Deux mobiles* M *et* M′ *se meuvent uniformément sur la droite indéfinie* XY, *avec des vitesses données* a *et* b, *tous deux dans la direction* XY. *On sait que le mobile* M *est arrivé au point* A *un certain nombre d'heures* h *avant que le mobile* M′ *ne soit parvenu en* B, *et l'on connaît la distance* d *des points* A *et* B. *On demande en quel point de la droite* XY *se fait la rencontre des deux mobiles.* Ce problème est extrait, sauf un léger changement, de l'Algèbre de M. LACROIX, p. 360.



Supposons que la rencontre soit en R du côté BY : je nommerai x la distance inconnue BR. La distance AR sera $d+x$, et les temps employés par les deux mobiles M et M′, pour parcourir respectivement les distances AR et BR, seront $\frac{d+x}{a}$ et $\frac{x}{b}$. Or, d'après l'énoncé, le mobile M est arrivé en A, un nombre h d'heures avant que M′ ne fût parvenu en B; donc le premier temps doit surpasser

le second de la quantité h, et par conséquent on a l'équation

$$[1] \qquad \frac{d+x}{a} - \frac{x}{b} = h.$$

De là on tire facilement

$$bd + bx - ax = abh,$$
$$ax - bx = b(d - ah),$$
$$[2] \qquad x = \frac{b(d-ah)}{a-b}.$$

Discussion. Il peut se faire que la rencontre des mobiles ait lieu après ou avant le point B, et la solution ci-dessus a été établie comme si c'était le premier cas qui dût avoir lieu. Mais en interprétant les résultats conformément aux remarques résumées dans le n° 107, on va voir qu'elle a toute la généralité désirable.

1°. Le numérateur et le dénominateur de x seront tous deux positifs lorsqu'on aura à la fois

$$a > b \quad \text{et} \quad d > ah.$$

Alors la valeur de x est positive, et par conséquent il y a véritablement rencontre des mobiles du côté BY, ainsi qu'on l'a supposé. Cette conclusion est conforme à celle qui se tire immédiatement de la question elle-même. En effet, observons que ah est le chemin parcouru par le mobile M pendant le temps h, qui s'écoule entre l'arrivée de ce mobile au point A et celle de M′ au point B. Ainsi, supposer $a > b$ et $d > ah$, c'est admettre que le mobile M va plus vite que M′, et qu'il n'est pas encore en B quand M′ y arrive; donc il devra atteindre M′ du côté BY.

Quand on a à la fois

$$a < b \quad \text{et} \quad d < ah,$$

la valeur de x est encore positive, et par conséquent les mobiles se rencontrent encore du côté BY. Et en effet, il est clair qu'alors le mobile M a un mouvement moins rapide que M′, et qu'il a dépassé le point B quand M′ y arrive. Il ne peut donc pas manquer d'être atteint par lui du côté BY.

2°. Quand on a à la fois

$$a < b \quad \text{et} \quad d > ah, \quad \text{ou} \quad a > b \quad \text{et} \quad d < ah,$$

la valeur de x est négative. Cette circonstance indique que la ren-

contre des mobiles a lieu du côté opposé à celui où on l'avait placée, c'est-à-dire qu'elle se fait du côté BX, et à la distance marquée par la valeur de x, abstraction faite du signe (107, 2°).

En remontant à la question, comme on l'a fait tout-à-l'heure, on aperçoit facilement ici qu'au moment où M' arrive en B, celui des deux mobiles qui a la plus grande vitesse se trouve alors devant l'autre. Aucune rencontre ne peut donc avoir lieu du côté BY, et il est évident au contraire que les deux mobiles ont dû se rencontrer du côté BX.

Que si on veut démontrer la justesse de l'interprétation donnée à la valeur négative, on le fera comme il suit. D'abord, comme on a supposé que les mobiles devaient se rencontrer du côté BY, la valeur négative prouve seulement que cette supposition est inadmissible. Mais il est possible que la rencontre ait lieu du côté BX, soit avant le point A, soit dans l'intervalle AB.

Si la rencontre a lieu en R' avant le point A, en faisant l'inconnue $BR'=x$, les temps employés par le mobile M pour venir de R' en A, et par le mobile M' pour venir de R' en B, seront $\frac{x-d}{a}$ et $\frac{x}{b}$. Le temps écoulé entre l'arrivée de M au point A et celle de M' au point B sera donc la différence $\frac{x}{b}-\frac{x-d}{a}$; et comme l'enoncé veut que ce temps soit égal à h, on aura l'équation

$$[3] \qquad \frac{x}{b}-\frac{x-d}{a}=h.$$

Si la rencontre a lieu en R'', dans l'intervalle AB, et qu'on fasse toujours l'inconnue $BR''=x$, le temps employé par le mobile M pour aller de A en R'' sera $\frac{d-x}{a}$, et celui qu'emploie le mobile M' pour aller de R'' en B sera $\frac{x}{b}$; donc le temps écoulé entre l'arrivée du mobile M au point A et celle de M' au point B sera $\frac{d-x}{a}+\frac{x}{b}$, et l'on aura l'équation

$$[4] \qquad \frac{d-x}{a}+\frac{x}{b}=h.$$

Maintenant remarquons que les équations [3] et [4] étant exactement les mêmes, la dernière devra déterminer le point de rencontre, quelle que soit sa position dans la région BX. Remarquons encore que l'équation [1] devient l'équation [3] en y changeant x en $-x$; et de là on conclura que toute valeur positive, qui satisfait à la seconde, sera donnée, mais avec le signe —, par la première.

Ainsi l'équation [1] suffit à elle seule pour déterminer dans tous les cas le point de rencontre des mobiles, en ayant soin de porter les valeurs négatives de x à gauche du point B.

3°. Supposons qu'on ait $b=a$ sans avoir $d=ah$. La valeur de x devient

$$x=\frac{a(d-ah)}{0},$$

ou, plus simplement, en posant $a(d-ah)=m$,

$$x=\frac{m}{0}.$$

Que peut signifier une pareille expression? Pour l'interpréter, imaginons qu'au lieu de 0 on donne à m des diviseurs de plus en plus petits, tels, par exemple, que 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$...; les quotiens seraient m, $10m$, $100m$...; et iraient en croissant, de telle sorte qu'on ne conçoit aucune quantité, quelque grande qu'elle soit, qu'on ne puisse encore surpasser en prenant un diviseur assez petit. C'est là ce qu'on exprime en disant que le quotient d'une quantité divisée par zéro est *infini*. On indique l'infini par le signe ∞.

L'expression $\frac{m}{0}$, considérée en elle-même, montre donc qu'il n'existe aucune distance assez considérable pour représenter celle à laquelle les mobiles doivent se rencontrer, ce qui équivaut évidemment à dire qu'ils ne se rencontrent pas.

Et en effet, de ce que d est différent de ah, il s'ensuit que le mobile M ne se trouve pas au point B en même temps que le mobile M'; et de ce que $b=a$, il s'ensuit que les deux mobiles ont la même vitesse : donc ils doivent toujours être à la même distance l'un de l'autre; donc aucune rencontre n'est possible.

4°. Supposons en même temps $b=a$ et $d=ah$. Il viendra

$$x=\frac{0}{0},$$

et l'interprétation immédiate de cette expression sera facile. Comme dans toute division le produit du quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende, il faut ici que le quotient soit tel qu'en le multipliant par zéro on trouve zéro; donc on peut prendre ce quotient égal à tel nombre qu'on voudra : c'est ce qu'on exprime en d'autres termes, en disant que $\frac{0}{0}$ représente une grandeur *indéterminée*.

De cette explication on doit conclure que les mobiles ne sont jamais séparés. Et en effet, puisqu'on suppose $b=a$ et $d=ah$, les mobiles ont la même vitesse, et se trouvent ensemble au point B; donc ils ont toujours dû être ensemble, et doivent toujours rester ensemble.

Les autres particularités qu'on pourrait remarquer sont trop minutieuses pour s'y arrêter. Je terminerai donc cette discussion observant que les principes qui ont été établis dans le n° 106 permettent d'étendre la formule [2] aux problèmes dont les énoncés ne diffèrent de celui qui a donné cette formule que par l'acception de quelques quantités. Ainsi, on pourra supposer que le mobile M′ aille dans le sens YX, et alors il faudra seulement changer b en $-b$ dans la formule. Si c'est le mobile M qui change de direction, on changera a en $-a$; et si les deux mobiles changent de direction en même temps, on changera à la fois a en $-a$ et b en $-b$. Enfin, si l'arrivée du mobile M au point A, au lieu de précéder celle de M′ au point B, n'avait lieu qu'après, on changerait h en $-h$.

Ces conséquences sont bien propres à faire ressortir toute l'importance des quantités négatives; et, pour cette raison, je conseille au lecteur de chercher par lui-même à les mettre en évidence, en suivant la marche tracée dans le n° 105.

Sur les symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$. Remarques sur les équations dans lesquelles il y a des dénominateurs qui contiennent l'inconnue.

119. Les symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$, qui se sont présentés dans la discussion précédente (3° et 4°), méritent de fixer l'attention.

Lorsque dans les équations il y a des quantités données représentées par des lettres, et qu'on en a tiré les formules qui expriment les inconnues, si l'on fait des hypothèses sur ces lettres et qu'on les introduise dans les formules, on doit obtenir, pour les inconnues, des valeurs particulières correspondantes à ces hypothèses. Or, il peut arriver que ces hypothèses fassent tomber les équations dans un cas d'*impossibilité* ou d'*indétermination*, et alors il est facile de s'assurer que parmi les formules il s'en trouvera au moins une qui deviendra $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$.

Concevons que les hypothèses soient introduites dans les équations elles-mêmes, et qu'alors on répète tous les calculs qu'on a faits pour parvenir aux formules générales. Si les équations tombent dans un cas d'impossibilité, il faudra qu'en cherchant une inconnue, x, par exemple, l'élimination conduise à une équation absurde, dans laquelle cette inconnue ne se trouvera plus, et dont les deux membres seront des quantités différentes. Supposons que cette équation, avant les hypothèses, soit

$$Ax = B,$$

A et B représentant des expressions littérales composées de quantités données : la valeur générale de x sera

$$x = \frac{B}{A}.$$

Or, dans les hypothèses qui amènent l'impossibilité, il faut que x disparaisse de l'équation $Ax = B$, et que les deux membres renferment des quantités inégales; donc A doit être zéro sans que B le soit; donc, en désignant par m ce que devient B, la valeur générale de x doit donner $x = \frac{m}{0}$.

Maintenant supposons que les hypothèses doivent amener un cas d'indétermination. Les calculs d'élimination, au lieu de conduire à une équation d'où l'on puisse tirer la valeur d'une inconnue, doivent donner une équation dont les deux membres soient identiques. Donc si, avant les hypothèses, cette équation est $Ax = B$, il faudra, après les hypothèses, que A et B soient tous deux zéro; donc la valeur générale de x se réduira à $x = \frac{0}{0}$.

Il peut se faire qu'il y ait plusieurs inconnues dont les expres-

sions deviennent $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$. Ce qui précède montre qu'il doit y en avoir au moins une qui devienne $\frac{m}{0}$ dans les cas d'impossibilité, et $\frac{0}{0}$ dans les cas d'indétermination.

120. On a vu dans le n° 118 (3°), que l'expression $\frac{m}{0}$ doit être considérée comme représentant une grandeur infinie. Ici j'ajouterai que cette valeur infinie peut être quelquefois positive, quelquefois négative, et quelquefois indifféremment positive ou négative.

1° Soit la formule $x=\frac{m}{(n-z)^2}$, dans laquelle m et n sont deux nombres invariables qu'on suppose positifs et différens de zéro, tandis que z peut avoir toutes les valeurs possibles. En faisant $z=n$ il vient $x=\frac{m}{0}$. Mais comme le dénominateur $(n-z)^2$ est toujours positif quel que soit z, attendu que le carré de $n-z$ est toujours positif, on doit regarder ici l'expression $\frac{m}{0}$ comme désignant l'infini positif, et l'on écrira $x=+\infty$.

2° Avec des raisonnemens analogues, on voit que si l'on a la formule $x=\frac{-m}{(n-z)^2}$, et qu'on y fasse encore $z=n$, on devra avoir l'infini négatif $x=-\infty$.

3° Soit la formule $x=\frac{m}{n-z}$. L'hypothèse $z=n$ donne encore $x=\frac{m}{0}$; mais ici l'infini aura un signe ambigu. Supposons d'abord $z<n$ et ensuite faisons croître z, la formule donnera des valeurs croissantes qui seront toutes positives. Au contraire, en prenant $z>n$, puis en diminuant z jusqu'à le rendre égal à n, la formule donnera des valeurs croissantes qui seront toutes négatives. Il suit de là que la valeur infinie, correspondante à $z=n$, se trouve appartenir également à une suite de quantités positives croissantes et à une suite de quantités négatives croissantes. Pour cette raison l'hypothèse $z=n$ doit être considérée comme faisant prendre à la formule deux valeurs infinies, l'une positive et l'autre négative. C'est ce qu'on indique d'une manière abrégée en écrivant $x=\pm\infty$.

121. Lorsqu'une formule fractionnaire renferme un dénominateur qui peut devenir infini sans que le numérateur le soit, il est clair qu'à cette limite la valeur numérique de la fraction doit être moindre que toute quantité, quelque petite qu'elle soit, ce qui

revient à dire qu'elle est égale à zéro. Ainsi, le numérateur étant désigné par m, on aura $\frac{m}{\infty}=0$.

122. Lorsqu'une quantité va en décroissant jusqu'à zéro, sans changer de signe, on pourrait conserver la trace du signe en le laissant subsister devant la limite *zéro*. Alors on aurait

$$\frac{m}{+0}=+\infty,\quad \frac{m}{-0}=-\infty,$$
$$\frac{m}{+\infty}=+0,\quad \frac{m}{-\infty}=-0.$$

123. Il y a aussi plusieurs observations à faire sur le symbole $\frac{0}{0}$. Le raisonnement du n° 118 (4°) prouve qu'en le considérant en lui-même il représente une quantité tout-à-fait *indéterminée*. Mais l'indétermination peut encore se montrer sous d'autres formes. En effet, par les règles du calcul, on a

$$A\times\frac{1}{B}=\frac{A}{B},\quad \text{et}\quad \frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{A}}=\frac{A}{B}.$$

Or, quand A et B deviennent zéro, les quantités $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$ deviennent infinies; donc les expressions

$$0\times\infty\quad \text{et}\quad \frac{\infty}{\infty}$$

doivent recevoir la même interprétation que $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire qu'elles sont aussi des symboles d'indétermination.

124. Il y a cependant des cas où l'expression $\frac{0}{0}$ est considérée sous un autre point de vue.

Soit la formule

$$[1]\qquad x=\frac{6(z^2-4)}{z(z-2)}.$$

Si on suppose $z=2$, il vient $x=\frac{0}{0}$; et, d'après ce qui précède, cette valeur devrait être indéterminée. Mais si, avant de faire $z=2$, on simplifie la fraction, en ôtant le facteur $z-2$, commun à ses deux termes, on a

$$[2]\qquad x=\frac{6(z+2)}{z};$$

et alors, en faisant $z=2$, on trouve $x=3$, qui est la vraie valeur correspondante à cette hypothèse.

Pour bien comprendre ceci, au lieu de supposer tout d'abord $z=2$, imaginons que la différence $z-2$ diminue graduellement. La formule [1] donnera pour x successivement différentes valeurs, toutes déterminées et égales à celles que donnerait la formule [2]. Ces valeurs peuvent donc être regardées comme tendant graduellement vers la valeur 3; et, par cette raison, on regarde la valeur $x=3$ comme étant véritablement celle qui répond à l'hypothèse $z=2$. Mais comme l'indétermination qui résulte de la première formule empêche de reconnaître cette valeur, c'est à la seconde qu'il faut recourir. De là cette règle :

Si, pour une certaine hypothèse, une formule fractionnaire devient $\frac{0}{0}$, il faut, avant de prononcer qu'elle a une valeur indéterminée, examiner si son numérateur et son dénominateur ne contiennent pas quelque facteur commun qui devienne nul, et dont la suppression laisse apercevoir la vraie valeur de la fraction.

Appliquons cette règle aux trois fractions

$$\frac{3z^2-3}{2z-2}, \quad \frac{z^2-2z+1}{3z^2-3}, \quad \frac{3z^2-3}{z^2-2z+1},$$

qui deviennent $\frac{0}{0}$ par l'hypothèse $z=1$. On les écrira ainsi

$$\frac{3(z+1)(z-1)}{2(z-1)}, \quad \frac{(z-1)^2}{3(z+1)(z-1)}, \quad \frac{3(z+1)(z-1)}{(z-1)^2}.$$

On supprimera partout le facteur commun $z-1$; puis, en faisant $z=1$, on trouvera les valeurs 3, 0, $\pm\infty$.

125. Une fraction pouvant devenir zéro quand son numérateur est nul ou quand son dénominateur est infini, il s'ensuit que si une équation a des dénominateurs qui contiennent l'inconnue x, et qu'on la ramène à la forme fractionnaire

$$\frac{M}{N}=0,$$

il faudra, pour la résoudre complètement, chercher non-seulement les valeurs de x pour lesquelles on a $M=0$, mais encore celles qui donnent $N=\infty$.

Toutefois on devra considérer si, par ces valeurs, la fraction ne devient pas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: car, si cela arrivait, il pourrait se faire que sa vraie valeur ne fût pas zéro, auquel cas l'équation ne serait pas satisfaite.

Dans l'exemple du n° 78, l'équation a été ramenée à celle-ci

$$\frac{x+3}{1-x^2}=0;$$

et comme la valeur $x=-3$ rend le numérateur nul sans rendre nul le dénominateur, on a pu conclure que cette valeur satisfait véritablement à l'équation.

Mais quoique le dénominateur $1-x^2$ devienne infini en faisant $x=+\infty$ et $x=-\infty$, comme ces valeurs rendent aussi le numérateur infini, on tombe dans une indétermination apparente. Pour la faire disparaître, on met la fraction sous une forme où le numérateur ne devienne plus infini, ce qui se fera en divisant par x les deux termes de la fraction. De cette manière, elle devient

$$\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-x};$$

puis en remarquant que les valeurs $x=+\infty$ et $x=-\infty$ rendent nulles les fractions $\frac{3}{x}$ et $\frac{1}{x}$, on voit qu'elle se réduit à $\frac{1}{-\infty}$ ou à $\frac{1}{+\infty}$, c'est-à-dire à zéro : donc les valeurs $x=+\infty$ et $x=-\infty$ conviennent à l'équation proposée.

Le plus ordinairement, quand on fait évanouir des dénominateurs qui contiennent l'inconnue, on ne tient aucun compte des valeurs infinies, parce qu'en effet elles ne conviennent presque jamais aux problèmes que les équations servent à résoudre : mais cette omission est toujours volontaire, et les explications que je viens de donner montrent assez comment elle doit être réparée.

CHAPITRE VI.

Résolution de plusieurs équations générales du 1er degré, en nombre égal aux inconnues.

Formules générales. Règles d'après lesquelles elles se composent.

126. Quelque diverses que puissent être des équations du 1er degré, on peut toujours les ramener à des formes générales qui permettent d'obtenir pour les inconnues des *formules* dans lesquelles sont compris tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. Ce sont ces formules que je me propose de chercher maintenant. On pourrait y parvenir par les méthodes expliquées dans le chapitre III; mais je me servirai préférablement de celle qui est connue sous le nom de *méthode des indéterminées*, et qui a été employée par Bezout. Les considérations sur lesquelles elle repose méritent la plus grande attention, à cause des applications qu'elles reçoivent dans les recherches les plus élevées de l'analyse.

Prenons d'abord deux équations entre deux inconnues x et y. Par des préparations convenables, on saura toujours les ramener à la forme.

$$[1] \qquad \begin{aligned} ax+by&=k, \\ a'x+b'y&=k'. \end{aligned}$$

Ici a, b, k, a', b', k', représentent des quantités connues qui peuvent être positives ou négatives. En mettant a', b', k', dans la seconde équation, pour désigner les quantités analogues aux quantités a, b, k, de la première, on se rappelle plus facilement la signification de toutes ces lettres.

Désignons par m une quantité tout-à-fait indéterminée, dont on pourra disposer comme on voudra, multiplions la 1re équation par m, et ensuite retranchons-en la seconde : il viendra

$$(am-a')x+(bm-b')y=km-k';$$

et comme la quantité m est arbitraire, on la choisira de manière qu'elle réduise à zéro le multiplicateur de l'inconnue qu'on veut éliminer.

Si c'est y qu'on fait disparaître, on posera

$$bm=b', \quad \text{d'où} \quad m=\frac{b'}{b};$$

l'équation ne contiendra plus y, et en y remplaçant m par cette valeur, on aura

$$x=\frac{\frac{kb'}{b}-k'}{\frac{ab'}{b}-a'}=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}.$$

Mais si c'est x qu'on veut faire disparaître, il faudra poser

$$am=a', \quad \text{d'où} \quad m=\frac{a'}{a};$$

et l'équation donnera

$$y=\frac{\frac{ka'}{a}-k'}{\frac{ba'}{a}-b'}=\frac{ka'-ak'}{ba'-ab'}.$$

Les dénominateurs de x et de y sont égaux, mais de signes contraires. Pour les rendre tout-à-fait semblables, je changerai les signes du numérateur et du dénominateur de y, et alors les valeurs générales de x et de y seront

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}, \quad y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}.$$

Chacune d'elles peut immédiatement se déduire de l'autre. En effet, il est évident que les mêmes calculs qui font trouver x, doivent donner y en changeant partout a en b et b en a, sans d'ailleurs toucher aux accens. Donc, en effectuant ces changemens dans la valeur de x, on doit trouver celle de y. Une remarque analogue s'applique aux cas que je vais traiter.

127. Considérons maintenant trois équations générales entre trois inconnues. On peut les représenter ainsi :

$$ax+by+cz=k,$$
$$a'x+b'y+c'z=k',$$
$$a''x+b''y+c''z=k''.$$

Après avoir multiplié la 1[re] par une indéterminée m, et la 2e une indéterminée n, ajoutons-les, puis de la somme retranch la 3e. Dans l'équation résultante, on pourra faire disparaître d inconnues, en disposant des deux indéterminées de manière les multiplicateurs de ces inconnues deviennent zéro; et ensı on en tirera la valeur de l'inconnue restante. L'équation rés tante dont il s'agit est

$$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z = km+k'n-k''.$$

Si on veut faire disparaître y et z, il faudra déterminer m par les deux équations

$$bm+b'n=b'', \quad cm+c'n=c'';$$

et l'on aura

$$x=\frac{km+k'n-k''}{am+a'n-a''}$$

Les deux équations qui déterminent m et n se déduisent évide ment des deux équations générales traitées dans le n° précéde en y remplaçant

les lettres $x, y, a, b, k, a', b', k'$,
par $m, n, b, b', b'', c, c', c''$;

donc, pour avoir m et n, il suffit d'effectuer les mêmes chan mens dans les formules qui terminent le n° cité. De cette maniè on a

$$m=\frac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'}, \quad n=\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'};$$

et en mettant ces valeurs dans celle de x, il vient

$$x=\frac{k(c'b''-b'c'')+k'(bc''-cb'')-k''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

Pour trouver y, on fera disparaître x et z en posant

$$am+a'n=a'', \quad cm+c'n=c''.$$

La comparaison de ces deux équations avec celles du n° précéde donne

$$m=\frac{c'a''-a'c''}{ac'-ca'},\quad n=\frac{ac''-ca''}{ac'-ca'};$$

et par suite on trouve

$$y=\frac{k(c'a''-a'c'')+k'(ac''-ca'')-k''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')-b''(ac'-ca')}.$$

Enfin, pour connaître z, on posera

$$am+a'n=a'',\quad bm+b'n=b'';$$

de là on tirera

$$m=\frac{b'a''-a'b''}{ab'-ba'},\quad n=\frac{ab''-ba''}{ab'-ba'};$$

et par suite il viendra

$$z=\frac{k(b'a''-a'b'')+k'(ab''-ba'')-k''(ab'-ba')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.$$

En effectuant les multiplications indiquées dans les valeurs de x, y, z, et en changeant les signes du numérateur et du dénominateur dans la première et dans la dernière, on pourra écrire ces trois valeurs comme il suit :

$$x=\frac{kb'c''-kc'b''+ck'b''-bk'c''+bc'k''-cb'k''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$y=\frac{ak'c''-ac'k''+ca'k''-ka'c''+kc'a''-ck'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z=\frac{ab'k''-ak'b''+ka'b''-ba'k''+bk'a''-kb'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

128. Soient encore les quatre équations générales

$$\begin{aligned}
ax+by+cz+du&=k,\\
a'x+b'y+c'z+d'u&=k',\\
a''x+b''y+c''z+d''u&=k'',\\
a'''x+b'''y+c'''z+d'''u&=k'''.
\end{aligned}$$

En multipliant les trois premières par trois indéterminées m, n, p, faisant alors la somme de ces équations, et retranchant la quatrième, on a une équation de laquelle on fera disparaître trois inconnues en égalant à zéro les multiplicateurs de ces inconnues. Il vient ainsi trois équations pour déterminer les valeurs de m, n, p;

puis au moyen de ces valeurs on aura celle de l'inconnue restante.

129. Ces calculs ne sauraient offrir aucune difficulté, et peuvent s'étendre à tant d'équations qu'on voudra. Mais en observant avec attention la composition des formules trouvées précédemment pour deux et pour trois équations, on a découvert des règles générales au moyen desquelles on peut obtenir sans calcul les formules qui conviennent à un nombre quelconque d'équations.

Première règle. Avec les deux lettres a et b formez les arrangemens ab et ba, puis interposez le signe — entre eux, on aura

$$ab-ba.$$

S'il n'y avait que deux équations à résoudre, on mettrait un accent à la 2[e] lettre de chaque terme; et le résultat $ab'-ba'$ serait le dénominateur commun des valeurs de x et de y.

S'il y a trois équations, on fera passer la troisième lettre c à toutes les places dans chaque terme de l'expression $ab-ba$. En ayant soin d'alterner les signes, ab donnera $abc-acb+cab$; de même $-ba$ donnera $-bac+bca-cba$: par conséquent il viendra

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Alors on mettra un accent à la 2[e] lettre de chaque terme, et deux à la 3[e] : on aura ainsi le dénominateur commun des valeurs de x, y, z.

S'il y a quatre équations, on prendra la lettre d, qui sert de coefficient à la quatrième inconnue u, et on la fera passer à toutes les places dans chaque terme du sextinôme ci-dessus; on aura soin d'alterner les signes dans les termes fournis par chacun d'eux, en commençant par + pour ceux qui viennent d'un terme précédé du signe +, et par — pour ceux qui viennent d'un terme précédé du signe —; enfin on mettra un accent à la 2[e] lettre, deux à la 3[e], et trois à la 4[e]. On aura ainsi le dénominateur commun des quatre inconnues x, y, z, u.

S'il y a un plus grand nombre d'équations, on continuera de la même manière.

Deuxième règle. Quel que soit le nombre des équations, les numérateurs des inconnues pourront se déduire de leur dénominateur

teur commun; et à cet effet, il suffira d'y remplacer, sans toucher aux accens, la lettre qui, dans les équations, sert de coefficient à l'inconnue qu'on veut trouver, par la lettre k qui représente le terme connu placé dans le second membre. Ainsi, on changera a en k pour avoir le numérateur de x; b en k pour avoir celui de y; etc.

Les deux règles que je viens d'exposer se vérifient sur les formules qui ont été trouvées pour deux et pour trois équations; mais une démonstration est nécessaire pour prouver qu'elles s'étendent à tous les autres cas. Je vais rapporter, à quelques changemens près, celle qu'a donnée M. LAPLACE dans *les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année* 1771, et qui a été adoptée par M. CAUCHY dans son *Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique.*

Démonstration des règles précédentes.

130. Je supposerai qu'on ait n équations du 1er degré à n inconnues; et, suivant la notation employée jusqu'ici, je représenterai ces équations ainsi :

$$[1]\quad \begin{cases} ax+by+cz+du+\ldots=k, \\ a'x+b'y+c'z+d'u+\ldots=k', \\ a''x+b''y+c''z+d''u+\ldots=k'', \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''u+\ldots=k''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les points placés après un terme tiennent lieu des termes qui doivent venir après lui; et pareillement les points écrits au-dessous de la 4e équation remplacent toutes celles dont elle doit être suivie.

Je nommerai R la quantité qu'on forme d'après la première règle, dans le cas de ces équations, et je vais d'abord présenter à l'égard de cette fonction plusieurs remarques sur lesquelles repose toute la démonstration.

1°. Par la manière même dont la fonction R est composée, il est évident que l'ensemble de tous ses termes, abstraction faite des signes et des accens, renferme les différens arrangemens qu'on peut

former avec les n lettres $a, b, c, d\ldots$, qui servent de coefficiens aux inconnues $x, y, z, u\ldots$, en écrivant ces n lettres les unes à la suite des autres, et en les changeant d'ordre de toutes les manières possibles.

2°. Il est évident aussi que, dans chaque terme de R, il y a une lettre sans accent, une lettre avec un accent, une lettre avec deux accens, et ainsi de suite.

3°. Les termes affectés du signe + sont ceux où, en comparant chaque lettre avec chacune de celles dont elle est suivie, on trouvera que les *inversions alphabétiques* sont en nombre pair; et les termes affectés du signe — sont ceux où le nombre de ces inversions est impair. Par exemple, si un terme contenait quatre lettres rangées dans l'ordre *dacb*, comme il renferme trois inversions par rapport à d, et une par rapport à c, ce qui fait quatre inversions en tout, il devrait avoir le signe +.

Lorsqu'il n'y a que deux inconnues, la vérité de cette remarque est évidente; car alors, en faisant abstraction des accens, R est $ab-ba$. Si on fait passer la lettre c à toutes les places dans ab, le 1er terme abc n'aura point d'inversion, le 2e acb en aura une, et le 3e cab en aura deux : aussi le 1er est-il précédé de +, le 2e de —, et le 3e de +. Quant à $-ba$, le 1er terme qu'il fournira n'aura pas plus d'inversions que ba, le 2e en aura une de plus, et le 3e en aura deux : aussi le 1er est-il précédé de —, le 2e de +, et le 3e de —. Si on fait encore passer la lettre d à toutes les places dans chacun des six termes qu'on vient de former, comme chacun de ceux-ci est composé des lettres a, b, c, qui précèdent d dans l'alphabet, on ne changera pas le nombre des inversions en mettant d à la fin d'un terme : aussi alors le signe reste-t-il le même. En avançant d d'un rang vers la gauche, il y aura une inversion de plus : aussi le signe change-t-il. En l'avançant encore d'une place, il s'introduit une nouvelle inversion, et il vient un nouveau changement de signe. Ainsi de suite.

4°. Dans la fonction R, deux termes qui, abstraction faite des accens, ne diffèrent l'un de l'autre que par un simple échange entre deux lettres, doivent avoir des signes contraires. En effet, supposons que ces deux termes ne soient différens que par l'échange de a et c, tels que sont les termes $ad'b''c'''$ et $cd'b''a'''$;

pour déduire le second du premier, on peut imaginer que la lettre a passe successivement après chacune des lettres qui la suivent pour venir se placer après c, et qu'alors la lettre c à son tour remonte successivement jusqu'à la place qu'occupait a. Par là l'échange des deux lettres a et c se trouvera effectué Or, chaque déplacement successif amène évidemment une inversion de plus ou de moins, et par conséquent aussi un changement de signe; d'un autre côté, la lettre qui descend doit parcourir une place de plus que celle qui remonte : donc, définitivement, les deux termes doivent être de signes contraires.

5°. Si, dans la fonction R, l'on ajoute ou l'on supprime un égal nombre d'accens à toutes les lettres semblablement accentuées, la fonction R deviendra nulle d'elle-même. Pour fixer les idées, supposons qu'on remplace partout a', b', c',... par a''', b''', c''',... et que l'on considère en particulier le terme qui contient a' et c'''. Puisque tous les arrangemens qu'on peut faire entre les n lettres a, b, c,... se trouvent dans R (1°), il doit y en avoir un qui ne diffère de celui que nous considérons que par le simple changement de a' en a''' et de c''' en a'; donc, lorsque dans R on remplace a', b', c',... par a''', b''', c''',... ces deux termes deviennent égaux. Mais, en vertu de la remarque précédente (4°), ils doivent avoir des signes contraires; donc ils se détruisent. Le même raisonnement s'applique à chaque terme de R; donc R doit devenir zéro.

Maintenant revenons aux équations [1]. Comme toutes les lettres a, b, c,... se trouvent dans chaque terme de R, et chacune avec un nombre différent d'accens, on pourra mettre R sous ces différentes formes,

$$R = Aa + A'a' + A''a'' + \ldots,$$
$$R = Bb + B'b' + B''b'' + \ldots,$$
$$R = Cc + C'c' + C''c'' + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A, A', A'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus la lettre a; B, B' B'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus la lettre b; C, C', C'',... désignant des quantités qui ne contiennent plus c; et ainsi de suite. Il résulte de là qu'en formant, d'après les règles énoncées, les valeurs de x, y, z, on devra avoir

$$x=\frac{Ak+A'k'+A''k''+\ldots}{R},$$
$$y=\frac{Bk+B'k'+B''k''+\ldots}{R},$$
$$z=\frac{Ck+C'k'+C''k''+\ldots}{R}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Toute la question se réduit donc à démontrer que ces valeurs satisfont aux équations [1].

Substituons-les d'abord dans la première : elle devient

$$[2] \quad \frac{Aa+Bb+Cc+\ldots}{R}k+\frac{A'a+B'b+C'c+\ldots}{R}k' +\frac{A''a+B''b+C''c+\ldots}{R}k''+\text{etc.}=k.$$

Observons que Aa contient tous les termes de R où se trouve le facteur a, que Bb contient tous ceux où se trouve b, que Cc contient tous ceux où se trouve c, etc.; donc $R=Aa+Bb+Cc+\ldots$ En répétant un semblable raisonnement, on reconnaît que la fonction R peut encore s'écrire sous ces différentes formes,

$$R=Aa+Bb+Cc+\ldots,$$
$$R=A'a'+B'b'+C'c'+\ldots,$$
$$R=A''a''+B''b''+C''c''+\ldots,$$
etc.

Cela posé, il est évident que, dans l'équation [2], le premier numérateur est égal à R, et que les suivans ne sont autre chose que la quantité R où l'on aurait mis $a, b, c,\ldots$ à la place de $a', b', c',\ldots$ ou de $a'', b'', c'',\ldots$ etc. Donc, en vertu de la 5e remarque, ces derniers numérateurs sont nuls d'eux-mêmes; et par suite l'équation [2] se réduit à $k=k$. Donc les valeurs de $x, y, z,\ldots$ satisfont à la 1re des équations [1]. Il est clair que la même vérification a lieu sur les autres équations; par conséquent l'exactitude de ces valeurs se trouve démontrée.

Discussion des formules fournies par les équations générales du 1er degré.

131. Dans les cas où le dénominateur R se réduit à zéro, les

multiplicateurs de k', k'',... dans l'équation [2], deviennent $\frac{0}{0}$, et alors on ne voit plus comment les équations données sont vérifiées. Ce sont ces cas particuliers que je me propose d'examiner ici.

Je supposerai d'abord qu'il n'y ait que les deux équations

$$[1] \qquad ax+by=k,$$
$$[2] \qquad a'x+b'y=k';$$

et par conséquent que les valeurs générales de x et de y soient

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'},\quad y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}.$$

Premier cas particulier. Admettons que le dénominateur soit zéro, sans qu'aucun des numérateurs le soit. Alors on a

$$ab'-ba'=0,\quad x=\frac{kb'-bk'}{0},\ y=\frac{ak'-ka'}{0}.$$

Les valeurs de x et de y sont donc infinies : c'est-à-dire que, pour satisfaire aux deux équations données, elles doivent surpasser toute grandeur assignable.

De l'égalité $ab'-ba'=0$, on tire $a'=\frac{ab'}{b}$; et par suite l'équation [2], en y mettant cette valeur, devient

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=k',\quad \text{d'où}\quad b'(ax+by)=bk'.$$

Le premier membre n'est autre chose que celui de l'équation [1] multiplié par b'; donc il faudrait que la même relation eût lieu entre les seconds membres, pour que des valeurs de x et de y pussent vérifier à la fois les équations [1] et [2]. Donc on devrait avoir $bk'=b'k$ ou $kb'-bk'=0$; donc le numérateur de x serait égal à zéro, ce qui est contraire aux hypothèses.

De cette manière, l'impossibilité de trouver des valeurs de x et de y qui satisfassent aux deux équations à la fois est bien en évidence; mais elle est encore mieux caractérisée par les valeurs infinies, lesquelles, tout en montrant cette impossibilité, font voir de plus qu'elle vient de ce que les valeurs des inconnues sont trop grandes pour être assignées. Et en effet, on peut imaginer que

$ab'-ba'$ soit d'abord une très-petite quantité. Alors les valeurs de x et de y seraient très-grandes, mais elles satisferaient toujours aux équations ; donc, au moment où $ab'-ba'$ devient zéro, si on ne peut plus opérer directement de vérification sur les équations, c'est uniquement parce qu'alors x et y surpassent toutes les grandeurs assignables (*).

Deuxième cas particulier. Supposons que le dénominateur soit nul en même temps que l'un des numérateurs : par exemple, qu'on aît

$$ab'-ba'=0, \quad kb'-bk'=0.$$

Je dis d'abord que l'autre numérateur $ak'-ka'$ est aussi égal à zéro. En effet, les deux égalités ci-dessus donnent

$$a'=\frac{ab'}{b}, \quad k'=\frac{kb'}{b};$$

et par suite il vient, pour l'autre numérateur,

$$ak'-ka'=\frac{akb'}{b}-\frac{kab'}{b}=0.$$

Si d'abord on avait supposé ce numérateur égal à zéro, on aurait prouvé semblablement que celui de x doit aussi être zéro.

De là il suit que, dans les hypothèses où nous sommes, on doit avoir

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0}.$$

Par eux-mêmes, ces symboles indiquent des quantités indéterminées ; je vais prouver, en remontant aux équations, qu'il doit en effet y avoir indétermination.

Substituons dans l'équation [2] les valeurs de a' et de k' trouvées plus haut, elle devient

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=\frac{kb'}{b}, \quad \text{d'où} \quad \frac{b'}{b}(ax+by)=\frac{b'}{b}k.$$

(*) Considérées par rapport à la question dont les équations expriment les conditions, les valeurs infinies peuvent être quelquefois une solution de cette question. L'application de l'algèbre à la géométrie en fournit des preuves nombreuses : entre autres exemples, je citerai celui où un angle est inconnu, et où l'on trouve pour sa tangente une valeur infinie ; il est clair qu'alors l'angle sera droit.

Alors on voit qu'elle peut se former en multipliant les deux membres de l'équation [1] par $\frac{b'}{b}$; donc toutes les valeurs de x et y qui satisfont à l'une des deux équations doivent aussi convenir à l'autre. Or, si on donne à x successivement telles valeurs qu'on voudra, et qu'on les substitue dans l'équation [1], on pourra, de cette équation, tirer des valeurs correspondantes de y; et de cette manière on aura toujours des solutions qui conviendront à cette équation. Donc, puisqu'elles doivent aussi convenir à la seconde, on est en droit de conclure que les équations proposées admettent une infinité de solutions. Ainsi, c'est avec raison que les formules de l'algèbre donnent alors des valeurs indéterminées.

Toutefois il faut bien remarquer que l'indétermination ne va point jusqu'à permettre de prendre telle valeur de x et telle valeur de y qu'on veut : car l'explication précédente montre que l'une des inconnues doit toujours se calculer au moyen de l'autre.

Le cas actuel comprend celui où l'on aurait $k=0$, $k'=0$, $ab'-ba'=0$: car alors x et y deviennent $\frac{0}{0}$. Si on remonte aux équations proposées, elles se réduisent à celles-ci,

$$ax+by=0, \quad a'x+b'y=0.$$

Elles donnent respectivement

$$y=-\frac{a}{b}x, \quad y=-\frac{a'}{b'}x.$$

Or, de l'hypothèse $ab'-ba'=0$, on tire $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$; donc les deux valeurs de y sont égales quel que soit x, et par conséquent il y a véritablement indétermination.

Cependant il est à remarquer que si on prend le rapport de y à x, il sera déterminé : car on a

$$\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}.$$

Dans ce qui précède, on s'est servi des valeurs $a'=\frac{ab'}{b}$, $k'=\frac{kb'}{b}$; et par conséquent on a admis tacitement que le coefficient b était

différent de zéro. On pourrait aussi considérer les cas où il est nul ; mais je laisserai ces détails de côté.

132. Je m'abstiendrai aussi de discuter les formules relatives à plus de deux équations. Seulement je ferai à ce sujet quelques observations, dont l'objet est de prémunir contre une fausse conclusion à laquelle on pourrait se laisser entraîner par l'analogie.

Dans la discussion du n° précédent, on a pu remarquer que les inconnues x et y devenaient à la fois toutes deux infinies, ou toutes deux indéterminées. Or, l'erreur dont je veux parler serait de penser que, si au lieu de deux équations on en a plusieurs, les valeurs des inconnues devraient aussi devenir à la fois toutes infinies, ou toutes indéterminées.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois équations. Le dénominateur commun des trois inconnues x, y, z, est

$$R = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'';$$

et il peut s'écrire de ces trois manières

$$R = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb'),$$
$$R = b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') + b''(ca' - ac'),$$
$$R = c(a'b'' - b'a'') + c'(ba'' - ab'') + c''(ab' - ba').$$

Posons

$$b'c'' - c'b'' = 0, \quad cb'' - bc'' = 0.$$

De ces égalités on déduit $bc' = cb'$, et par conséquent R devient zéro. Alors le numérateur de x, qui se forme de R en changeant a, a', a'', en k, k', k'', devient zéro aussi. Mais comme le numérateur de y se forme en mettant k, k', k'' dans R, à la place de b, b', b'', il n'y a aucune raison pour que ce numérateur devienne zéro, à moins qu'on n'établisse quelque nouvelle hypothèse. La même chose peut se dire de celui de z. Ainsi la valeur de x peut être indéterminée, tandis que les valeurs de y et z seront infinies.

Le lecteur, qui voudrait une discussion plus complète des formules fournies par la résolution des équations générales du 1er degré, devra consulter le traité d'algèbre de MM. Mayer et Choquet.

CHAPITRE VII.

Analyse indéterminée du 1er *degré.*

Résolution de l'équation ax+by=c ***en nombres entiers.***

133. Si on propose de résoudre une équation du 1er degré à deux inconnues x et y, on peut donner à l'une d'elles telle valeur qu'on veut, et l'équation fait connaître une valeur correspondante de l'autre inconnue. Par là on voit que l'équation admet un nombre infini de solutions; et, pour cette raison, les deux inconnues prennent alors assez ordinairement le nom d'*indéterminées*. Le nombre des solutions ne sera plus autant illimité, si on exige que les valeurs de x et de y soient entières; et il le sera moins encore si on veut qu'elles soient à la fois entières et positives. Des conditions de ce genre ne peuvent pas s'exprimer par des équations : je vais montrer comment on y a égard.

134. Je ramènerai d'abord l'équation à la forme

$$ax+by=c,$$

a, b, c étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs; et comme tous les facteurs qui seraient communs à la fois à ces trois nombres pourraient être supprimés, je supposerai qu'ils l'ont déjà été.

Cela posé, je ferai remarquer dès à-présent un cas où il est impossible de satisfaire à l'équation avec des valeurs entières de x et de y : c'est celui où, après la suppression dont on vient de parler, a et b auraient encore quelque facteur commun. En effet, quelques valeurs entières de x et de y qu'on substitue alors dans l'équation, le premier membre serait divisible par le facteur commun à a et à b, tandis que le second ne le serait point; par conséquent l'égalité est impossible. C'est pourquoi je regarderai tou-

jours dans la suite a et b comme premiers entre eux. On n'exigera pas d'abord que x et y soient entiers positifs, mais entiers seulement.

135. Pour le moment, la question est donc celle-ci : Étant donnée l'équation

$$[1] \qquad ax+by=c,$$

dans laquelle a, b, c, sont des nombres entiers quelconques dont les deux premiers n'ont aucun facteur commun, on demande pour x et y tous les systèmes de valeurs entières qui satisfont à l'équation. Je ferai le raisonnement comme si les coefficiens a et b étaient positifs, mais on apercevra sans peine qu'il s'applique aux autres cas.

La question n'aurait aucune difficulté si le coefficient d'une inconnue, de y, par exemple, était égal à l'unité. L'équation donnerait sur-le-champ $y=c-ax$, et il est évident qu'en prenant pour x un nombre entier quelconque, la valeur correspondante de y serait aussi entière.

Supposons que ni a ni b ne soit égal à 1, et que b soit $<a$. De l'équation on tire d'abord

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

Divisons a par b, nommons q le quotient, et r le reste ; on aura $a=bq+r$, et par suite

$$y=\frac{c-(bq+r)x}{b}=-qx+\frac{c-rx}{b}.$$

On veut que x et y soient des nombres entiers : or, en donnant à x une valeur entière quelconque, la partie $-qx$ sera entière ; donc, pour que y ait aussi une valeur entière, il faut chercher les valeurs entières de x propres à rendre $\frac{c-rx}{b}$ égal à un nombre entier. A cet effet, posons l'équation

$$[2] \qquad \frac{c-rx}{b}=t \quad \text{ou} \quad rx+bt=c,$$

t désignant une nouvelle indéterminée ; et la question est réduite

à résoudre cette équation par des valeurs entières de x et de t. Si le reste r était égal à l'unité, la recherche serait donc terminée.

Supposons $r>1$: on résoudra l'équation ci-dessus par rapport à x, dont le coefficient est moindre que celui de t, et on aura

$$x=\frac{c-bt}{r}.$$

En nommant q' le quotient de b par r, et r' le reste, il viendra

$$x=\frac{c-(rq'+r')t}{r}=-q't+\frac{c-r't}{r};$$

et comme t doit être un nombre entier, on voit qu'il faut choisir ce nombre de manière que $\frac{c-r't}{r}$ soit un nombre entier. C'est pourquoi l'on pose

$$[3] \qquad \frac{c-r't}{r}=t' \quad \text{ou} \quad r't+rt'=c,$$

t' étant une nouvelle indéterminée; et la question est réduite à résoudre cette équation par des valeurs entières de t et t'. Toute recherche serait donc terminée si l'on avait $r'=1$.

Mais soit $r'>1$. La dernière équation donnera

$$t=\frac{c-rt'}{r'},$$

d'où, en nommant q'' le quotient de r par r', et r'' le reste, on aura

$$t=\frac{c-(r'q''+r'')t'}{r'}=-q''t'+\frac{c-r''t'}{r'}.$$

On posera de nouveau

$$[4] \qquad \frac{c-r''t'}{r'}=t'' \quad \text{ou} \quad r''t'+r't''=c,$$

t'' étant encore une nouvelle indéterminée; et l'on aura à chercher les solutions entières de cette dernière équation.

La marche du calcul est maintenant assez évidente; et l'on voit clairement que la question devra être regardée comme résolue, dès qu'on parviendra à une équation dans laquelle une indéterminée aura pour coefficient l'unité. Or c'est ce qui ne peut manquer

d'arriver : car les coefficiens r, r', r'',... qui entrent dans les équations auxiliaires [2], [3], [4],... sont les restes successifs qu'on obtient en opérant, comme si on cherchait le plus grand commun diviseur de a et de b.

Pour fixer les idées, supposons que r'' soit égal à 1, l'équation [4] donne

$$[5] \qquad t' = -r't'' + c.$$

Les raisonnemens par lesquels nous sommes passés ont montré que t, t', t'' devaient être des nombres entiers. Ici on voit qu'en donnant à t'' telles valeurs entières qu'on voudra, t' sera toujours entier ; et dès-lors il est clair que les indéterminées précédentes, en remontant jusqu'à x et y, seront aussi entières. Ainsi l'équation proposée admet une infinité de solutions en nombres entiers (*).

Mais on peut se dispenser de calculer les indéterminées intermédiaires t et t' : car il est facile d'avoir des formules générales qui expriment immédiatement en fonction de t'' les indéterminées primitives x et y. Pour y parvenir, remarquez que les valeurs de y, x, t et t', à cause des équations [2], [3], [4], [5], peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} y &= -qx + t, \\ x &= -q't + t', \\ t &= -q''t' + t'', \\ t' &= -r't'' + c. \end{aligned}$$

Alors on voit sur-le-champ qu'il faut substituer la valeur de t' dans celle de t ; puis celles de t et t', exprimées en t'', dans celle de x ; puis enfin celles de x et t, aussi exprimées en t'' dans celle de y.

(*) Si a et b n'étaient point premiers entre eux, l'impossibilité d'avoir des valeurs entières pour x et y serait mise en évidence par la méthode même. En effet, alors dans la suite des restes r, r', r'',... il y en a un qui divise exactement le précédent, et qui est le plus grand commun diviseur de a et de b : supposons que ce soit r'', et qu'on ait $r' = kr''$. L'équation [4] donnera

$$t' = \frac{c - r't''}{r''} = -kt'' + \frac{c}{r''};$$

et de là on conclut qu'il n'existe aucune valeur entière de t'' qui rende t' entier, à moins que r'' ne divise aussi c. C'est précisément le cas d'impossibilité qui a été déjà remarqué (134).

Le succès de la méthode précédente est fondé sur la diminution progressive que la division opère dans les coefficiens des indéterminées ; mais rien n'empêche de diviser aussi le terme constant qui se trouve dans les équations successives. De cette manière, le calcul renfermera des nombres moins considérables, et cet avantage n'est pas à négliger.

136. Pour exemple, soit l'équation

$$3x-8y=43.$$

Comme le multiplicateur de x est ici moindre que celui de y, c'est par rapport à x que je résous l'équation : il vient

$$x=\frac{8y+43}{3}.$$

En divisant 8 par 3, on trouve le quotient 2 avec le reste 2 ; et en divisant 43 par 3, on trouve le quotient 14 avec le reste 1, donc on a

$$x=2y+14+\frac{2y+1}{3}=2y+14+t,$$

en posant

$$2y+1=3t.$$

De cette équation, on tire

$$y=\frac{3t-1}{2}=t+\frac{t-1}{2}=t+t',$$

en remarquant que $3=2\times1+1$, et en posant

$$t-1=2t'.$$

Comme dans cette équation le coefficient de t est l'unité, on aura

$$t=2t'+1,$$

et l'on pourra donner à t' toutes les valeurs entières possibles.

Au moyen de cette valeur, on trouve

$$y=t+t'=2t'+1+t'=3t'+1;$$

puis, en remontant à x, il vient

$$x=2y+14+t=2(3t'+1)+14+2t'+1=8t'+17.$$

Ainsi, les formules qui expriment y et x, en fonctions de t', sont

$$y=3t'+1, \quad x=8t'+17.$$

En donnant à t' les valeurs $t'=0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouvera

$$y= 1, 4, 7, 10, \text{ etc.}$$
$$x= 17, 25, 33, 41, \text{ etc.}$$

On pourrait aussi donner à t' les valeurs négatives $t'=-1, -2, -3$, etc.

137. Dans l'exemple ci-dessus, les valeurs de y et de x forment deux progressions arithmétiques, dont la première a pour raison le nombre 3, coefficient de x dans l'équation proposée; et dont la seconde a pour raison le nombre 8, qui est le coefficient de y, pris avec un signe contraire. On pourrait reconnaître que cette proposition est générale, en effectuant les substitutions successives dont il a été parlé à la fin du n° 135; mais la démonstration suivante est préférable.

Par l'analyse du n° cité, on est certain que l'équation

$$[1] \qquad ax+by=c$$

doit admettre une infinité de solutions entières, quels que soient les signes et les grandeurs des nombres a et b, pourvu qu'ils soient premiers entre eux. Supposons qu'une de ces solutions soit

$$x=\text{A}, \quad y=\text{B}.$$

Ces nombres devant satisfaire à l'équation [1], on aura

$$a\text{A}+b\text{B}=c.$$

En retranchant cette égalité de l'équation [1], il vient

$$a(x-\text{A})+b(y-\text{B})=0;$$

et de là on tire

$$y=\text{B}+\frac{a(\text{A}-x)}{b}.$$

Les valeurs de x doivent être entières, et telles que y soit aussi un nombre entier; donc le produit $a(\text{A}-x)$ doit être divisible par b.

Or a est premier avec b ; donc $A-x$ doit être un multiple de b (*). On posera donc

$$A-x=bt,$$

t désignant un nombre entier quelconque; et par suite on aura

$$x=A-bt,\quad y=B+at.$$

Ces formules mettent en évidence la loi des valeurs qu'on obtient pour x et y, quand on donne à t successivement toutes les valeurs entières. Si on prend $t=0, 1, 2, 3, \ldots$ il vient

$$x=A,\ A-b,\ A-2b,\ A-3b, \text{ etc.}$$
$$y=B,\ B+a,\ B+2a,\ B+3a, \text{ etc.};$$

et si on prend $t=-1, -2, -3\ldots$, il vient

$$x=A+b,\ A+2b,\ A+3b, \text{ etc.}$$
$$y=B-a,\ B-2a,\ B-3a, \text{ etc.}$$

En général, quand t croît d'une unité, y augmente de a, et x augmente de $-b$. Donc *les solutions entières de l'équation* $ax+by=c$ *sont les termes correspondans de deux progressions arithmétiques. Dans la progression relative à chacune des indéterminées* x *et* y, *la raison est égale au coefficient de l'autre indéterminée. Mais il faut avoir soin de prendre l'un de ces coefficiens avec le signe qu'il a dans l'équation, et l'autre avec un signe contraire.*

Il est d'ailleurs tout-à-fait indifférent que ce soit le coefficient de x ou celui de y qu'on prenne avec un signe contraire : car, dans les formules qui expriment x et y, on peut changer les signes des termes $+bt$ et $-at$, attendu que l'indéterminée t peut recevoir toutes les valeurs possibles, positives et négatives.

138. La proposition qu'on vient de démontrer donne le moyen d'obtenir sur-le-champ toutes les solutions entières d'une équa-

(*) *Si un nombre premier divise un produit de deux facteurs, et s'il est premier par rapport à l'un d'eux, il devra diviser l'autre.* On peut regarder cette proposition comme connue par l'arithmétique; et d'ailleurs elle sera démontrée plus loin, chap. XII.

tion de la forme $ax+by=c$, dès qu'on en connaît une seule. Ainsi, l'équation

$$7x-5y=9$$

étant proposée, on reconnaît, après quelques tâtonnemens, qu'elle est satisfaite par $x=2$, $y=1$; et dès-lors, en observant que $+7$ et -5 sont les coefficiens de x et de y dans l'équation, on pourra poser les formules générales

$$x=2+5t,\ y=1+7t.$$

En faisant $t=0, 1, 2, 3, \ldots$ et $t=-1, -2, -3, \ldots$ on aura les solutions de l'équation.

139. Dans l'équation générale, supposons $c=0$, elle devient

$$ax+by=0;$$

et comme alors elle admet évidemment la solution $x=0$ et $y=0$, les formules générales seront

$$x=bt,\quad y=-at.$$

Si on veut trouver directement ces résultats, on tirera de l'équation la valeur $y=-\frac{ax}{b}$; puis on remarquera que a et b étant premiers entre eux, les valeurs entières de x qui rendent y entier doivent être multiples de b. Donc, t désignant un nombre entier quelconque, on doit avoir $x=bt$, et par suite $y=-at$.

Exemple......... $31x-22y=0$,
on aura $x=22t,\ y=31t$.

140. Supposons c multiple de a ou de b. Soit $c=bd$: l'équation à résoudre sera

$$ax+by=bd.$$

Elle a évidemment pour solution $x=0$, $y=d$; donc les valeurs générales seront

$$x=bt,\ y=d-at.$$

De l'équation on peut tirer $x=\frac{b(d-y)}{a}$, et de là on conclut que $d-y$ doit être un multiple de a. On posera donc $d-y=at$, et par suite on retrouve les formules $y=d-at$, $x=bt$.

Exemple.......... $5x-7y=21$.

Ici la solution évidente de l'équation est $x=0$, $y=-3$; et en conséquence les valeurs générales sont

$$x=7t,\ y=-3+5t.$$

141. J'indiquerai encore deux simplifications qui se rencontrent quelquefois dans les calculs. Un exemple suffira pour les comprendre.

Soit l'équation

$$80x-17y=39.$$

On en tire d'abord

$$y=\frac{80x-39}{17}.$$

Si on divise 80 par 17, on a $80=17\times4+12$; mais comme le reste 12 surpasse la moitié du diviseur 17, je ferai remarquer qu'on peut écrire

$$80=17\times(4+1)+12-17=17\times5-5.$$

C'est-à-dire qu'en augmentant le quotient d'une unité, on aura un reste négatif moindre que la moitié du diviseur, ce qui opère dans les nombres une réduction plus rapide. Quant à la division de 39 par 17, elle donne $39=17\times2+5$, et il n'y a point lieu à changer le reste 5. En conséquence on aura

$$y=\frac{(17\times5-5)x-17\times2-5}{17}=5x-2-\frac{5x+5}{17}.$$

Mais il se présente encore une autre simplification, laquelle résulte de ce que 5 est facteur dans $5x+5$. En effet, ce numérateur se décompose en $5(x+1)$, et comme le dénominateur 17 n'a aucun facteur commun avec 5, il s'ensuit que pour rendre le produit $5(x+1)$ divisible par 17, il faut prendre $x+1$ égal à un multiple quelconque de 17. C'est pourquoi l'on posera l'équation auxiliaire

$$x+1=17t;$$

et par suite on trouve

$$x=17t-1,\quad y=80t-7.$$

Résolution de l'équation ax+by=c *en nombres entiers positifs. Application à des problèmes. Remarques sur les inégalités.*

142. Quand on veut résoudre l'équation $ax+by=c$ en nombres entiers positifs, on commence par faire les calculs comme si les nombres devaient être entiers seulement; et, d'après ce qui précède, on a, pour x et y, des expressions de la forme

$$x=A-bt, \quad y=B+at.$$

Mais alors, au lieu d'attribuer à t toutes les valeurs entières possibles, on ne doit plus choisir que celles qui rendent x et y positifs. De là résultent pour t certaines limitations qui sont toujours faciles à déterminer.

En premier lieu, considérons le cas où a et b sont de même signe dans l'équation

[1] $$ax+by=c.$$

Je les supposerai positifs, parce que, s'ils étaient négatifs, on pourrait les rendre positifs en changeant tous les signes de l'équation. Je supposerai aussi c positif : autrement l'équation serait impossible en nombres positifs.

Ecrivons les valeurs générales de x et y sous cette forme,

$$x=b\left(\frac{A}{b}-t\right), \quad y=a\left(t-\frac{-B}{a}\right).$$

Alors on voit que, pour rendre x positif, il faut et il suffit qu'on prenne $t<\frac{A}{b}$; et pareillement, pour que y soit positif, il faut et il suffit qu'on prenne $t>\frac{-B}{a}$. Donc, pour n'avoir que des solutions positives et entières, on ne devra attribuer à t que les valeurs entières comprises entre les deux limites

$$t>\frac{-B}{a}, \quad t<\frac{A}{b}.$$

Toutefois il faut remarquer que les signes $>$ et $<$ n'excluent pas l'égalité : c'est-à-dire que si la première limite, par exemple,

était un nombre entier n, on pourrait faire $t=n$. La valeur correspondante de x serait $x=0$.

De ce que t doit être un nombre entier choisi entre deux limites, il s'ensuit que le nombre des solutions de l'équation est lui-même limité ; et c'est ce qui est évident d'ailleurs sur l'équation même. En effet, a et b étant positifs, si on substitue pour x et y des nombres positifs, les deux termes $ax+by$ seront toujours positifs ; et comme leur somme doit rester constamment égale à c, il est impossible qu'aucun des deux termes augmente indéfiniment.

Il pourra se faire qu'il n'y ait aucun nombre entier entre les limites assignées ci-dessus pour t : alors on conclura que l'équation est impossible. C'est ce qui arriverait si ces limites étaient resserrées entre deux nombres entiers consécutifs, comme sont celles-ci, $t>4\frac{1}{3}$ et $t<4\frac{5}{7}$; ou bien encore si elles étaient contradictoires, comme, par exemple, $t>4\frac{1}{3}$ et $t<3\frac{5}{7}$.

En second lieu, considérons le cas où a et b sont de signes contraires. Supposons qu'il s'agisse de l'équation

$$[2] \qquad ax-by=c,$$

dans laquelle a et b représentent deux nombres positifs. Alors les valeurs générales de x et de y sont de la forme

$$x=A+bt, \quad y=B+at.$$

Or, on peut les écrire ainsi

$$x=b\left(t-\frac{-A}{b}\right), \quad y=a\left(t-\frac{-B}{a}\right);$$

et sur-le-champ on reconnaît que, pour rendre x et y positifs, il faut avoir à la fois

$$t>\frac{-A}{b} \quad \text{et} \quad t>\frac{-B}{a}.$$

C'est-à-dire qu'on peut attribuer à t toutes les valeurs entières au-dessus de la plus petite de ces limites (sans exclure l'égalité, si cette limite est un nombre entier).

Par là on voit que l'équation $ax-by=c$ admet toujours un nombre infini de solutions entières et positives, tandis que l'équation $ax+by=c$ n'en a jamais qu'un nombre limité, et même peut n'en pas avoir du tout.

Appliquons ce qui précède à quelques problèmes.

143. PROBLÈME I. *Une société d'hommes et de femmes a dépensé dans une fête 1000 francs. Les hommes ont payé 19 francs et les femmes 11 francs. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?*

Soit x le nombre des hommes et y celui des femmes : il faudra résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$[3] \qquad 19x + 11y = 1000.$$

En faisant les calculs comme dans le n° 136, et profitant des simplifications indiquées par le n° 141, j'ai successivement

$$y = \frac{1000 - 19x}{11} = 91 - 2x + \frac{3x - 1}{11} = 91 - 2x + t\,,$$
$$3x - 1 = 11t,$$
$$x = \frac{11t + 1}{3} = 4t + \frac{1 - t}{3} = 4t + t',$$
$$1 - t = 3t',$$
$$t = 1 - 3t'.$$

Parvenu à ce point, je remonterai à x et y, et il viendra

$$x = 4t + t' = 4(1 - 3t') + t' = 4 - 11t',$$
$$y = 91 - 2x + t = 91 - 2(4 - 11t') + (1 - 3t') = 84 + 19t'.$$

Ainsi les formules générales, qui expriment x et y en t', sont

$$x = 4 - 11t', \quad y = 84 + 19t'.$$

Pour que x soit positif, il faut et il suffit qu'on ait $11t' < 4$ ou $t' < \frac{4}{11}$; et pour que y soit aussi positif, il faut et il suffit qu'on ait $19t' > -84$ ou $t' > -4\frac{8}{19}$. Donc on devra prendre pour t' l'une des valeurs

$$t' = 0, -1, -2, -3, -4.$$

A ces valeurs correspondent

$$x = 4, \quad 15, \quad 26, \quad 37, \quad 48;$$
$$y = 84, \quad 65, \quad 46, \quad 27, \quad 8.$$

Le nombre des solutions est limité, et l'on devait s'y attendre,

puisque dans l'équation [3] les termes en x et y sont de même signe. Il y en a cinq en tout, savoir :

1re solution... 4 hommes et 84 femmes,
2e .... 15 hommes et 65 femmes,
3e .... 26 hommes et 46 femmes,
4e .... 37 hommes et 27 femmes,
5e .... 48 hommes et 8 femmes.

Remarque. D'après ce qui a été dit n° 138, il suffit de se procurer une seule solution de l'équation [3] pour former à l'instant les valeurs générales de x et y. Or, si après avoir trouvé plus haut $t=1-3t'$, on fait $t'=0$, et si on calcule les valeurs correspondantes $t=1$, $x=4$, $y=84$, il est évident que les valeurs $x=4$, $y=84$, doivent former une solution de l'équation ; donc alors on pourrait poser immédiatement $x=4-11t'$, $y=84+19t'$.

144. PROBLÈME II. *Avec des règles de deux longueurs différentes, les unes de 5 décimètres et les autres de 7, on propose de faire, en les plaçant les unes à la suite des autres, une longueur de 23 décimètres.*

Ce problème revient à résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$[4] \qquad 5x+7y=23.$$

On en tire successivement

$$x=\frac{23-7y}{5}=5-y-\frac{2+2y}{5}=5-y-2t,$$

$$1+y=5t,$$

$$y=5t-1,$$

$$x=6-7t.$$

Pour que y soit positif, on doit faire $t>\frac{1}{5}$; et pour que x soit aussi positif, il faut faire $t<\frac{6}{7}$. Comme il ne tombe aucun nombre entier entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{6}{7}$, on doit en conclure que le problème est impossible.

Remarque. L'équation aurait une infinité de solutions si l'on admettait des valeurs négatives pour l'une des inconnues. Par exemple, si on fait $t=0$, on aura $x=6$, $y=-1$. Cette solution indique qu'en plaçant les unes à la suite des autres 6 règles de

5 décimètres, et en portant ensuite sur la ligne ainsi formée une règle de 7 décimètres, il restera la longueur demandée 23 décimètres. Cette interprétation rentre dans des règles générales déjà établies (102).

145. Problème III. *Quelqu'un a acheté des chèvres et des moutons. Chaque chèvre lui coûte 8 fr., et chaque mouton 27 fr. Il se trouve qu'il a payé pour les chèvres 97 fr. de plus que pour les moutons. Combien y avait-il de chèvres et combien de moutons?*

Soit x le nombre des chèvres et y celui des moutons. Il faudra résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$[5] \qquad 8x - 27y = 97:$$

On en tire

$$x = \frac{27y+97}{8} = 3y + 12 + \frac{3y+1}{8} = 3y + 12 + t,$$
$$3y + 1 = 8t,$$
$$y = \frac{8t-1}{3} = 3t - \frac{t+1}{3} = 3t - t',$$
$$t + 1 = 3t',$$
$$t = 3t' - 1.$$

En faisant $t'=0$, il vient $t=-1$, $y=-3$, $x=2$. Par suite, les valeurs générales de x et de y sont

$$x = 27t' + 2, \quad y = 8t' - 3.$$

Les valeurs de x et de y devant être positives, ces formules montrent que t' doit être lui-même positif, et assez grand pour qu'on ait $8t' > 3$ ou $t' > \frac{3}{8}$. On peut donc donner à t' toutes les valeurs $t' = 1, 2, 3$, etc., jusqu'à l'infini ; et par conséquent on formera ce tableau

$t'=$	1,	2,	3,	4,	etc.
$x=$	29,	56,	83,	110,	etc.
$y=$	5,	13,	21,	29,	etc.

Le problème admet, comme on voit, une infinité de solutions ; et l'on doit répondre qu'il y avait 29 chèvres et 5 moutons, ou 56 chèvres et 13 moutons, ou 83 chèvres et 21 moutons, etc.

$$N=11x+3=11(13+17\theta)+3=146+187\theta,$$
$$N=17y+10=17(8+11\theta)+10=146+187\theta.$$

Ces deux expressions sont égales, et l'on devait s'y attendre, puisque l'équation [6] a été formée en égalant les valeurs de N.

On voit qu'il y a une infinité de nombres qui remplissent les deux conditions de l'énoncé, et qu'ils sont tous représentés par la formule

$$N=146+187\theta,$$

dans laquelle θ est une indéterminée qui peut recevoir toutes les valeurs entières positives, en commençant par zéro.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'elle satisfait à l'énoncé : c'est-à-dire que si on la divise par 11 le reste sera 3, et que si on la divise par 17 le reste sera 10. En effet, on a

$$\frac{N}{11}=17\theta+13+\frac{3}{11}; \text{ et } \frac{N}{17}=11\theta+8+\frac{10}{17}.$$

147. Problème V. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 11 *il reste* 3, *qu'en le divisant par* 17 *il reste* 10, *et qu'en le divisant par* 37 *il reste* 13.

Dans le problème précédent, on a trouvé la formule des nombres qui remplissent les deux premières conditions. En mettant x au lieu de θ, cette formule est

$$[8] \qquad N=146+187x.$$

Mais pour que le nombre N remplisse la troisième condition, il doit être de la forme $N=37y+13$; donc on a l'équation

$$37y+13=146+187x.$$

Il est bien entendu que x et y doivent être des nombres entiers et positifs.

Il viendra d'abord

$$y=\frac{187x+133}{37}=5x+3+\frac{2x+22}{37}=5x+3+2t,$$
$$x+11=37t,$$
$$x=37t-11.$$

Pour que x soit positif, on ne doit donner à t que des valeurs

positives au-dessus de zéro. Mais en faisant $t'=1+\theta$, on pourra attribuer à θ toutes les valeurs entières positives, en commençant par zéro. Par ce changement, x devient

$$x=26+37\theta;$$

et en substituant cette valeur dans la formule [8] on obtient

$$N=5008+6919\theta.$$

Telle est la formule générale des nombres qui satisfont aux trois conditions de l'énoncé.

148. La détermination des limites a conduit (142) à rechercher quelles sont les valeurs de l'indéterminée finale t, qui rendent positives des expressions de la forme $A+bt$, ou, en d'autres termes, qui sont telles qu'on ait

$$A+bt>0.$$

On peut d'abord transposer le terme A comme s'il s'agissait d'une équation, ce qui donne $bt>-A$.

Puis, si b est positif, on pourra diviser de part et d'autre par b; et on aura $t>\frac{-A}{b}$.

Mais si b est négatif, la division par b changera les signes des deux membres de l'inégalité, et par conséquent, d'après le langage adopté (20), le membre qui était le plus petit devient le plus grand. Alors on doit donc conclure $t<\frac{-A}{b}$.

Supposons, plus généralement, qu'on ait l'inégalité

[a]. $$at+b>ct+d.$$

Par la transposition des termes, on a

$$(a-c)t>d-b.$$

Puis de là, suivant que $a-c$ est une quantité positive ou négative, on tirera

$$t>\frac{d-b}{a-c}, \quad \text{ou} \quad t<\frac{d-b}{a-c}.$$

C'est là ce qu'on appelle *résoudre l'inégalité* [a]

Je n'entrerai pas dans de plus longs détails au sujet des inégalités. Les transformations qu'on peut avoir à leur faire subir ont une telle analogie avec celles qu'on fait sur les équations, qu'il sera toujours facile de les apercevoir. La seule précaution à prendre, c'est d'éviter les erreurs de signes; et pour cela il suffira de bien se rappeler les conventions établies sur l'ordre des grandeurs (20).

Résolution, en nombres entiers, de plusieurs équations du 1er degré, dont le nombre est moindre que celui des inconnues.

149. Soit proposé de résoudre, en nombres entiers positifs, les deux équations

$$[1] \qquad 2x + 14y - 7z = 341,$$
$$[2] \qquad 10x + 4y + 9z = 473.$$

Si on multiplie la 1re équation par 5, et qu'ensuite on en retranche la 2e, x sera éliminé, et l'on aura

$$66y - 44z = 1232,$$

ou, en divisant les deux membres par 22,

$$[3] \qquad 3y - 2z = 56.$$

Or, les valeurs entières de y et z, qui conviennent aux équations proposées, doivent convenir aussi à celle-ci : en conséquence, je lui applique la méthode connue, et j'en tire

$$y = 2t, \quad z = 3t - 28.$$

S'il ne s'agissait que de l'équation [3], on aurait ses solutions entières, en attribuant à t toutes les valeurs entières possibles. Mais cette équation tient lieu seulement d'une des proposées (83), de sorte qu'il faut encore que les valeurs de y et z soient telles qu'en leur adjoignant certaines valeurs de x, qui doivent aussi être entières, l'une de ces équations soit vérifiée. C'est pourquoi je vais substituer les valeurs précédentes de y et z dans l'équation [1], et chercher les valeurs entières de x et t qui conviennent à l'équation résultante.

La substitution donne

$$2x + 7t = 145;$$

et de là on tire, en désignant par t' un nombre entier quelconque,

$$x=69+7t', \quad t=1-2t'.$$

Alors je porte la valeur $t=1-2t'$ dans celles de y et z, et je trouve les inconnues x, y, z exprimées en t', savoir :

$$x=69+7t', \quad y=2-4t', \quad z=-25-6t'.$$

Ces formules font connaître toutes les valeurs entières qui conviennent aux proposées.

Si l'on veut en outre que ces valeurs soient positives, il faut choisir t', de manière qu'on ait

$$\begin{array}{rl} 69+7t'>0 & \text{d'où } t'>-9\tfrac{6}{7}, \\ 2-4t'>0 & \text{d'où } t'<\tfrac{1}{2}, \\ -25-6t'>0 & \text{d'où } t'<-4\tfrac{1}{6}. \end{array}$$

Par là on voit que les seules valeurs qu'on doive attribuer à t' sont $t'=-5, -6, -7, -8, -9$. En substituant ces nombres, on aura cinq solutions entières et positives :

$$\begin{array}{llllll} x=34, & 27, & 20, & 13, & 6; \\ y=22, & 26, & 30, & 34, & 38; \\ z=\ 5, & 11, & 17, & 23, & 29. \end{array}$$

150. L'exemple précédent montre assez la méthode qu'il faut suivre toutes les fois qu'on veut résoudre, en nombres entiers positifs, des équations du 1er degré, qui contiennent une inconnue de plus qu'il n'y a d'équations. Mais pour ne rien laisser à désirer, je l'appliquerai encore au cas de trois équations.

Soient donc, entre les quatre inconnues x, y, z et u, trois équations du 1er degré, que je nommerai collectivement les équations [A].

Par l'élimination de x, on trouvera, entre y, z et u, deux équations du 1er degré : je les nommerai [B].

Par l'élimination de y, on déduira de ces dernières une équation du 1er degré entre z et u : je la nommerai [C].

De l'équation [C] on tire z et u, exprimés en fonction d'une indéterminée auxiliaire t.

Ces valeurs étant substituées dans l'une des équations [B], on en aura une entre y et t, d'où l'on tirera les valeurs de y et t en fonction d'une nouvelle indéterminée t'; et par suite on pourra aussi exprimer z et u en t'.

Enfin, ces valeurs de y, z, u, étant portées dans l'une des équations [A], il en résulte une équation entre x et t', laquelle fera trouver x et t', et par suite aussi y, z et u, en fonction d'une nouvelle indéterminée t''.

Quand les équations proposées doivent être résolues en nombres entiers de signes quelconques, on pourra attribuer à l'indéterminée finale t'' toutes les valeurs entières possibles. Mais lorsqu'on restreint les solutions à celles qui sont à la fois entières et positives, il existera pour t'' certaines limitations qu'il sera toujours facile d'assigner.

151. Lorsqu'on a deux inconnues de plus que d'équations, ou davantage, l'indétermination est encore plus grande; mais la condition d'avoir des valeurs qui soient à la fois entières et positives peut limiter considérablement le nombre des solutions. Je me bornerai ici à deux exemples : ils suffiront pour montrer comment la méthode exposée plus haut doit se modifier dans les cas dont il s'agit.

On demande de résoudre, en nombres entiers positifs, cette équation

$$[4] \quad 10x+9y+7z=58.$$

Comme l'inconnue z a le plus petit coefficient, j'en tirerai

$$z=\frac{58-9y-10x}{7};$$

et, en effectuant la division autant que possible, il vient

$$z=8-y-x+\frac{2-2y-3x}{7}.$$

Le numérateur $2-2y-3x$ doit être un nombre entier divisible par 7 : en conséquence je pose

$$2-2y-3x=7t,$$

d'où

$$y=\frac{2-3x-7t}{2}=1-x-3t-\frac{x+t}{2}.$$

Et $x+t$ devant aussi être un nombre entier divisible par 2, je pose encore

$$x+t=2t', \quad \text{d'où} \quad x=-t+2t'.$$

En remontant à y et à z, on exprimera ces inconnues en fonction de t et t'. On aura ainsi les trois formules

$$[5] \quad x=-t+2t', \quad y=1-2t-3t', \quad z=7+4t+t'.$$

Pour avoir toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée [4], on doit donner à t et t' toutes les valeurs entières qui satisferont à la fois aux trois conditions

$$[6] \quad -t+2t'>0, \quad 1-2t-3t'>0, \quad 7+4t+t'>0.$$

De là résultent pour t et t' des limitations qu'on apercevra en pratiquant sur ces inégalités des opérations tout-à-fait analogues à celles de l'élimination. Pour plus de netteté, je supposerai que les signes $>$ excluent l'égalité, ce qui revient à dire qu'aucune des trois inconnues x, y, z, ne doit être zéro.

D'abord, si on multiplie la 1[re] par 3 et la 2[e] par 2, elles deviennent

$$-3t+6t'>0, \quad 2-4t-6t'>0.$$

Les deux premiers membres étant >0, à plus forte raison leur somme doit-elle être >0. Par cette addition t' disparaît, et l'on a

$$2-7t>0, \quad \text{d'où} \quad t<\tfrac{2}{7}.$$

Une semblable élimination, entre la 2[e] inégalité et la 3[e], donne

$$22+10t>0, \quad \text{d'où} \quad t>-2\tfrac{1}{5}.$$

On voit que l'indéterminée t est resserrée entre les limites $-2\frac{1}{5}$ et $+\frac{2}{7}$; donc on doit prendre seulement

$$t=-2, -1, \quad 0.$$

Considérons successivement chacune de ces valeurs.

1°. Si on fait $t=-2$ dans les trois inégalités [6], elles deviendront

$$2+2t'>0, \quad 5-3t'>0, \quad -1+t'>0,$$

d'où

$$t'>-1, \quad t'<1\tfrac{2}{3}, \quad t'>1.$$

Comme il n'y a aucun nombre entier entre 1 et $1\frac{2}{3}$, il s'ensuit que la valeur $t=-2$ doit être rejetée.

2°. Si on fait $t=-1$, les trois inégalités [6] deviennent

$$1+2t'>0,\quad 3-3t'>0,\quad 3+t'>0.$$

d'où

$$t'>-\tfrac{1}{2},\quad t'<+1,\quad t'>-3.$$

Entre $-\frac{1}{2}$ et $+1$ il n'y a pas d'autre nombre entier que 0; donc on pourra prendre

$$t=-1 \quad \text{et} \quad t'=0.$$

3°. Si on fait $t=0$, les inégalités deviennent

$$2t'>0,\quad 1-3t'>0,\quad 7+t'>0,$$

d'où

$$t'>0,\quad t'<\tfrac{1}{3},\quad t'>-7.$$

Entre 0 et $\frac{1}{3}$ il n'y a aucun nombre entier; par conséquent la valeur $t=0$ doit aussi être rejetée.

Les seules valeurs de t et t', auxquelles correspondent des valeurs entières et positives de x, y, z, sont donc $t=-1$ et $t'=0$. En les substituant dans les formules [5] on obtient

$$x=1,\quad y=3,\quad z=3;$$

et cette solution est la seule qu'on doive admettre pour l'équation [4].

152. Pour second exemple, je proposerai les deux équations

$$6x+7y+3z+2u=100,$$
$$24x+12y+7z+3u=200.$$

En éliminant u, on a

$$30x+3y+5z=100.$$

Comme dans cette équation les termes $30x$ et 100 sont divisibles par 5, le mieux sera de prendre la valeur de z : elle sera

$$z=20-6x-\frac{3y}{5}.$$

Alors on voit que y doit être un multiple de 5. Par conséquent, on aura

$$y=5t,$$
$$z=20-6x-3t;$$

puis, en substituant ces valeurs dans la 1[re] des deux équations proposées, il vient

$$6x+35t+60-18x-9t+2u=100,$$

ou bien $$-12x+26t+2u=40,$$

d'où $$u=20+6x-13t.$$

Les trois inconnues y, z, u, se trouvent ainsi exprimées en fonction de x et de l'indéterminée auxiliaire t.

Pour résoudre les deux équations proposées en nombres positifs, il faut évidemment prendre x et t positifs, puisque x est une des inconnues primitives, et que $y=5t$. Mais il faut satisfaire aussi aux inégalités

$$20-6x-3t>0, \quad 20+6x-13t>0.$$

En les ajoutant, x disparaît, et il reste

$$40-16t>0, \quad \text{d'où} \quad t<2\tfrac{1}{2};$$

donc les seules valeurs qu'on doive donner à t sont $t=0,\ 1,\ 2$.

Avec la valeur $t=0$ on aurait

$$y=0, \quad z=20-6x, \quad u=20+6x;$$

et l'on voit qu'on peut faire $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$. De là résultent, pour les équations proposées, les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=20\\u=20,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=0\\z=14\\u=26,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=0\\z=8\\u=32,\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\y=0\\z=2\\u=38.\end{cases}$$

Avec la valeur $t=1$, on aurait

$$y=5, \quad z=17-6x, \quad u=7+6x;$$

et les seules valeurs admissibles de x sont $x=0,\ 1,\ 2$. De là résultent les trois solutions

$$\begin{cases}x=0\\y=5\\z=17\\u=7,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=5\\z=11\\u=13,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=5\\z=5\\u=19.\end{cases}$$

Enfin, avec la valeur $t=2$, on aurait

$$y=10, \quad z=14-6x, \quad u=-6+6x.$$

Les seules valeurs admissibles de x sont $x=1$, 2; et de là résultent encore les deux solutions

$$\begin{cases} x=1 \\ y=10 \\ z=8 \\ u=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=10 \\ z=2 \\ u=6. \end{cases}$$

En tout, neuf solutions. Il n'y en aurait plus que trois si on excluait celles dans lesquelles une inconnue est zéro.

153. Comme exercices, je placerai ici les énoncés suivans :

PROBLÈME. *Quelqu'un achète 100 pièces de bétail pour 100 louis, savoir : des porcs à 3 louis $\frac{1}{2}$ la pièce, des chèvres à 1 louis $\frac{1}{3}$, et des moutons à $\frac{1}{2}$ louis. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce ?*

RÉPONSE : Nombre des porcs = 5, 10, 15;
Nombre des chèvres = 42, 24, 6;
Nombre des moutons = 53, 66, 79.

PROBLÈME. *Un orfèvre a trois sortes d'argent; le marc de la première contient 7 onces d'argent fin, le marc de la seconde $5\frac{1}{2}$, le marc de la troisième $4\frac{1}{2}$. Il veut faire un alliage dont le marc contienne 6 onces d'argent fin. Combien doit-il prendre, en nombres entiers, de marcs de chaque sorte ?*

RÉPONSE : Nomb. des marcs de la 1re sorte = 10, 12, 14, 16, 18;
Nomb. des marcs de la 2e = 20, 15, 10, 5, 0;
Nomb. des marcs de la 3e = 0, 3, 6, 9, 12.

PROBLÈME. *Un fermier a acheté 100 pièces de bétail pour 4000 fr., savoir : des bœufs à 400 fr. la pièce, des vaches à 200 fr., des veaux à 80 fr., et des moutons à 20 fr. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce ?*

RÉPONSE. En excluant les solutions qui renferment un zéro, le problème admet les dix suivantes ;

Bœufs.....	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	4,	4;
Vaches....	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	1,	2;
Veaux.....	24,	21,	18,	15,	12,	9,	6,	3,	5,	2;
Moutons...	74,	76,	78,	80,	82,	84,	86,	88,	90,	92.

CHAPITRE V.

Du carré et de la racine carrée des quantités algébriques. Calcul des radicaux du second degré.

Valeur ambiguë de la racine carrée. Quantités imaginaires.

154. La quantité, qui élevée au carré reproduit une quantité donnée, se nomme la *racine carrée* de cette quantité. En arithmétique, où il n'y a point de quantités négatives, et où l'on ne considère que les valeurs absolues des nombres, une racine carrée ne peut avoir qu'une seule valeur. Il est évident, par exemple, que la racine carrée de 4 ne peut pas être autre que 2. Il en est encore de même en géométrie lorsqu'on demande quel est le côté du carré dont la surface est donnée.

Mais il en est autrement par rapport à l'algèbre, qui admet également dans ses calculs et les quantités positives, et les quantités négatives, et d'autres encore que nous ferons bientôt connaître. Il est clair en effet que 4 est aussi bien le carré de -2 que celui de $+2$; et en général, si on convient de désigner par $\sqrt{A}$ une certaine quantité dont le carré soit A, la racine carrée de A sera aussi bien $-\sqrt{A}$ que $+\sqrt{A}$. On représente ces deux valeurs d'une manière abrégée en écrivant $\pm\sqrt{A}$.

Une proposition importante doit être démontrée ici : c'est que la quantité A n'a pas d'autre racine carrée que ces deux-là. En effet, les différentes racines carrées de A ne sont autres que les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^2=A$, ou, ce qui est la même chose, à celle-ci

$$x^2-A=0.$$

Au lieu de x^2-A, on peut écrire $x^2-(\sqrt{A})^2$; puis, en décomposant cette différence de carrés en deux facteurs (41), on a

$$x^2-A=(x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A}).$$

Sous cette forme, on voit que toute valeur de x qui ne serait ni $+\sqrt{A}$, ni $-\sqrt{A}$, ne rendraient nul aucun des deux facteurs; donc elle ne saurait rendre nul le produit x^2-A; donc la quantité A n'a point d'autre racine carrée que $\pm\sqrt{A}$.

Ainsi *la racine carrée d'une quantité a deux valeurs qui sont égales et de signes contraires, et elle n'en a pas davantage.*

155. A parler rigoureusement, l'expression $\sqrt{A}$ suffit, sans le signe $\pm$, pour représenter les deux racines carrées de A: car elle désigne indifféremment toute quantité dont le carré est A. Lors donc que, pour indiquer ces deux racines, on écrit $\pm\sqrt{A}$, le radical est pris dans un sens restreint, lequel consiste à supposer que $\sqrt{A}$ ne désigne plus que l'une des deux valeurs.

156. Il peut arriver que la quantité placée sous le radical carré soit négative, comme dans l'expression $\sqrt{-4}$. Or, il n'existe aucune grandeur, soit positive, soit négative, dont le carré soit négatif; c'est pourquoi l'on dit alors que les valeurs du radical sont *imaginaires*. A proprement parler, ce ne sont plus des quantités: cependant, comme on les soumet aux règles du calcul algébrique, on leur conserve cette dénomination; mais la qualification d'*imaginaires* qu'on y ajoute suffit pour ôter toute équivoque. Par opposition, on appelle *réelles* les quantités positives ou négatives.

157. Tout radical carré imaginaire peut se transformer en un produit de deux facteurs, l'un réel, et l'autre égal à $\sqrt{-1}$. Soit le radical imaginaire $\sqrt{-A}$. La quantité A étant positive par elle-même, elle doit avoir deux racines carrées qui soient réelles. Nommons a l'une d'elles, celle qui est positive, par exemple; on pourra toujours représenter $\sqrt{-A}$ par ay, pourvu qu'on détermine y de manière qu'on ait $(ay)^2=-A$. Cette condition revient à $a^2y^2=-A$; ou bien, puisque A est le carré de a, à $Ay^2=-A$; ou bien encore, en divisant par A, à

$$y^2=-1, \quad \text{d'où} \quad y=\pm\sqrt{-1}.$$

Or, pour avoir les valeurs de $\sqrt{-A}$, il faut multiplier a par celles de y; donc les valeurs de $\sqrt{-A}$ peuvent s'exprimer par $\pm a\sqrt{-1}$.

158. Par ce qui précède, on est conduit naturellement à distinguer, parmi les résultats qui se déduisent du calcul, deux espèces

de *valeurs* ou *déterminations* : les unes, qu'on nomme *arithmétiques*, parce qu'elles sont tout-à-fait de la nature de celles qu'on trouve par les opérations de l'arithmétique, c'est-à-dire, essentiellement réelles et positives ; les autres, qu'on nomme *algébriques*, parce qu'elles comprennent les valeurs négatives et les imaginaires, qui ne doivent leur existence qu'aux combinaisons des signes de l'algèbre. Ces dénominations ont le mérite d'avoir une conformité parfaite avec les idées qu'elles sont destinées à rappeler.

Carré et racine carrée des monômes.

159. Soit un produit quelconque $pqr\ldots$, on a

$$(pqr\ldots)^2=pqr\ldots\times pqr\ldots=p^2q^2r^2\ldots;$$

donc *on fait le carré d'un produit en élevant tous les facteurs au carré.*

Si on fait le carré d'un facteur a^n, qui a déjà un exposant, on a $(a^n)^2=a^n\times a^n=a^{2n}$: c'est-à-dire qu'il suffit de doubler l'exposant. Donc *on fait le carré d'un monôme quelconque en élevant son coefficient au carré, et en doublant tous les exposans.*

Suivant cette règle, on aurait immédiatement

$$\left(\frac{3}{5}\,a^2b^3c\right)^2=\frac{9}{25}\,a^4b^6c^2.$$

160. Par une réciprocité évidente, on conclut des règles ci-dessus que *la racine carrée d'un produit s'obtient en extrayant celle de tous les facteurs* ; et que *la racine d'un monôme s'obtient en extrayant celle du coefficient et divisant les exposans par* 2.

Ces nouvelles règles donnent

$$\sqrt{pqr}=\sqrt{p}\,\sqrt{q}\,\sqrt{r},\quad \sqrt{64a^4b^2}=8a^2b.$$

161. Quand tous les facteurs d'un monôme ou d'un produit ne sont point des carrés, on indique d'abord la racine carrée, et ensuite on simplifie le radical en mettant en dehors de la racine tous les facteurs carrés. Par exemple, s'il s'agit de $\sqrt{50a^5b^2c}$, on décompose la quantité placée sous le radical en $25a^4b^2\times 2ac$; et alors on aura

$$\sqrt{50a^5b^2c}=\sqrt{25a^4b^2}\times\sqrt{2ac}=5a^2b\sqrt{2ac}.$$

En général, *pour simplifier un radical carré, on décompose la quantité placée sous le radical en deux produits, dont l'un ne contienne que des facteurs carrés, et dont l'autre n'en contienne aucun; puis on extrait la racine du premier produit, et on indique celle du second.*

D'après cette règle, si on nomme a la racine carrée de A, on pourra écrire, comme au n° 157, $\sqrt{-A} = \sqrt{a \times -1} = a\sqrt{-1}$.

162. Quels que soient a et b, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2};$$

donc *le carré d'une fraction algébrique s'obtient en élevant au carré son numérateur et son dénominateur.*

Donc aussi, *la racine carrée d'une fraction s'obtient en extrayant celle du numérateur et celle du dénominateur.*

Par cette règle on a

$$\sqrt{\frac{49a^4b^6}{16c^2d^4}} = \frac{7a^2b^3}{4cd^2}.$$

163. Quand le numérateur et le dénominateur ne sont point des carrés, on pourra indiquer la racine de chacun d'eux, et la simplifier ensuite s'il y a lieu; mais le plus ordinairement on fait en sorte qu'il n'y ait point de radical au dénominateur. A cet effet, on introduit dans les deux termes de la fraction les facteurs qui manquent au dénominateur pour être un carré, alors on peut en extraire la racine, et il ne reste de radical qu'au numérateur.

Ainsi, soit $\sqrt{\frac{3a^4b}{50c^3}}$; on remarquera que le nombre 50 devient un carré en le multipliant par 2, et que le facteur c^3 en sera un aussi en le multipliant par c. On multipliera donc les deux termes de la fraction par $2c$, et on aura

$$\sqrt{\frac{3a^4b}{50c^3}} = \sqrt{\frac{6a^4bc}{100c^4}} = \frac{\sqrt{6a^4bc}}{10c^2} = \frac{a^2\sqrt{6bc}}{10c^2}.$$

164. Je ne dis rien des signes; mais il est toujours sous-entendu qu'une racine carrée doit être prise avec le signe ambigu $\pm$.

Lorsqu'on simplifie une racine indiquée, qui ne peut pas s'ex-

naire, le radical qui reste alors, étant considéré dans le sens le plus général, suffit pour donner à l'expression ses deux valeurs. Il est évident en effet qu'en le prenant en $+$ et en $-$, on aura les deux valeurs de la racine indiquée. Ainsi, par exemple, je puis, sans aucune restriction, poser

$$\sqrt{3a^4b}=a^2\sqrt{3b},\quad \sqrt{-4a^2}=2a\sqrt{-1}:$$

ces égalités auront tout-à-fait le même sens que si, distinguant les deux valeurs de chaque radical, j'eusse écrit

$$\pm\sqrt{3a^4b}=\pm a^2\sqrt{3b},\quad \pm\sqrt{-4a^2}=\pm 2a\sqrt{-1}.$$

Carré et racine carrée des polynômes.

165. Soit un polynôme

$$a+b+c+d,$$

dans lequel terme a, b, c, d représentent des quantités quelconques. Considérons tous les termes, excepté le dernier, comme n'en formant qu'un seul, et alors formons le carré de ce polynôme comme celui d'un binôme $m+d$: on aura

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

En formant de la même manière le carré de $a+b+c$, il vient

$$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$+2(a+b+c)d+d^2.$$

Puis, en faisant le carré de $a+b$,

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$+2(a+b)c+c^2$$
$$+2(a+b+c)d+d^2.$$

De là on conclut que *le carré d'un polynôme, quel que soit le nombre de ses termes, contient le carré du 1er terme, plus le double produit du 1er par le 2e, plus le carré du 2e; et encore le double produit des deux premiers par le 3e, plus le carré du 3e; et encore le double produit des trois premiers par le 4e, plus le carré du 4e; et ainsi de suite.*

Remarquons en passant que si on effectue tous les doubles pr duits énoncés dans cette règle, le carré du polynôme renferme les carrés de tous les termes, plus tous les doubles produits de (termes multipliés deux à deux.

166. Cette règle étant établie, proposons-nous d'extraire racine carrée d'un polynôme quelconque, que je nommerai . Supposons qu'on l'ait ordonné de manière que les exposans de lettre x aillent en décroissant, et qu'alors le polynôme P soit

$$P = A + B + C + \ldots$$

Désignons par $a + b + c + \ldots$ la racine ordonnée de la mêı manière. Son carré devra reproduire le polynôme P : or, d'apı la règle ci-dessus, parmi les termes qui composent le carré cette racine, celui dans lequel x a le plus haut exposant est é demment a^2; donc A est le carré de a; donc *le 1[er] terme de racine s'obtient en extrayant la racine carrée du 1[er] terme polynôme proposé.*

Retranchons de P le carré de ce terme : le reste, que je noı merai R, sera

$$R = B + C + \ldots;$$

et il devra contenir le double produit du 1[er] terme de la raci par le 2[e], plus le carré du 2[e], etc. Or, il est facile de voir que double produit du 1[er] terme par le 2[e] doit contenir x à un pl haut exposant que les autres parties de R; donc B est ce doul produit; donc *le 2[e] terme de la racine se trouve en divisant premier terme du reste* R *par le double du 1[er] terme de la racin*

Maintenant que les deux premiers termes $a + b$ de la raci sont connus, ajoutons b à $2a$ et multiplions $2a + b$ par b : le pı duit sera égal au double du 1[er] terme multiplié par le 2[e], plus carré du 2[e]. Si on retranche ce produit du reste R, on aura do un nouveau reste R′, lequel ne contiendra plus que le doul produit des deux premiers termes de la racine par le 3[e], plus carré du 3[e], etc. En raisonnant ici comme tout-à-l'heure, on connaît d'abord que, dans ce reste, le terme où x a le plus h exposant est le double produit du 1[er] terme de la racine par le et par suite on conclut que *le 3[e] terme de la racine se trouve*

divisant le premier terme du reste R′ par le double du 1er terme de la racine.

Les trois premiers termes $a+b+c$ de la racine feront trouver le 4ᵉ, comme les deux premiers ont fait trouver le 3ᵉ. Ainsi, on ajoutera le terme c, qu'on vient de déterminer, au double $2a+2b$ des deux premiers, on multipliera la somme $2a+2b+c$ par c, puis on soustraira le produit du reste R′. Par là on aura un nouveau reste R″; et *c'est encore en divisant le premier terme de ce reste par le double du 1er terme de la racine qu'on obtiendra le 4ᵉ terme de cette racine.*

En continuant ainsi, on est sûr, quand le polynôme P est un carré, de découvrir successivement tous les termes de la racine: car chaque division en fait trouver un.

On doit déjà reconnaître que la plus grande analogie existe entre la règle qui sert à extraire la racine carrée d'un polynôme et celle qu'on emploie pour les nombres. Mais l'analogie s'apercevra mieux encore sur un exemple.

	Polynôme donné.	Racine.
	$4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$	$2x^2+3x-1$
	$-4x^2$	
		$4x^2+3x$
1ᵉʳ reste.....	$+12x^3+5x^2-6x+1$	$4x^2+6x-1$
	$-12x^3-9x^2$	
2ᵉ reste......	$-4x^2-6x+1$	
	$+4x^2+6x-1$	
3ᵉ reste......	o o o	

On extrait la racine carrée du 1er terme $4x^4$, et on obtient ainsi le 1er terme $2x^2$ de la racine.

Du polynôme donné on retranche le carré de ce terme, ce qui donne le 1er reste; puis on fait le double $4x^2$ du 1er terme de la racine, et l'on divise le 1er terme du reste par ce double, c'est-à-dire, $+12x^3$ par $4x^2$. Le quotient $+3x$ est le 2ᵉ de la racine.

A côté de $4x^2$, double du 1er terme de la racine, on ajoute le 2ᵉ terme $+3x$, on multiplie la somme $4x^2+3x$ par le 2ᵉ terme $3x$, puis on retranche le produit du 1er reste, ce qui donne un 3ᵉ

reste. On divise encore le 1[er] terme $-4x^2$ de ce reste par le double $4x^2$ du 1[er] terme de la racine; et le quotient -1 sera le 3[e] terme de la racine.

Au double des deux premiers termes de la racine on ajoute le 3[e], ce qui fait $4x^2+6x-1$; on multiplie cette somme par le 3[e] terme -1, et on retranche le produit du 2[e] reste. On a zéro pour 3[e] reste; et de là on conclut que les termes trouvés $2x^2+3x-1$ composent la racine carrée du polynôme donné.

167. En général, ce qui avertira tout à la fois que le polynôme est un carré et que la racine est complète, c'est qu'alors on arrivera à un reste nul. En effet, par la manière même dont les calculs sont faits, chaque reste qu'on obtient n'est autre chose que le polynôme proposé, diminué de toutes les parties qui composent le carré de la quantité trouvée à la racine par les opérations qui ont précédé. Lors donc que la racine sera complète, on ne peut pas manquer d'avoir un reste nul; et, réciproquement, dès qu'on parvient à un tel reste, il est évident que les termes écrits à la racine composent la racine exacte du polynôme proposé.

D'un autre côté, quand le polynôme donné ne sera point un carré, il est très-important de remarquer que les calculs en avertiront encore. Supposons toujours, comme on l'a fait jusqu'ici, qu'on ordonne de manière que les exposans de x soient décroissans, et observons qu'à chaque soustraction le 1[er] terme de la quantité sur laquelle se fait la soustraction est détruit : de là il suit que l'exposant de x doit aller en diminuant dans le premier terme des restes successifs, et par conséquent aussi dans les termes de la racine.

Cela posé, nommons K le dernier terme du polynôme proposé P, c'est-à-dire le terme où x a le plus petit exposant; et soit k la racine carrée de K. Il est aisé de reconnaître que si P est un carré, k devra être le dernier terme de la racine; et par conséquent la marche progressive du calcul devra le faire trouver. Or, si cela n'arrive pas, on est sûr que les calculs amèneront à la racine un terme de degré moindre que k; donc alors il sera évident que P n'est point un carré. La même conclusion aurait encore lieu si les calculs amenaient le terme k et que le reste suivant ne fût pas nul.

168. Toutes les explications précédentes (166 et 167) semblent

accommodées au cas où l'on ordonne les polynômes de manière que les exposans d'une lettre soient décroissans. Mais quand on adopte l'ordre contraire, elles subsistent encore, sauf une légère modification dans le caractère auquel on reconnaît que le polynôme n'est pas un carré.

D'abord on aperçoit sans peine que la même marche de calcul fera encore connaître successivement tous les termes de la racine; et lorsqu'on parviendra à un reste nul, on pourra encore conclure que le polynôme est un carré, et que les termes trouvés sont ceux de sa racine.

Ensuite, pour modifier le caractère auquel on juge que le polynôme n'est point un carré, il suffit de remarquer que l'exposant de la lettre, par rapport à laquelle on ordonne, va en croissant dans les termes qu'on trouve successivement à la racine, et que, dans le cas où le polynôme est un carré, le calcul doit amener un dernier terme égal à la racine carrée du dernier terme de ce polynôme; donc, si en effet on arrive à un pareil terme, sans trouver ensuite un reste nul, ou si on arrive à un terme de degré plus élevé, alors on pourra affirmer que le polynôme n'est pas un carré.

169. Quelquefois cette conclusion s'aperçoit à la simple inspection du polynôme : car nous avons dit que, dans le cas où il serait un carré, la partie de ce polynôme qui renferme une lettre quelconque au plus fort ou au plus faible exposant doit être un carré; et par conséquent, dès que cette condition vient à manquer à l'égard de l'une des lettres, le polynôme ne saurait être un carré. Si cette impossibilité ne se montre pas tout d'abord, elle peut encore se manifester dans le cours des opérations, quand il se trouve un reste dont le 1er terme n'est pas divisible par le double du 1er terme de la racine.

170. Je terminerai par une observation que le lecteur a sans doute déjà faite. Quand on ordonne les polynômes par rapport à une lettre x, on peut rencontrer plusieurs termes où x ait le même exposant. Dans ce cas, on adoptera une des dispositions prescrites pour la division (46); et il est clair que nos raisonnemens subsisteront en entier, aussi bien que les règles qui en ont été déduites. On peut aussi considérer tous les termes qui contiennent une même puissance de x comme s'ils n'en formaient qu'un seul, mais alors

les opérations partielles, devant s'effectuer sur des polynômes, ne pourront plus se faire à simple vue, et il faudra les développer à part, comme dans l'exemple ci-dessous.

Polyn. donné.

$$\left\{\begin{array}{l}(a^2-4ab+4b^2)x^4-(2a^2-4ab)x^3\\ +(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2\\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9\end{array}\right.$$

$$-(a^2-4ab+4b^2)x^4$$

1er reste.

$$\left\{\begin{array}{l}-(2a^2-4ab)x^3\\ +(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2\\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9\end{array}\right.$$

$$+(2a^2-4ab)x^3-a^2x^2$$

2e reste.

$$\left\{\begin{array}{l}(4ab-6a-8b^2+12b)x^2\\ -(4ab-6a)x+4b^2-12b+9\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}-(4ab-6a-8b^2+12b)x^2\\ +(4ab-6a)x-4b^2+12b-9\end{array}\right.$$

$$0 \qquad 0$$

Racine.

$$(a-2b)x^2-ax+2b-3$$

$$(2a-4b)x^2$$

$$(2a-4b)x^2-ax$$

$$(2a-4b)x^2-2ax+2b-3$$

1re opération partielle.

$$a^2-4ab+4b^2 \;\big|\; a-2b$$

$$-a^2 \qquad\qquad \big|\; 2a-2b$$

$$-4ab+4b^2$$

$$+4ab-4b^2$$

$$0 \quad 0$$

2e opération partielle.

$$-2a^2+4ab \;\big|\; 2a-4b$$

$$+2a^2-4ab \;\big|\; -a$$

$$0 \quad 0$$

3e opération partielle.

$$4ab-6a-8b^2+12b \;\big|\; 2a-4b$$

$$-4ab+8b^2 \qquad\qquad \big|\; 2b-3$$

$$-6a+12b$$

$$+6a-12b$$

$$0 \quad 0$$

Calcul des radicaux du second degré.

171. Le plus souvent les racines, de quelque ordre qu'elles soient, ne peuvent pas s'exprimer exactement sans le secours des radicaux ; et par conséquent tous les calculs dans lesquels ces racines doivent entrer se trouvent aussi compliqués de radicaux. Notre objet est ici d'exposer les différentes transformations ou réductions qu'on opère sur les radicaux carrés. Elles sont, pour la plupart, déjà connues, et il suffira de les indiquer brièvement.

172. On a vu que la racine carrée d'un produit s'obtient en extrayant celle de chaque facteur (160) ; donc on a

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b},$$

et réciproquement on a aussi

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}.$$

Par là on voit comment on fait passer un facteur hors d'un radical carré, et comment on le fait entrer sous ce radical lorsqu'il est en dehors.

173. Les règles ordinaires du calcul donnent

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

Ces exemples apprennent comment on peut, dans certains cas, faire disparaître les radicaux carrés qui embarrassent le dénominateur d'une fraction.

174. Soit l'expression

$$3a^2 + 5\sqrt{a^2b^3} - 2\sqrt{\frac{a^2}{b}}.$$

Simplifions d'abord les radicaux : on aura

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2 \times b} = ab\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \sqrt{\frac{a^2 \times b}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{}$$

Par suite l'expression proposée devient d'abord

$$3a^2 + 5ab\sqrt{b} - \frac{2a}{b}\sqrt{b};$$

puis, en réduisant,

$$3a^2 + (5ab - \frac{2a}{b})\sqrt{b}.$$

Dans cet exemple on a réduit en un seul plusieurs radica joints entre eux par addition et soustraction, lesquels sont di rens en apparence et se ramènent cependant à être *semblab* On nomme ainsi ceux qui ne diffèrent que par les facteurs ex rieurs.

175. Puisqu'on extrait la racine carrée d'un produit en trayant celle de chaque facteur (160) on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, ce qui est la même chose,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab};$$

et, puisqu'on extrait la racine carrée d'une fraction en extray celle du numérateur et celle du dénominateur (162), on a aus

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ainsi s'effectuent la multiplication et la division des radica carrés : c'est-à-dire qu'on multiplie ou qu'on divise l'une l'autre les quantités qui sont sous les radicaux, et qu'ensuite met le résultat sous un radical de même degré.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les radicaux du second d gré, attendu qu'ils sont compris parmi les radicaux à indice que conque dont je m'occuperai dans le chapitre XI.



CHAPITRE IX.

Équations du second degré, et questions qui en dépendent.

Résolution des équations du second degré à une seule inconnue.

176. Lorsque, par l'évanouissement des dénominateurs, ou par toute autre préparation, une équation ne renferme plus que des termes connus et des termes affectés du carré de l'inconnue, on peut toujours la ramener à la forme

$$[1] \qquad x^2 = A,$$

et alors sa résolution est facile. En effet, puisque le carré de x doit reproduire A, il s'ensuit que x est une racine carrée de A : or, cette quantité a deux racines carrées représentées par $\pm\sqrt{a}$, et n'en a pas davantage (154); donc on aura toutes les solutions de l'équation [1] dans les deux valeurs

$$x = \pm\sqrt{A}.$$

EXEMPLE I. Soit l'équation

$$\frac{2x^2}{a} - 5b = a + \frac{3x^2}{b}.$$

On chasse d'abord les dénominateurs, et successivement il vient

$$2bx^2 - 5ab^2 = a^2b + 3ax^2,$$
$$(2b - 3a)x^2 = 5ab^2 + a^2b,$$
$$x = \frac{5ab^2 + a^2b}{2b - 3a},$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{5ab^2 + a^2b}{2b - 3a}}.$$

EXEMPLE II.
$$\frac{9x-18}{5x}=\frac{x}{x+2},$$
$$9x^2-36=5x^2,$$
$$4x^2=36,$$
$$x^2=9,$$
$$x=\pm3.$$

EXEMPLE III.
$$3x^2+17=5x^2+89,$$
$$2x^2=-72,$$
$$x^2=-36,$$
$$x=\pm\sqrt{-36}=\pm6\sqrt{-1}.$$

177. Considérons maintenant l'équation la plus générale du second degré. Elle doit renfermer trois sortes de termes : les uns affectés du carré x^2 de l'inconnue, d'autres affectés de x au premier degré, et d'autres entièrement connus. Après avoir transposé tous les termes dans le premier membre, on pourra réunir en un seul tous ceux qui contiennent x^2, aussi en un seul ceux qui contiennent x, et aussi en un seul ceux qui sont tout connus. Alors l'équation prendra la forme
$$ax^2+bx+c=0.$$

On fait encore subir à cette équation une simplification, qui consiste à dégager le carré x^2 de son multiplicateur a. A cet effet on divise tous les termes par a, et il vient
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Si le terme en x^2 avait le signe $-$, on changerait tous les signes, de sorte qu'on peut toujours ramener le premier terme à être positif.

Soit fait, pour abréger, $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$: on aura
$$x^2+px+q=0;$$
et telle est la forme générale à laquelle on réduit les équations du second degré, p et q étant des quantités connues.

Par exemple, si l'on propose l'équation
$$\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{3}=10-4x,$$

on la changera successivement en celles-ci :

$$9x - 2x^2 = 60 - 24x,$$
$$-2x^2 + 33x - 60 = 0,$$
$$x^2 - \frac{33}{2}x + 30 = 0.$$

Cette dernière équation est évidemment comprise dans l'équation $x^2 + px + q = 0$, en faisant $p = -\frac{33}{2}$, $q = 30$.

178. Occupons-nous donc de résoudre l'équation générale

[2] $$x^2 + px + q = 0.$$

Cela serait facile si on pouvait lui donner la forme

$$(x + m)^2 = n,$$

m et n étant des quantités connues. En effet, dans celle-ci on voit qu'il faut choisir x de manière que le carré de $x + m$ soit égal à n; donc $x + m$ doit être une racine carrée de n. Or, il y a pour n deux racines carrées, qu'on désigne par $\pm\sqrt{n}$; donc on doit avoir

$$x + m = \pm\sqrt{n};$$

et par suite, en transposant m,

$$x = -m \pm \sqrt{n}.$$

Revenons à l'équation [2], et cherchons à la mettre sous la forme $(x + m)^2 = n$. En transposant q dans le second membre, elle devient d'abord

$$x^2 + px = -q.$$

Maintenant rappelons que le carré d'un binôme se compose du carré du 1[er] terme, plus le double produit du 1[er] par le 2[e], plus le carré du 2[e]. Il suit de là qu'on peut regarder $x^2 + px$ comme les deux premières parties du carré de $x + \frac{1}{2}p$: car x^2 est le carré de x, et px est le double produit de x par $\frac{1}{2}p$. Le premier membre $x^2 + px$ sera donc le carré de $x + \frac{1}{2}p$, si on lui ajoute le carré de $\frac{1}{2}p$ ou $\frac{1}{4}p^2$. Or, on peut en effet lui ajouter ce carré, pourvu qu'on l'ajoute aussi au second membre; et de cette manière l'équation deviendra

$$(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q.$$

Alors, en raisonnant comme pour l'équation $(x+m)^2=n$, o en tire d'abord

[3] $$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q};$$

et par conséquent

[4] $$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

On a ainsi deux valeurs pour x. Il n'y en a pas d'autre : ca pour que $(x+\frac{1}{2}p)^2$ soit égal à $\frac{1}{4}p^2-q$, il faut que $x+\frac{1}{2}p$ so égal à la racine carrée de $\frac{1}{4}p^2-q$; or, nous savons que cet racine n'a que les deux valeurs désignées par $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$; don toutes les valeurs de x doivent se tirer de l'équation [3].

On nomme en général *racines* d'une équation toutes les valeu de l'inconnue qui satisfont à cette équation. En conséquenc nous dirons que les valeurs [4] sont les racines de l'équation [2].

179. Si l'on veut vérifier ces valeurs, il suffit de les substitue tour à tour dans l'équation. En substituant la première, celle o le radical a le signe $+$, il vient

$$\left(-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)^2+p\left(-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right)+q=0,$$

$$\tfrac{1}{4}p^2-p\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}+\tfrac{1}{4}p^2-q-\tfrac{1}{2}p^2+p\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}+q=0;$$

et toute réduction faite, on voit que le premier membre est e effet identiquement nul. La seconde valeur de x se vérifie sem blablement, sans autre changement que celui du signe qui précèd le radical.

180. On a fréquemment à résoudre des équations du 2ᵉ degré pour cette raison, il sera commode de traduire la formule [4 en langage ordinaire et d'établir ainsi une règle applicable à tou les cas. En observant que p est le coefficient de x, pris avec le sig dont il est précédé dans l'équation [2], et que q est la quanti toute connue écrite dans le premier membre, la règle sera celle-ci

Lorsqu'une équation du 2ᵉ degré est ramenée à la form $x^2+px+q=0$, *l'inconnue* x *est égale à la moitié du coeffi cient de* x *pris avec un signe contraire, plus ou moins la raci carrée de la somme qu'on obtient, en ajoutant au carré de cet moitié le terme tout connu, pris aussi avec un signe contraire.*

181. Voici quelques exemples dans lesquels cette règle est ap pliquée.

Exemple I. Soit l'équation

$$x^2-10x+9=0.$$

Il faut remarquer : 1° qu'elle a déjà la forme prescrite dans la règle ; 2° que le coefficient de x est -10, dont la moitié, avec un signe contraire, est $+5$; 3° que le terme tout connu est $+9$. Alors la règle donne sur-le-champ

$$x=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm4;$$

et les deux valeurs de x sont

$$x=5+4=9, \quad \text{et} \quad x=5-4=1.$$

Exemple II. Soit l'équation

$$\frac{x}{2}+\frac{3}{x}=\frac{x+13}{3x}.$$

On la ramènera d'abord à la forme $x^2+px+q=0$. Pour chasser les dénominateurs, on multipliera tous les termes par $6x$; puis, en continuant les calculs, il viendra

$$3x^2+18=2x+26,$$
$$3x^2-2x-8=0,$$
$$x^2-\tfrac{2}{3}x-\tfrac{8}{3}=0,$$
$$x=\tfrac{1}{3}\pm\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{8}{3}},$$
$$x=\tfrac{1}{3}\pm\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{24}{9}},$$
$$x=\tfrac{1}{3}\pm\tfrac{5}{3}.$$

On a donc, pour les valeurs de x,

$$x=\tfrac{1}{3}+\tfrac{5}{3}=2, \quad \text{et} \quad x=\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{3}=-\tfrac{4}{3}.$$

Exemple III. $x-2=\dfrac{4x-9}{x}$,

$$x^2-2x=4x-9,$$
$$x^2-6x+9=0,$$
$$x=3\pm\sqrt{9-9},$$
$$x=3.$$

Dans ce cas, les deux valeurs de x se réduisent à une seule.

EXEMPLE IV. $100x^2 - 100x + 41 = 0.$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{41}{100}},$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25-41}{100}},$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{16}{100}},$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{10}\sqrt{-1}.$$

Les deux valeurs de x sont *imaginaires* à cause du radical $\sqrt{-\frac{16}{100}}$. Profitant de la remarque faite dans le n° 157, j'ai extrait la racine carrée de $\frac{16}{100}$ sans faire attention au signe $-$, et j'ai remplacé ce radical par $\frac{4}{10}\sqrt{-1}$.

Composition de l'équaticn du 2e degré et de ses coefficiens. Discussion des racines.

182. Dans le n° 154, on a décomposé le premier membre de l'équation $x^2 - A = 0$ en deux facteurs $(x - \sqrt{A}) \times (x + \sqrt{A})$: une décomposition analogue peut s'opérer dans l'équation générale

[2] $$x^2 + px + q = 0.$$

Remplaçons $x^2 + px$ par l'expression équivalente $(x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}p^2$: on aura

$$x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q).$$

La quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$ peut se changer en $(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q})^2$, et on mettra ainsi en évidence la différence des carrés des deux quantités $x + \frac{1}{2}p$ et $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. Or, cette différence est égale au produit de la somme des deux quantités par leur différence ; donc

$$x + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q})(x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}).$$

Telle est la décomposition que nous voulions faire connaître.

Elle conduit à un nouveau procédé pour résoudre l'équation [2]. En effet, elle montre que les valeurs de x doivent rendre nul le produit

$$(x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q})(x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}).$$

, ce produit devient nul en égalant à zéro l'un ou l'autre des teurs, et en outre il est évident qu'il ne saurait devenir nul si ɑun des facteurs n'est zéro; donc les valeurs de x, qui conmnent à l'équation [2], doivent se tirer des équations

$$x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0,\quad x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

quelles donnent les racines déjà connues (178),

$$[4]\quad x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},\quad x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

183. De nouvelles propriétés se présentent ici, qui recevront us tard une très-grande extension, et qu'il importe de remarer dès à présent.

1° Il est évident que *les deux facteurs du premier membre de équation* $x^2+px+q=0$ *sont les différences qu'on obtient en renchant de* x *chacune des deux racines*; de sorte qu'en nomant x' et x'' ces racines, on a

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

2° Si on effectue la multiplication $(x-x')(x-x'')$, on trouve

$$x^2-(x'+x'')x+x'x'';$$

t, comme ce produit doit être identiquement égal à x^2+px+q, l s'ensuit qu'on a

$$p=-x'-x'',\quad q=x'x''.$$

es relations, qui peuvent d'ailleurs se vérifier immédiatement ur les valeurs [4], s'énoncent en ces termes : *Dans toute équation lu 2e degré, ramenée à la forme* $x^2+px+q=0$, *le coefficient du second terme est égal à la somme des deux racines, prises avec des signes contraires, et le terme tout connu* q *est égal au produit de ces racines.*

Quand on sait que les deux racines d'une équation du 2e degré sont réelles, les relations ci-dessus font connaître sur-le-champ la nature de ces racines. Par exemple, admettons que celles de l'équation $x^2-2x-7=0$ soient réelles : on conclura immédiatement qu'elles sont de signes différens, puisque leur produit est égal au terme tout connu -7; et, en outre, que la plus grande est posi-

tive, puisque leur somme est égale à $+2$, coefficient de x pris avec un signe contraire.

184. Maintenant discutons les racines de l'équation [2]. Les valeurs générales de ces racines sont

$$[4] \qquad x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q},$$

et l'on est assuré que le terme $\frac{1}{4}p^2$ est positif, quel que soit le signe de p.

Si q est négatif dans l'équation $x^2+px+q=0$, la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ sera positive et $>\frac{1}{4}p^2$; donc $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ sera une quantité réelle et plus grande, en valeur absolue, que $\frac{1}{2}p$; donc le terme $-\frac{1}{2}p$, placé avant le radical, ne changera point les signes des deux valeurs de ce radical; donc les deux valeurs de x seront de signes contraires entre elles. Il est d'ailleurs évident que la plus grande est de même signe que $-\frac{1}{2}p$, et par conséquent de signe contraire à p.

Si l'on a $q=0$, les deux valeurs de x sont $x=0$ et $x=p$. Alors l'équation générale se réduit à $x^2+px=0$, ou $x(x+p)=0$; et il est évident que ses deux racines sont en effet $x=0$ et $x=-p$.

Si q est positif et $<\frac{1}{4}p^2$, le radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ sera encore réel, mais $<\frac{1}{2}p$; donc les deux valeurs de x seront de même signe que le terme $-\frac{1}{2}p$ placé devant le radical : c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux positives quand p est négatif, et toutes deux négatives quand p est positif.

Si l'on a $q=\frac{1}{4}p^2$, les deux valeurs de x se réduisent à une seule, $x=-\frac{1}{2}p$. Dans ce cas, puisque $q=\frac{1}{4}p^2$, l'équation devient

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=0 \quad \text{ou} \quad (x+\tfrac{1}{2}p)^2=0.$$

Le premier membre est donc un carré, et alors on voit clairement que l'inconnue n'a en effet que la seule valeur $x=-\frac{1}{2}p$: car aucune autre ne peut rendre ce carré égal à zéro.

Enfin, si q est positif et $>\frac{1}{4}p^2$, la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ placée sous le radical est négative, et les deux valeurs de x sont imaginaires. Changeons le signe de la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$, et nommons r la racine carrée de $q-\frac{1}{4}p^2$. On aura $\frac{1}{4}p^2-q=-r^2$; donc (157)

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}=\pm\sqrt{-r^2}=\pm r\sqrt{-1};$$

les valeurs de x pourront s'écrire ainsi.

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm r\sqrt{-1}.$$

e $\frac{1}{4}p^2-q=-r^2$ on tire $q=\frac{1}{4}p^2+r^2$, et par suite l'équation rale devient

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2+r^2=0 \quad \text{ou} \quad (x+\tfrac{1}{2}p)^2+r^2=0.$$

premier membre est alors la somme de deux carrés, et, sous e forme, on reconnaît pourquoi les deux valeurs de x sont ginaires : c'est qu'il n'existe évidemment aucune valeur, soit tive, soit négative, qui, mise à la place de x, puisse rendre e la somme de ces deux carrés.

ticularités à remarquer dans les équations de la forme $ax^2+bx+c=0$.

85. Pour résoudre l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

a divise d'abord par a, afin de lui donner la forme ordinaire

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

on en tire, par la règle générale (180),

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

en réduisant au même dénominateur sous le radical,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

règles connues (175) donnent

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

c les valeurs de x peuvent s'écrire ainsi,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

suivant qu'on aura $b^2-4ac>0$ ou $=0$ ou <0, elles se-

ront réelles et inégales, ou réelles et égales, ou bien imaginaires.

186. Mais le cas particulier que nous voulons remarquer ici, c'est celui où la quantité a, coefficient de x^2 dans l'équation proposée, diminue jusqu'à être zéro. Soit donc fait $a=0$: les deux valeurs de x, prises séparément, deviendront

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0},$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b-b}{0}=\frac{-2b}{0}.$$

La première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais, d'après les observations du n° 124, il ne s'ensuit pas pour cela qu'elle soit indéterminée, et même on va montrer qu'elle ne l'est point. Quant à la seconde, elle est infinie.

Reprenons la valeur générale de la première racine,

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si a était facteur au numérateur et au dénominateur, on le supprimerait, puis on poserait $a=0$, et l'on aurait la vraie valeur de x. A la vérité, on ne peut pas mettre en évidence ce facteur, mais la difficulté est facile à éluder. Multiplions le numérateur et le dénominateur par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$: il viendra

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Le numérateur est alors le produit de la somme et de la différence des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2-4ac}$; donc il est égal à la différence des carrés, savoir : b^2-b^2+4ac ou $4ac$. On voit ainsi que $2a$ est facteur commun au numérateur et au dénominateur de la dernière expression. En le supprimant, elle devient

$$x=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}};$$

et si alors on y fait $a=0$, elle donne $x=-\frac{c}{b}$ pour la vraie valeur de la racine qui s'est présentée d'abord sous la forme $\frac{0}{0}$.

Relativement à la valeur $x=\frac{-2b}{0}$, il y a seulement à observer que le diviseur *zéro* pouvant être regardé ici comme limite de grandeurs décroissantes, soit positives, soit négatives, il s'ensuit que la valeur infinie doit avoir le signe ambigu $\pm$ (120).

Ainsi, en résumé, les valeurs générales de x, déduites de l'équation $ax^2+bx+c=0$, deviennent, dans l'hypothèse $a=0$,

$$x=\frac{-c}{b},\quad x=\pm\infty.$$

Il est tout-à-fait digne de remarque qu'on ait pour ce cas particulier trois valeurs de x, tandis que, dans le cas général, il n'en existe que deux.

Pour bien comprendre que ces valeurs conviennent véritablement à l'équation $ax^2+bx+c=0$, mettons-la sous la forme

$$\frac{-bx-c}{x^2}=a.$$

Lorsqu'on suppose $a=0$, la question est donc de trouver les valeurs de x qui rendent nulle l'expression $\frac{-bx-c}{x^2}$. On voit tout d'abord que la valeur $x=\frac{-c}{b}$ la rend nulle ; et comme la même expression peut s'écrire ainsi $-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}$, on reconnaît qu'elle devient aussi zéro par les valeurs $x=\pm\infty$ (*).

187. Considérons le cas plus particulier encore où l'on aurait à la fois $a=0$ et $b=0$. Alors les deux valeurs générales de x deviennent $\frac{0}{0}$. On a vu plus haut que la première peut se changer en

$$x=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

(*) Dans la théorie analytique des courbes, ces valeurs répondent aux intersections de la ligne des abscisses x avec la courbe du 3e ordre dont l'équation est $yx^2+bx+c=0$. Si on construit cette courbe, on reconnaît que l'axe des x la rencontre d'abord à une distance finie de l'origine, et, de plus, qu'il en est asymptote, tant du côté des x positifs que du côté des x négatifs, ce qui revient à dire qu'il la rencontre à l'infini dans l'un et l'autre sens.

Transformons la seconde d'une manière analogue : elle devient d'abord

$$x=\frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})};$$

puis, en réduisant,

$$x=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Maintenant, en faisant $a=0$ et $b=0$, les valeurs de x, ainsi transformées, donnent toutes deux $x=\infty$; et ici encore l'infini doit être pris avec le signe $\pm$.

Résolution de quelques problèmes qui dépendent du 2e degré.

188. PROBLÈME I. *Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par un nombre double, le produit soit égal à un nombre triple augmenté de* 9.

Soit x le nombre demandé, cet énoncé donne sur-le-champ

$$x\times 2x=3x+9;$$

et de cette équation on tire successivement

$$2x^2-3x-9=0,$$
$$x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{9}{2}=0,$$
$$x=\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{9}{2}},$$
$$x=\tfrac{3}{4}\pm\sqrt{\tfrac{9}{16}+\tfrac{72}{16}},$$
$$x=\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{9}{4}.$$

Donc enfin $\qquad x=\tfrac{12}{4}=3$, et $x=-\tfrac{6}{4}=-\tfrac{3}{2}$.

La valeur positive $x=3$ satisfait à la question dans le sens précis de l'énoncé. Si dans l'équation primitive on change x en $-x$, elle devient

$$x\times 2x=9-3x;$$

et de là on conclut que la valeur négative $-\tfrac{3}{2}$, étant prise positivement, résout le problème dont l'énoncé demanderait *quel est le nombre qui, multiplié par son double, donne un produit égal à* 9 *diminué du triple de ce nombre.*

189. PROBLÈME II. *Partager un nombre donné* p *en deux parties dont le produit soit égal à un nombre donné* q.

En désignant par x l'une des deux parties du nombre p, l'autre sera $p-x$, et l'équation à résoudre sera

$$x(p-x)=q,$$

ou bien

$$x^2-px+q=0,$$

d'où

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ces deux valeurs semblent annoncer deux manières de satisfaire à la question; mais leur somme étant égale au nombre à partager p, il s'ensuit qu'en prenant l'une d'elles pour x, l'autre sera $p-x$, c'est-à-dire qu'elles sont les deux parties cherchées. Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir : car x ne désignait pas l'une des parties plus que l'autre, et le calcul devait par conséquent les donner toutes deux pour valeurs de x.

D'après ce qui a été dit sur la composition des équations du 2[e] degré (183), on pouvait remarquer tout d'abord que les deux nombres inconnus, devant avoir pour somme p et pour produit q, sont les deux racines d'une équation du 2[e] degré dans laquelle le coefficient de x serait égal à $-p$, et le dernier terme égal à q; donc ils doivent être déterminés par l'équation $x^2-px+q=0$.

Le problème n'est pas toujours possible, car si on donne $q>\frac{p^2}{4}$ les valeurs de x sont imaginaires. La plus grande valeur que puisse avoir q, sans que le problème soit impossible, est $\frac{p^2}{4}$, et alors les deux valeurs de x sont égales à $\frac{p}{2}$. Donc le plus grand produit qu'on puisse faire avec les deux parties d'un nombre est égal au carré de la moitié de ce nombre.

190. Cette conséquence se présente immédiatement lorsqu'on résout le problème proposé en prenant pour inconnue la différence des deux parties cherchées. Nommons z cette différence, a la plus grande partie, et b la plus petite. Comme leur somme est p, on aura (92)

$$a=\frac{p}{2}+\frac{z}{2},\quad b=\frac{p}{2}-\frac{z}{2};$$

et, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{z}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{z}{2}\right)=q,$$

ou, en effectuant la multiplication,

$$\frac{p^2}{4}-\frac{z^2}{4}=q.$$

Cette équation montre que la plus grande valeur du produit a lieu lorsque la différence z est nulle, ou, ce qui est la même chose, lorsque les deux parties sont égales entre elles.

Pour trouver a et b, de l'équation ci-dessus on tire

$$\frac{z}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

et par conséquent on a

$$a=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad b=\frac{p}{2}\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

On devra prendre les signes supérieurs ensemble, ou bien les signes inférieurs ensemble : mais on n'a toujours qu'une seule solution, puisqu'on ne fait ainsi que changer l'ordre des parties.

191. PROBLÈME III. *Déterminer, sur la droite qui joint deux lumières, le point qui est également éclairé par chacune.*

Je supposerai connu ce principe de physique : que les intensités d'une même lumière, pour des points qui en sont inégalement éloignés, sont entre elles en raison inverse des carrés de leurs distances à cette lumière. C'est-à-dire qu'à une distance double, triple, etc., l'intensité de cette lumière sera 4 fois, 9 fois, etc., plus petite.

Je nommerai a l'intensité de la première lumière pour les points placés à l'unité de distance, et b l'intensité de la seconde pour les points placés à la même distance. C'est par ces quantités que l'on compare les deux lumières entre elles, et l'on dit, pour cette raison, que a et b en sont les *intensités*.



Cela posé, soient A et B les deux lumières, et C le point cher-

ché. Je ferai AB=d, AC=x, d'où BC=$d-x$. D'après le principe cité, aux distances 2, 3, 4,... l'intensité de la lumière A serait $\frac{a}{4}, \frac{a}{9}, \frac{a}{16}, \ldots$; donc pour le point C, à la distance x, elle est $\frac{a}{x^2}$. Pareillement l'intensité de la lumière B, pour le même point C, à la distance $d-x$, est $\frac{b}{(d-x)^2}$. Or, l'énoncé exige que ces deux intensités soient égales; donc on a l'équation

$$[a] \qquad \frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Elle peut s'écrire ainsi

$$(d-x)^2 = \frac{b}{a}x^2;$$

et pour éviter d'introduire des radicaux dans le calcul, je mettrai c^2 au lieu de $\frac{b}{a}$, ce qui revient à désigner par c la racine carrée de ce rapport. Alors l'équation à résoudre sera

$$[b] \qquad (d-x)^2 = c^2x^2.$$

On pourrait développer la carré de $d-x$, et mettre cette équation sous la forme $x^2+px+q=0$; mais on la ramène sur-le-champ au 1[er] degré en extrayant la racine carrée des deux membres. On trouve ainsi, en donnant à chaque racine le signe $\pm$,

$$\pm(d-x) = \pm cx^2;$$

et, à cause de l'ambiguïté des signes, cette équation équivaut aux quatre suivantes :

$$[c] \qquad +(d-x) = +cx, \quad +(d-x) = -cx,$$
$$[d] \qquad -(d-x) = +cx, \quad -(d-x) = -cx.$$

Mais si on change tous les signes des deux dernières [d], on retombe sur les deux premières [c]; par conséquent on se bornera à considérer celles-ci.

A ce sujet on peut remarquer d'une manière générale que toutes les fois qu'on extrait la racine carrée des deux membres d'une équation, il suffit de mettre le signe $\pm$ devant l'un d'eux.

Je résous donc les équations [e], et j'en tire les deux valeurs

$$x=\frac{d}{1+c},\quad x=\frac{d}{1-c}.$$

Discussion. 1° Soit $c<1$. Comme c^2 représente le rapport $\frac{b}{a}$, cette hypothèse revient à supposer la lumière A plus intense que B. Alors la première valeur de x est positive, $<d$, et $>\frac{1}{2}d$. Donc il existe entre les deux lumières, et plus loin de A que de B, un point C également éclairé par chacune.

La seconde valeur de x est aussi positive, mais $>d$. Elle détermine un point tel que C', au-delà de B par rapport à A; et il est facile de reconnaître qu'en ce point l'intensité de la lumière qui émane de A est la même que celle qui émane de B. En effet, on est certain que cette valeur de x satisfait à l'équation [a]; donc, en la désignant par x', on doit avoir

$$\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(d-x')^2}\quad\text{ou}\quad\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(x'-d)^2},$$

égalité dont les deux membres sont précisément les intensités dont il s'agit.

2° Soit $c>1$: c'est-à-dire que l'intensité de la lumière B surpasse celle de A. Il est clair qu'on doit trouver pour le point B ce qui vient d'être dit du point A, et réciproquement. C'est ce que les valeurs de x confirment.

La première, qui est positive et $<\frac{1}{2}d$, montre qu'il existe entre A et B un point également éclairé par chaque lumière, mais qu'il est moins rapproché de A que de B.

La seconde valeur de x est négative : désignons-la par $-x'$. Comme elle doit toujours satisfaire à l'équation [a], on a

$$\frac{a}{x'^2}=\frac{b}{(d+x')^2}.$$

Or, si de l'autre côté de A on prend AC''$=x'$, le premier membre de l'égalité ci-dessus exprimera l'intensité de la lumière que le point C'' reçoit de A, et le second membre, celle de la lumière qu'il reçoit de B; donc le point C'' est également éclairé par A et

par B. Ainsi, conformément au n° 104, la valeur négative de x indique un simple changement de position dans la distance que cette lettre représente.

3° Soit $c=1$, ce qui suppose deux lumières d'égale intensité. Les deux valeurs de x deviennent

$$x=\frac{d}{2},\quad x=\frac{d}{0}.$$

La seconde étant infinie, il n'existe plus, à proprement dire, qu'un seul point également éclairé : il est déterminé par la première valeur, et c'est le milieu même de la ligne AB.

Pour montrer comment la valeur infinie peut convenir à la question, remarquons que dans le cas actuel, où $c=1$, l'équation [b] peut s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{d-x}{x}\right)^2=1 \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{d}{x}\right)^2=1.$$

Alors on voit qu'en donnant à x une très-grande valeur, le premier membre différera très-peu de l'unité, et que cette différence peut être rendue aussi petite qu'on voudra en prenant x suffisamment grand. C'est là le sens qu'on doit attacher à la valeur infinie, laquelle a d'ailleurs ici le signe ambigu $\pm$.

192. Pour exercice, je proposerai encore les énoncés suivans :

Problème IV. *Deux ouvriers employés à des prix différens, ont été payés au bout d'un certain temps. Le premier a reçu* 96 *fr., et le second, qui avait travaillé* 6 *jours de moins, a reçu* 54 *fr. Si le second avait travaillé tous les jours, et que le premier eût manqué* 6 *jours, ils auraient reçu tous deux la même somme : on demande combien de jours chacun a travaillé, et le prix de sa journée.* Réponse : Le 1er a travaillé 24 jours et gagnait 4 fr. par jour ; le 2e a travaillé 18 jours et gagnait 3 fr.

Problème V. *Un marchand fait escompter par un banquier deux billets ; l'un de* 1577^f,90 *payable dans* 3 *mois, et l'autre de* 2605^f *payable dans* 7 *mois. Il reçoit pour le tout la somme de* 4050^f *: on demande le taux de l'intérêt d'après lequel l'escompte a été fait.* Réponse : Le taux annuel de l'intérêt était de 5^f,60 p. 100.

PROBLÈME VI. *Trouver deux nombres* x *et* y *tels que si on les multiplie respectivement par des nombres donnés* a *et* b, *la somme des produits soit égale à un nombre connu* p ; *et tels encore que si on multiplie leurs carrés par les mêmes nombres* a *et* b, *la somme des nouveaux produits soit égale à un autre nombre connu* q. Réponse :

$$x=\frac{ap\pm\sqrt{ab[(a+b)q-p^2]}}{a(a+b)},\quad y=\frac{bp\mp\sqrt{ab[(a+b)q-p^2]}}{a(a+b)}$$

N. B. Si le lecteur trouve quelque difficulté à résoudre ce problème, à cause des deux inconnues qu'il renferme, il pourra remettre à s'en occuper après le n° 194.

Equations à une seule inconnue qu'on résout comme celles du 2e degré. Quelques exemples qui renferment plusieurs inconnues et qui dépendent du 2e degré.

193. Lorsqu'une équation ne contient que deux puissances de l'inconnue, dont l'une a un exposant double de celui de l'autre, on peut la mettre sous la forme

$$[1] \qquad x^{2m}+px^m+q=0.$$

En considérant d'abord x^m comme l'inconnue, x^{2m} en sera le carré, et l'équation se résoudra comme celles du 2e degré. On a ainsi

$$x^m=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Représentons d'une manière abrégée par a et b les deux valeurs de x^m, on aura

$$x^m=a \quad \text{et} \quad x^m=b;$$

et quand on saura résoudre ces équations, c'est-à-dire, trouver toutes les valeurs de x qui satisfont à chacune d'elles, il est évident qu'on connaîtra toutes les solutions de l'équation [1].

Ces équations sont de la classe de celles qu'on nomme *à deux termes*, et je remettrai à m'en occuper plus tard. Pour le moment je m'arrêterai au cas de $m=2$. L'équation [1] est alors

$$[2] \qquad x^4+px^2+q=0;$$

en prenant x^2 pour inconnue, on en tire d'abord

$$x^2=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q},\quad x^2=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q};$$

et ensuite, chacune de ces nouvelles équations donnant deux racines, l'équation [2] en admettra quatre, savoir :

$$x=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}},\quad x=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}.$$

Supposons, par exemple, qu'on ait l'équation particulière

$$x^4-12x^2-64=0.$$

On fera dans les formules précédentes $p=-12$, $q=-64$; et elles donneront

$$x=\pm\sqrt{6+\sqrt{36+64}}=\pm\sqrt{6+\sqrt{100}}=\pm\sqrt{16}=\pm4,$$
$$x=\pm\sqrt{6-\sqrt{36+64}}=\pm\sqrt{-4}=\pm2\sqrt{-1}.$$

Ainsi l'équation dont il s'agit a quatre racines, deux réelles et deux imaginaires : $x=\pm4$, $x=\pm2\sqrt{-1}$.

194. Les principes qui ont servi à résoudre les équations du 1er degré à plusieurs inconnues, reçoivent aussi leur application dans le 2e degré.

Exemple I. Soient les deux équations

$$[3]\qquad x+y=a,\quad x^2+y^2=b^2.$$

Pour les résoudre, de la 1re on tire

$$y=a-x;$$

on substitue cette valeur dans la 2e, laquelle devient successivement

$$x^2+(a-x)^2=b^2,$$
$$2x^2-2ax+a^2=b^2,$$
$$x^2-ax=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Cette dernière donne deux valeurs pour x, et en les portant dans l'expression $y=a-x$, on aura pour y deux valeurs correspondantes. Il vient ainsi

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{2b^2-a^2}, \\ y=\frac{1}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{2b^2-a^2}. \end{cases}$$

Il faut avoir bien soin de prendre les signes supérieurs ensemble, et les signes inférieurs ensemble. Les deux solutions qu'on obtient ainsi ne diffèrent que par le simple changement de x en y et de y en x. Ce résultat était facile à prévoir par la seule inspection des équations [3], puisque ce changement ne leur en fait subir aucun. Une observation analogue se présente dans l'exemple suivant.

Exemple II. Soient les équations

$$[4] \qquad x^2+y^2=a^2, \quad xy=b^2.$$

La 2e donne $y=\frac{b^2}{x}$, et par suite la 1re devient

$$x^2+\frac{b^4}{x^2}=a^2 \quad \text{ou} \quad x^4-a^2x^2+b^4=0.$$

En considérant pour un moment x^2 comme l'inconnue, on tire de là

$$x^2=\frac{1}{2}a^2\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}.$$

Par conséquent, si on prend séparément ces deux valeurs, on en aura quatre pour x, savoir :

$$[a] \qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}},$$

$$[b] \qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression $y=\frac{{}^2}{x}$, on obtiendra les valeurs correspondantes de y. Si on substitue d'abord les valeurs [a], il vient

$$y=\frac{b^2}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}}.$$

Pour simplifier, on multipliera les deux termes de cette fraction par le radical $\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}$: il en résulte

$$y=\frac{\pm b^2\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}}{\sqrt{[\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}][\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}]}}.$$

En réduisant le dénominateur, on le trouve égal à b^2; donc

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}.$$

Sans nouveau calcul, il est clair que les valeurs de y, correspondantes à celles de la formule [b], seraient

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}.$$

On voit donc que les équations [4] admettent quatre solutions qui sont complètement connues. En prenant, dans chaque accolade ci-dessous, les signes supérieurs ensemble et les signes inférieurs ensemble, ces solutions seront représentées assez distinctement de cette manière :

$$\begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4-4b^4}}.\end{cases}$$

Les mêmes équations [4] peuvent se résoudre plus simplement comme il suit. En ajoutant à la 1re le double de la 2e, et observant que x^2+y^2+2xy est le carré de $x+y$, il vient

$$(x+y)^2=a^2+2b^2,\quad \text{d'où}\quad x+y=\pm\sqrt{a^2+2b^2}.$$

Pareillement, en retranchant de la 1re le double de la 2e, on a

$$(x-y)^2=a^2-2b^2,\quad \text{d'où}\quad x-y=\pm\sqrt{a^2-2b^2}.$$

Maintenant qu'on connaît la somme $x+y$ et la différence $x-y$, la règle du n° 92 donnera les valeurs des deux inconnues. On peut d'ailleurs associer comme on voudra les signes des deux radicaux. En les prenant tous deux avec le même signe, il viendra

$$\begin{cases}x=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}),\\ y=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}).\end{cases}$$

Puis, en les prenant avec des signes contraires, on aura

$$\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2} - \sqrt{a^2-2b^2}), \\ y = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2} + \sqrt{a^2-2b^2}). \end{cases}$$

On obtient encore quatre solutions, comme par le premier procédé; mais elles se présentent sous une forme différente, et au lieu de radicaux superposés, elles ne renferment que des radicaux séparés.

Comme les solutions trouvées par chaque procédé doivent être les mêmes, on est certain que les valeurs déterminées par le second ne sont qu'une transformation de celles qu'on obtient par le premier. On expliquera tout-à-l'heure (196) une méthode de calcul pour opérer les transformations de cette espèce, toutes les fois qu'elles sont possibles.

EXEMPLE III. Soient les équations générales

$$[5] \qquad x^2+Px+Q=0, \quad x^2+P'x+Q'=0,$$

ans lesquelles P, Q, P', Q', sont des fonctions quelconques de y. Par la soustraction, on en déduit celle-ci

$$(P-P')x+Q-Q'=0, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{Q'-Q}{P-P'}.$$

En mettant cette valeur de x dans l'une des équations [5], dans la 1re, par exemple, il vient

$$(Q'-Q)^2+P(Q'-Q)(P-P')+Q(P-P')^2=0,$$

ou, sous une autre forme,

$$(Q'-Q)^2+(P-P')(PQ'-QP')=0.$$

Cette équation ne contient plus que la seule inconnue y, et quand on saura la résoudre, elle fera connaître les valeurs de y. En les substituant dans l'expression de x écrite plus haut, on obtiendra les valeurs correspondantes de x.

195. Pour que l'analyse du 2e degré fût complète, il faudrait considérer les cas où les inconnues sont en plus grand nombre que les équations. Le plus simple est celui d'une équation unique entre deux inconnues x et y. Si on la résout par rapport à l'une des in-

connues, y, par exemple, on trouvera, en général, une expression qui renfermera x sous un radical; de telle sorte qu'en donnant à cette inconnue x des valeurs rationnelles quelconques, on en trouverait, pour y, qui seraient irrationnelles. On peut alors se proposer de rechercher les valeurs rationnelles de x pour lesquelles les valeurs correspondantes de y sont aussi rationnelles. Mais la difficulté de ce problème, à moins qu'on ne le restreigne à quelques cas fort simples, est supérieure à de simples élémens. Consultez la *Théorie des Nombres* de LEGENDRE.

Racine carrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, ou bien en partie réelle et en partie imaginaire.

196. Nous nous proposerons d'abord *d'extraire la racine carrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable.*

Si on fait le carré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, a et b étant des quantités rationnelles, on trouve un résultat de la forme $A+\sqrt{B}$, dans lequel A et B sont des quantités rationnelles. De là on conclut réciproquement que la racine carrée d'une expression de cette dernière forme peut aussi, dans certains cas, se ramener à la première; c'est cette transformation qu'il s'agit d'effectuer, lorsqu'elle est possible. Il faut donc considérer A et B comme des quantités rationnelles, $\sqrt{B}$ comme une quantité irrationnelle, et déterminer, pour a et b, des valeurs rationnelles telles qu'on ait

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = A+\sqrt{B}.$$

En développant le carré, il vient

$$a+b+\sqrt{4ab} = A+\sqrt{B}.$$

Dans le 1[er] membre, $a+b$ doit être un nombre rationnel, et il n'y a que la partie $\sqrt{4ab}$ qui puisse être un nombre irrationnel : or je dis qu'on doit avoir séparément les deux égalités

[1] $a+b=A$, [2] $4ab=B$.

Supposons qu'il en soit autrement, et isolons $\sqrt{4ab}$ dans l 1[er] membre; il viendra

$$\sqrt{4ab} = A - a - b + \sqrt{B}.$$

Faisons $A - a - b = k$ afin d'abréger, puis élevons au carré. On aura

$$4ab = k^2 + B + 2k\sqrt{B}, \quad \text{ou} \quad 4ab - k^2 - B = 2k\sqrt{B}:$$

égalité absurde, car une quantité rationnelle n'est jamais égale à une quantité irrationnelle. L'absurdité ne peut cesser qu'en posant $k = 0$, ou, ce qui est la même chose, $a + b = A$. Alors la dernière égalité se réduit à $4ab - B = 0$ ou $4ab = B$; et l'on est ainsi ramené aux équations [1] et [2].

Si on élève la 1re de ces équations au carré, et qu'on en retranche la 2e, le 1er membre de l'équation résultante sera le carré de $a - b$; donc

$$[3] \qquad a - b = \sqrt{A^2 - B}.$$

Il est permis de supposer que a est la plus grande des deux quantités a et b, et pour cette raison on prendra le radical $\sqrt{A^2 - B}$ avec le signe $+$.

Maintenant, on connaît donc par les équations [1] et [3] la somme et la différence des inconnues a et b; par conséquent on aura

$$a = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B}, \quad b = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B}.$$

La question exige que les valeurs de a et de b soient rationnelles; or il est évident qu'il faut, pour que cette condition soit remplie, que $A^2 - B$ soit égal à un carré C^2.

Alors il viendra

$$a = \frac{A + C}{2}, \quad b = \frac{A - C}{2};$$

et par suite

$$[4] \qquad \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}.$$

Comme on suppose tacitement $\sqrt{B}$ positif, les radicaux du 2e membre doivent se prendre tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$: autrement, en élevant ce membre au carré, on ne reproduirait pas le terme $+\sqrt{B}$, mais bien $-\sqrt{B}$.

Cette explication même prouve que si l'on avait $\sqrt{A-\sqrt{B}}$, il faudrait prendre les deux radicaux avec des signes contraires; et en conséquence on écrirait

$$[5] \qquad \sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Pour exemple, soit l'expression $\sqrt{12+\sqrt{140}}$. On a $A=12$, $B=140$, $A^2-B=4$. Ce dernier nombre est un carré, et l'on a $C=2$: on peut donc appliquer la formule [4], et il vient

$$\sqrt{12+\sqrt{140}}=\sqrt{\frac{12+2}{2}}+\sqrt{\frac{12-2}{2}}=\sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$. On aura $A=1$, $B=4x^2-4x^4$, $\sqrt{A^2-B}$ ou $C=1-2x^2$. Puisque C est sans radical, et que d'ailleurs le second radical de l'expression proposée a le signe —, il y a lieu d'appliquer la formule [5], et il vient

$$\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}-x.$$

C'est la même valeur de $\sqrt{1-x^2}$ qui entre dans les deux membres. En outre, on doit observer qu'il faudra mettre le signe $\pm$ devant le second, si on veut qu'il représente les deux valeurs du premier.

197. Lorsque la quantité A^2-B n'est pas un carré, les valeurs de a et de b ne sont plus rationnelles; mais il est clair qu'en les substituant dans $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on n'en a pas moins une expression équivalente à $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Seulement, comme elle est alors beaucoup plus compliquée, elle est plus rarement employée. Cependant, quand $\sqrt{B}$ est imaginaire, elle conduit à un résultat qui mérite de fixer l'attention. Changeons B en $-B^2$, $A+\sqrt{B}$ devient $A+B\sqrt{-1}$; et ce qu'il y a de remarquable, c'est que la racine carrée de $A+B\sqrt{-1}$ se ramène elle-même à une expression de la forme $a+b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b sont des quantités réelles, qui peuvent d'ailleurs, ainsi que A et B, n'être pas rationnelles.

Cette proposition devient évidente sur-le-champ en changeant

B en $-B^2$ dans les calculs du n° précédent. Alors, au lieu de $C=\sqrt{A^2-B}$, on a $C=\sqrt{A^2+B^2}$; donc

$$a=\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2},\quad b=\frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2}.$$

Le radical $\sqrt{A^2+B^2}$ étant $>A$, la valeur de a est positive, et celle de b est négative. Représentons-les par α^2 et $-\beta^2$, on aura

$$\sqrt{a}=\pm\alpha,\quad \sqrt{b}=\pm\beta\sqrt{-1},$$

et par suite

$$[6]\qquad \sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\pm(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Je prends α et β tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$, parce que le produit $2\alpha\beta$ doit être égal à B, qui est supposé positif. S'il y avait $-$ devant $B\sqrt{-1}$, il est clair qu'on devrait écrire

$$[7]\qquad \sqrt{A-B\sqrt{-1}}=\pm(\alpha-\beta\sqrt{-1}).$$

Il serait facile de parvenir directement à ces dernières formules en posant $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et en déterminant pour α et β des valeurs réelles telles que $A+B\sqrt{-1}$ soit le carré de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Mais je laisserai cet exercice au lecteur. J'aurai d'ailleurs occasion, chap. XI, de revenir sur ces transformations.

Pour offrir une application, choisissons l'expression très-simple $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$. En la comparant avec $\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}$, on a $A=0$, $B=1$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\beta=\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}\right),$$
$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

198. *Remarque.* Ajoutons les formules [6] et [7] en ne prenant que le signe $+$ pour chacune d'elles : les imaginaires se détruiront, et il restera

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}+\sqrt{A-B\sqrt{-1}}=2\alpha=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ce résultat offre l'exemple d'une expression compliquée d'imaginaires, et qui cependant se réduit à une quantité réelle. Ainsi, on aurait

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2}.$$

Remarque sur les maximums *et les* minimums.

199. On a trouvé plus haut (189) que le produit *maximum* qu'il est possible de former avec les deux parties d'un nombre est égal au produit de ses deux moitiés. Cette proposition peut être généralisée en ces termes : *Le produit de plusieurs nombres, dont la somme est égale à un nombre donné, devient* maximum *quand ces nombres sont égaux entre eux.*

Supposons qu'on ait $a+b+c+d+\ldots=p$, et que parmi les différentes manières de choisir les nombres a, b, c, d,.... sans que cette condition cesse d'avoir lieu, on ait pris celle qui rend le produit $abcd\ldots$ *maximum* : je dis qu'alors tous ces nombres sont égaux. En effet, si a et b, par exemple, étaient inégaux, on aurait, par le n° cité,

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et par conséquent

$$abcd\ldots<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)cd\ldots$$

Dans le second produit, la somme des facteurs est la même que dans le premier, c'est-à-dire, égale à p. Donc le produit $abcd\ldots$ n'est point un *maximum*, à moins que tous ses facteurs ne soient égaux entre eux.

200. Le procédé du n° 189, par lequel on a reconnu le produit *maximum* des deux parties d'un nombre, est susceptible d'une assez grande extension. Supposons qu'une fonction soit composée d'une quantité indéterminée x, combinée avec des quantités données, et qu'on demande la valeur de x pour laquelle la fonction est un *maximum* ou un *minimum*. On raisonnera d'abord comme s'il fallait rendre cette fonction égale à une quantité quelconque z : on aura ainsi une équation de laquelle on tirera la valeur de x,

et alors on cherchera s'il existe quelque valeur de z au-delà ou en-deçà de laquelle les valeurs correspondantes de x deviennent imaginaires. Dans le premier cas, cette valeur est un *maximum* que l'expression proposée ne peut point dépasser; dans le second, c'est un *minimum*.

Par exemple, soit la fraction

$$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}.$$

En l'égalant à z, et tirant la valeur de x, on a successivement

$$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=z,$$

$$x^2-2(z+1)x+2z+2=0,$$

$$x=z+1\pm\sqrt{z^2-1}.$$

On voit sur-le-champ qu'en faisant $z=+1$, on a $x=2$, et que les valeurs de z un peu moindres que 1 rendent x imaginaire; donc l'expression proposée a une valeur *minimum*, laquelle est égale à 1 et correspond à $x=2$.

Pareillement, en faisant $z=-1$, on a $x=0$; et une valeur négative de z un peu plus petite que 1 rendrait x imaginaire. Or, en algèbre, des quantités négatives qui, abstraction faite du signe —, vont en diminuant, doivent être regardées, quand on n'en sépare point le signe, comme croissantes : on peut donc dire que les valeurs de x un peu plus grandes que -1 rendent x imaginaire; donc $z=-1$ est un *maximum* de l'expression proposée, lequel correspond à $x=0$.

Le caractère essentiel d'un *maximum* n'est pas de surpasser toutes les autres valeurs, mais seulement celles qui le précèdent ou qui le suivent immédiatement. Une observation analogue doit se faire sur le *minimum*. Au reste, je n'insisterai pas davantage sur la détermination des *maximums* et des *minimums*. Jusqu'à présent elle a toujours été comprise parmi les applications du calcul différentiel.



CHAPITRE X.

Puissances et racines en général.

Puissances et racines des monômes. Exposans fractionnaires.

201. Soit un produit $pqr\ldots$, et n un nombre positif quelconque : on a

$$(pqr\ldots)^n = pqr\ldots\times pqr\ldots\times pqr\ldots\times \text{ etc.}$$
$$= ppp\ldots\times qqq\ldots\times rrr\ldots\times \text{ etc.}$$
$$= p^n q^n r^n\ldots;$$

donc *on élève un produit à une puissance en élevant chaque facteur à cette puissance.*

S'il s'agit d'une quantité a^m qui a déjà un exposant, on aura

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots = a^{m+m+m+\ldots} = a^{mn};$$

donc *on élève à une puissance une quantité qui est déjà affectée d'un exposant, en multipliant cet exposant par le degré de la puissance.*

Si l'on veut élever à une puissance un monôme quelconque, on peut le regarder comme un produit, et en conséquence élever tous les facteurs à cette puissance : or cela revient *à élever le coefficient à cette puissance et à multiplier tous les exposans par le degré de cette puissance.*

Lorsqu'une quantité est positive, toutes ses puissances sont positives; mais lorsqu'elle est négative, il est clair, d'après la règle des signes, qu'il y aura $+$ devant la 2e puissance, $-$ devant la 3e, $+$ devant la 4e, etc. Ainsi, en général, *quel que soit le signe d'une quantité, les puissances paires de cette quantité ont le signe $+$, et les puissances impaires conservent le signe de cette quantité.*

Au moyen des règles ci-dessus, on aurait

$$(\pm 2a^3b^5c)^4 = +16a^{12}b^{20}c^4, \quad (\pm 2a^3b^5c)^5 = \pm 32a^{15}b^{25}c^5.$$

202. On peut renverser ces règles, et on obtiendra, pour l'extraction des racines, les règles suivantes :

1° *On extrait la racine d'un produit en extrayant la racine de chaque facteur.*

2° *On extrait la racine d'une quantité qui a un exposant en divisant cet exposant par le degré ou l'indice de la racine.*

3° *On extrait la racine d'un monôme quelconque en extrayant celle du coefficient, et en divisant les exposans de chaque lettre par l'indice de la racine.*

4° *Quand la racine à extraire est d'indice pair, elle doit avoir le signe ambigu ±; et quand elle est d'indice impair, elle a le même signe que la puissance.*

Par ces règles on trouve

$$\sqrt[4]{81a^{16}b^{12}} = \pm 3a^4b^3, \quad \sqrt[5]{32a^{10}b^5} = 2a^2b,$$
$$\sqrt[5]{-32a^5b^{15}} = -2ab^3.$$

203. Quand le coefficient d'un monôme n'est point une puissance exacte de l'ordre marqué par l'indice de la racine à extraire, ou que les exposans des différens facteurs ne sont point divisibles par cet indice, la racine du monôme s'indique d'abord au moyen du signe $\sqrt{\ }$; puis on simplifie le radical, comme on l'a déjà fait pour le radical carré. Par exemple, soit $\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}}$. On observera que $96 = 2^5 \times 3$, $a^7 = a^5 \times a^2$, $c^{11} = c^{10} \times c$; donc

$$\sqrt[5]{96a^7b^5c^{11}} = \sqrt[5]{2^5a^5b^5c^{10} \times 3a^2c} = 2abc^2\sqrt[5]{3a^2c}.$$

C'est-à-dire que, *pour simplifier un radical quelconque, on décompose la quantité sous le radical en deux facteurs, dont l'un ne renferme que des puissances exactes de même ordre que la racine à extraire, et dont l'autre n'en renferme aucune; puis on extrait la racine du premier facteur, et l'on indique celle du second.*

204. Aucune quantité réelle, soit positive, soit négative, quand

on l'élève à une puissance paire, ne peut donner de résultat négatif; par conséquent, *toute expression composée d'un radical de degré pair, placé sur une quantité négative, représente une quantité imaginaire.*

Telles sont, en supposant que a et b soient des grandeurs positives par elles-mêmes,

$$\sqrt[4]{-a},\quad \sqrt[6]{-a^5},\quad \sqrt[8]{-2a^3b^4}.$$

Mais toutes ces quantités peuvent, de même que les radicaux carrés imaginaires (157), se transformer en produits dans lesquels il n'entre d'autre imaginaire qu'une racine de -1. Par exemple, il est clair qu'on a

$$\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{a\times-1}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{-1}.$$

205. De même que la division a conduit aux exposans négatifs, de même l'extraction des racines mène à l'emploi des exposans fractionnaires. D'après la règle 2ᵉ du nº 202, si l'on veut extraire la racine 5ᵉ de a^{10}, on doit diviser l'exposant par 5, et la racine cherchée est a^2. Mais en se bornant à indiquer la division, on peut écrire $\sqrt[5]{a^{10}}=a^{\frac{10}{5}}$.

Si l'exposant de a n'était point divisible par 5, la racine ne pourrait plus s'extraire; mais rien n'empêche d'indiquer encore la division de l'exposant, lequel aura alors pour dénominateur l'indice de la racine. Les algébristes ont en effet adopté cette convention, et en conséquence ils regardent comme équivalentes les deux expressions $\sqrt[n]{a^m}$ et $a^{\frac{m}{n}}$.

Arrangemens, permutations, combinaisons.

206. Pour former une puissance quelconque d'un binôme, on a conduit incidemment à résoudre une question qui exige quelques développemens, et dont il est bon de connaître la solution d'avance. Elle fait d'ailleurs partie d'une théorie utile dans un grand nombre de recherches, et surtout dans le calcul des proba-

bilités. Cette théorie, que je vais exposer ici, est celle des *arrangemens*, des *permutations* et des *combinaisons*.

207. *Arrangemens*. Plusieurs lettres, a, b, c, d, e,... étant données, imaginons qu'on les prenne deux à deux de toutes les manières possibles, en sorte que chaque assemblage de deux lettres soit différent des autres, ou par les lettres qui le composent, ou par l'ordre dans lequel elles sont écrites : on aurait ainsi ce qu'on nomme les *arrangemens deux à deux* des lettres données. On comprend de même ce qu'on entend par *arrangemens trois à trois, quatre à quatre*, etc. Rien de plus simple que de composer ces différens arrangemens et d'en déterminer le nombre. Le seul soin à prendre sera de suivre un ordre qui les fasse trouver tous sans en répéter aucun.

Pour avoir les arrangemens 2 à 2, il suffit de placer, à côté de chaque lettre, alternativement chacune des lettres restantes. De cette manière, on obtient des arrangemens tels que

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae,\ldots \\ ba, & bc, & bd, & be,\ldots \\ \text{etc} ; \end{array}$$

et en même temps on voit qu'en désignant par m le nombre des lettres a, b, c,... et par A_2 le nombre de leurs arrangemens 2 à 2, on aura

$$A_2 = m(m-1).$$

On passera aux arrangemens 3 à 3 en plaçant, après chaque arrangement de deux lettres, alternativement chacune des lettres qui n'entre pas dans cet arrangement. Il vient ainsi

$$\begin{array}{lll} abc, & abd, & abe,\ldots \\ acb, & acd, & ace,\ldots \\ \text{etc.}; \end{array}$$

et, en nommant A_3 le nombre de tous ces arrangemens 3 à 3, on a

$$A_3 = A_2(m-2) = m(m-1)(m-2).$$

On s'élèverait semblablement aux arrangemens 4 à 4; et, pour en connaître le nombre, on aurait la formule

$$A_4 = A_3(m-3) = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Chaque fois qu'on s'élèvera à des arrangemens qui auront une lettre de plus, il est clair qu'il s'introduira, dans la formule qui exprime le nombre des arrangemens, un facteur de plus, lequel sera inférieur d'une unité au facteur placé avant lui. Dès-lors on peut conclure avec certitude que l'expression générale du nombre des arrangemens n à n devra renfermer n facteurs pris consécutivement dans la suite $m, m-1, m-2$, etc. Le dernier facteur sera donc $m-(n-1)$ ou $m-n+1$, et par conséquent, en appelant A_n le nombre des arrangemens de m lettres n à n, on doit avoir

$$[1] \qquad A_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

En faisant $n = 2, 3, 4$, le dernier facteur $m-n+1$ se réduit successivement à $m-1, m-2, m-3$, et l'on retrouve les valeurs de A_2, A_3, A_4.

208. *Permutations*. Après avoir placé plusieurs lettres les unes à côté des autres, si on change de toutes les manières possibles l'ordre de ces lettres, on formera leurs *permutations*. Les permutations de n lettres ne sont donc autre chose que les arrangemens de ces n lettres n à n; et par conséquent on peut calculer leur nombre par la formule [1] en y faisant $m=n$. Si on représente par P_n le nombre des permutations de n lettres, on aura $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots1$, ou, en renversant l'ordre des facteurs,

$$P_n = 1.2.3\ldots n.$$

On peut trouver cette formule directement comme il suit. Avec 2 lettres il n'y a que 2 permutations. Celles de 3 lettres se formeront en plaçant alternativement, après chaque lettre, les permutations des deux autres, ce qui donnera 2.3 permutations. En continuant ce raisonnement, on voit que le nombre des permutations de 4 lettres est 2.3.4, et qu'en général, pour n lettres, il serait $1.2.3.4\ldots n$.

209. *Combinaisons*. Lorsque parmi les arrangemens n à n on ne conserve que ceux qui diffèrent entre eux par une ou plusieurs lettres, ceux qu'on obtient ainsi sont désignés sous le nom de *combinaisons* ou de *produits*. Par exemple, les deux arrangemens *abc* et *bca* ne forment qu'une seule combinaison ou qu'un seul produit.

Parmi les arrangemens de m lettres n à n, il est clair que chaque combinaison de n lettres doit se trouver répétée autant de fois qu'il y a de permutations possibles entre les n lettres de cette combinaison. Donc, si on divise le nombre total des arrangemens de m lettres n à n par celui des permutations de n lettres, on obtiendra le nombre des combinaisons de m lettres n à n. Ainsi, ce dernier nombre étant désigné par C_n, il sera donné par la formule

$$[3] \qquad C_n = \frac{A_n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}.$$

Si on veut avoir en particulier le nombre des combinaisons 2 à 2, 3 à 3, etc., il faudra faire $n = 2, 3$, etc.; et il viendra

$$C_2 = \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}, \quad C_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \text{ etc.}$$

L'hypothèse $n = 1$ donnerait $C_1 = m$; et en effet les combinaisons de m lettres une à une ne peuvent être que ces lettres elles-mêmes.

210. Le nombre des combinaisons qu'on peut faire avec des lettres étant essentiellement entier, il s'ensuit que la division indiquée dans la formule [3] doit s'effectuer exactement. Donc *un produit de* n *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* n *premiers nombres entiers.*

Binôme de NEWTON, *dans le cas de l'exposant entier positif.*

211. Tout binôme peut être représenté par $x+a$, et la question est de trouver une formule générale au moyen de laquelle on puisse obtenir immédiatement une puissance quelconque de $x+a$ sans passer par toutes les précédentes. La formule qui atteint ce but est peut-être la plus importante de l'analyse : on l'appelle vulgairement *binôme de Newton*, du nom de son inventeur.

La première idée qui se présente est de faire les puissances successives de $x+a$ par voie de multiplication, et d'examiner s'il est possible d'y apercevoir une loi qui permette de former immédiatement une puissance quelconque, sans passer par les puissances inférieures. Ces calculs se présentent comme il suit :

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+ax \\
 & \quad +ax+a^2 \\ \hline
(x+a)^2= & x^2+2ax+a^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^3+2ax^2+a^2x \\
 & \quad +ax^2+2a^2x+a^3 \\ \hline
(x+a)^3= & x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^4+3ax^3+3a^2x^2+a^3x \\
 & \quad +ax^3+3a^2x^2+3a^3x+a^4 \\ \hline
(x+a)^4= & x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.
\end{array}$$

La loi générale des exposans est évidente, mais celle des coefficiens ne l'est pas. A la vérité, on voit bien que ceux du premier terme et du dernier sont égaux à l'unité, et que ceux du second et de l'avant-dernier sont égaux à l'exposant du binôme; et même, pour les termes intermédiaires, on reconnaît bien encore que les coefficiens également éloignés des extrêmes sont égaux, mais leur composition ne s'aperçoit point.

Ces coefficiens proviennent des réductions qu'entraînent les termes semblables. Or, en multipliant entre eux des binômes tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., dont les seconds termes sont différens, ces réductions n'auraient plus lieu, et il peut se faire qu'alors la composition des termes du produit se manifeste.

212. Considérons donc les produits successifs de ces binômes. Voici les trois premiers :

$$(x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{l|}+a\\+b\end{array}x+ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\end{array}x^2\begin{array}{l|}+ab\\+ac\\+bc\end{array}x+abc,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\\+d\\ \\ \\ \end{array}x^3\begin{array}{l|}+ab\\+ac\\+bc\\+ad\\+bd\\+cd\end{array}x^2\begin{array}{l|}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\\ \\ \\ \end{array}x+abcd.$$

En considérant comme un seul terme tous ceux qui renferment la même puissance de x, on retrouve ici, pour les exposans de x, la même loi que dans les puissances de $x+a$: c'est-à-dire que *dans le premier terme l'exposant de* x *est égal au nombre des binômes facteurs, et qu'il diminue progressivement d'une unité jusqu'au dernier terme, où il est zéro.*

La loi suivant laquelle se composent les multiplicateurs de ces puissances est également facile à apercevoir. *La plus haute puissance est multipliée simplement par l'unité; celle dont l'exposant a une unité de moins l'est par la somme des seconds termes des binômes; celle qui a 2 unités de moins, l'est par la somme des divers produits qu'on obtient en combinant ces seconds termes 2 à 2; celle qui a 3 unités de moins, l'est par la somme des produits qu'on obtient en combinant ces seconds termes 3 à 3; ainsi de suite jusqu'au dernier terme, où l'exposant de* x *est zéro, et qui est égal au produit de tous les seconds termes des binômes.*

La marche qu'on suit dans les multiplications successives suffit pour convaincre que ces lois s'étendent à tant de binômes qu'on voudra; mais s'il restait encore quelque doute, la démonstration suivante le dissiperait.

Admettons pour un moment que ces lois soient vraies pour le produit d'un certain nombre m de binômes; je vais prouver qu'elles le seront encore en prenant un binôme de plus. Soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Y$$

le produit de m binômes $x+a$, $x+b$, $x+c\ldots$; si on le multiplie par un nouveau binôme $x+l$, il viendra

$$x^{m+1} + \left.\begin{matrix}A\\+l\end{matrix}\right| x^m + \left.\begin{matrix}B\\+lA\end{matrix}\right| x^{m-1} + \left.\begin{matrix}C\\+lB\end{matrix}\right| x^{m-2} \ldots \ldots + lY.$$

On reconnaît sur-le-champ que la loi des exposans de x est la même : car l'exposant de x, dans le premier terme, est égal au nombre des binômes facteurs, et il décroît successivement d'une unité jusqu'au dernier terme, qui ne contient plus x.

La loi des coefficiens se soutient également. D'abord il est clair que celui du 1[er] terme est encore l'unité.

Dans le 2e terme, où l'exposant de x a une unité de moins, le coefficient est $A+l$. Or, A étant la somme des seconds termes des m binômes $x+a$, $x+b$,... il s'ensuit que $A+l$ est celle des seconds termes des $m+1$ binômes $x+a$, $x+b$,...$x+l$.

Dans le 3e terme, où l'exposant de x a 2 unités de moins, le coefficient est $B+lA$. Or, d'une part, B exprime la somme des produits 2 à 2 des m seconds termes a, b, c...; et, d'autre part, lA est celle des produits de ces m termes par l: donc $B+lA$ est la somme de tous les produits 2 à 2 qu'on peut former avec les $m+1$ seconds termes a, b, c,...l.

Dans le 4e terme, où l'exposant de x a 3 unités de moins, le coefficient est $C+lB$. Or, d'une part, C exprime la somme des produits 3 à 3 qu'on peut former avec les m quantités a, b, c...; et, d'autre part, lB est la somme de leurs produits 2 à 2 multipliés par l: donc $C+lB$ est la somme de tous les produits 3 à 3 qu'on peut faire avec les $m+1$ seconds termes a, b, c,...l.

Ce raisonnement peut se continuer pour tous les autres termes jusqu'au dernier lY, qui est évidemment le produit des $m+1$ seconds termes a, b, c,...l, puisque Y est le produit des m quantités a, b, c....

Ainsi, la loi de composition, supposée vraie pour m binômes, est encore vraie en prenant un binôme de plus. Or, par le fait de la multiplication, on l'a reconnue vraie dans le cas de deux facteurs; donc elle est vraie pour trois. Étant vraie pour trois, elle le sera pour quatre; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs. Donc enfin elle est générale.

213. Maintenant, pour revenir à la puissance $(x+a)^m$, il suffira de supposer dans le produit de m binômes $x+a$, $x+b$,... tous les seconds termes égaux à a. D'abord il est clair que les puissances de x contenues dans les termes successifs seront encore

$$x^m,\quad x^{m-1},\quad x^{m-2},\ldots\ldots\quad x^0,$$

et que le premier terme sera simplement x^m.

Dans le produit des m binômes, le multiplicateur de x^{m-1} est la somme des m seconds termes des binômes; donc, dans le développement de $(x+a)^m$, ce multiplicateur deviendra ma; donc le 2e terme de ce développement est max^{m-1}.

Dans le 3e terme du produit des m binômes, les divers produits 2 à 2 qui multiplient x^{m-2} deviennent tous égaux à a^2; donc leur somme sera égale à autant de fois a^2 qu'on peut faire de produits 2 à 2 avec m lettres; donc, si on nomme p le nombre de ces produits, le 3e terme du développement de $(x+a)^m$ sera pa^2x^{m-2}.

En général, la somme des produits par laquelle chaque puissance de x est multipliée, dans le produit des binômes, doit se changer en une puissance de a, répétée autant de fois que cette somme contient de produits. Par conséquent, en désignant par $p, q, r, \ldots$ le nombre des produits 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ... de m lettres, le développement de $(x+a)^m$ pourra s'écrire ainsi :

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + pa^2x^{m-2} + qa^3x^{m-3} + ra^4x^{m-4} \ldots + a^m.$$

Pour dernier terme, j'ai pris simplement a^m, parce qu'il doit être le produit de m quantités égales à a.

La question est donc ramenée à chercher les coefficiens $p, q, r, \ldots$; mais comme ils sont déjà connus par le n° 209, il n'y a plus qu'à substituer leurs valeurs, et l'on a enfin la formule

$$[1] \quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^4x^{m-4} \ldots\ldots + a^m.$$

214. La loi des termes est si évidente, qu'on peut écrire immédiatement un terme de tel rang qu'on voudra.

1° Il est clair que chaque coefficient a pour dénominateur la suite 1.2.3..., jusqu'au nombre qui marque combien il y a de termes qui précèdent, et pour numérateur, les facteurs décroissans $m(m-1)(m-2)\ldots$ jusqu'à celui où m est diminué d'autant d'unités, moins une, qu'il y en a dans le dernier facteur du dénominateur.

2° Il est clair aussi que l'exposant de a est toujours égal au nombre des termes qui précèdent, et celui de x égal à m diminué de ce même nombre; de telle sorte que la somme des exposans de x et de a reste constamment égale à m.

En conséquence, si on désigne par T_n un terme quelconque

dont le rang est n, on aura, pour le terme T_{n+1} qui occupe le rang $n+1$ ou qui en a n avant lui,

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

Cette expression est *le terme général* de la formule [1]. On l'appelle ainsi, parce qu'en y supposant successivement $n=1$, 2, 3,... on peut en déduire tous les termes de cette formule, à partir du second.

Par exemple, pour avoir le 7e terme, on y ferait $n=6$, et il viendrait

$$T_7=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6}a^6 x^{m-6}.$$

Si on voulait avoir le dernier terme, il faudrait observer que la formule a en tout $m+1$ termes, et que par suite il faut supposer $n=m$. Alors il vient

$$T_{m+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots m}a^m x^0.$$

Or le numérateur renferme, dans un ordre inverse, les mêmes facteurs que le dénominateur, et x^0 est la même chose que l'unité; donc cette expression se réduit à a^m, ainsi que cela doit être.

Si on prenait pour n un nombre entier $>m$, il y aurait un facteur $m-m$ ou zéro parmi ceux du terme général, ce qui avertirait que tous les termes sont nuls au-delà du rang $m+1$, c'est-à-dire que la formule du binôme n'a pas plus de $m+1$ termes.

Remarques sur la formule du binôme. Comment on l'applique.

215. Quand on veut faire une puissance particulière de $x+a$, la cinquième, par exemple, il est commode d'employer chaque terme au calcul du suivant. Or, si on examine avec attention les termes successifs du développement de $(x+a)^m$, on découvre cette régle générale : *Pour passer d'un terme au suivant, multipliez son coefficient par l'exposant de* x *dans ce terme, divisez-le par le nombre qui marque le rang de ce terme, ajoutez une unité à l'exposant de* a, *et retranchez-en une à celui de* x.

218. Dans les développemens de $(x+a)^m$ et de $(x-a)^m$ faisons $x=1$ et $a=1$: ils donnent

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{etc.},$$

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{etc.}$$

Donc, *dans toute puissance de* x+a, *la somme des coefficiens, y compris ceux des termes extrêmes, est égale à une puissance de* 2, *indiquée par celle du binôme; et la somme des coefficiens de rang pair est égale à celle des termes de rang impair.*

219. Pour montrer comment on doit faire les calculs, quand on veut élever à une puissance un binôme quelconque, je prendrai l'exemple $(2a^3-3bx^2)^6$.

On commence par développer $(x-a)^6$ comme dans le n° 215, en ayant soin de placer les termes à la suite les uns des autres à mesure qu'on les forme, et de leur donner alternativement les signes + et —. On aura soin aussi de remarquer, lorsqu'on aura trouvé le 4ᵉ terme, que les coefficiens des trois derniers sont les mêmes, dans un ordre inverse, que ceux des trois premiers. De cette manière, on peut écrire sur-le-champ

$$(x-a)^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$$

Maintenant, pour passer de $(x-a)^6$ à $(2a^3-3bx^2)^6$, il n'y a qu'à changer x en $2a^3$ et a en $3bx^2$. Il vient d'abord

$$(2a^3-3bx^2)^6 = (2a^3)^6 - 6(3bx^2)(2a^3)^5 + 15(3bx^2)^2(2a^3)^4$$
$$-20(3bx^2)^3(2a^3)^3 + 15(3bx^2)^4(2a^3)^2 - 6(3bx^2)^5(2a^3) + (3bx^2)^6;$$

puis, en effectuant les calculs,

$$(2a^3-3bx^2)^6 = 64a^{18} - 576a^{15}bx^2 + 2160a^{12}b^2x^4$$
$$-4320a^9b^3x^6 + 4860a^6b^4x^8 - 2916a^3b^5x^{10} + 729b^6x^{12}.$$

220. Dans la plupart des applications, on trouve plus commode de n'avoir à développer que des puissances de binômes qui aient l'unité pour premier terme. Or $x+a = x\left(1+\frac{a}{x}\right)$; donc, en posant $\frac{a}{x}=z$, on aura

$$(x+a)^m = x^m(1+z)^m.$$

On voit qu'il ne s'agit plus que de développer $(1+z)^m$; et pour cela il suffit de remplacer, dans la formule [1] du n° 218, x par 1 et a par z. Il vient ainsi

$$(1+z)^m = 1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+\text{etc.}$$

On réduit cette formule à la règle suivante : *Après avoir formé avec l'exposant* m *les fractions* $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, etc., *prenez l'unité pour premier terme du développement ; multipliez cette unité par la* 1re *fraction et aussi par* z ; *multipliez le résultat par la* 2e *fraction et encore par* z ; *multipliez le nouveau résultat par la* 3e *fraction et encore par* z ; *et ainsi de suite. Enfin, ajoutez tous ces résultats au premier terme* 1, *et vous aurez le développement de* $(1+z)^m$.

On verra plus tard que la formule [1] ne cesse point d'être vraie quand l'exposant m est fractionnaire ou négatif. C'est surtout dans ces cas qu'il convient d'employer la règle ci-dessus, parce qu'elle a l'avantage de mettre en évidence la loi des coefficiens numériques propres à chaque développement particulier.

Puissances des polynômes.

221. En considérant deux termes d'un trinôme comme n'en formant qu'un, on ramène au binôme les puissances de ce trinôme, et l'on en peut dire autant de tous les polynômes. Je vais montrer ici comment on parvient par cette voie au terme général de la puissance

$$(a+b+c+d\ldots)^m,$$

c'est-à-dire, au terme qui renferme les lettres a, b, c,... à des exposans quelconques n, n', n'',...

Posons $x = b+c+d\ldots$: la puissance ci-dessus sera égale $(a+x)^m$, et, d'après ce qui a été dit n° 216, la partie qui contient a^n dans le développement de $(a+x)^m$ peut s'écrire ainsi :

$$[a] \qquad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots m \times a^n x^{m-n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n \times 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)}.$$

Posons $y = c + d \ldots$: on aura $x^{m-n} = (b+y)^{m-n}$, et par suite, si on développe cette dernière puissance, la partie qui contiendra $b^{n'}$ sera égale à

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots (m-n) \times b^{n'} y^{m-n-n'}}{1.2.3 \ldots\ldots n' \times 1.2.3 \ldots\ldots (m-n-n')}.$$

Il est évident qu'en mettant cette quantité au lieu de x^{m-n} dans l'expression $[a]$, le résultat représentera l'ensemble des termes qui contiennent $a^n b^{n'}$ dans la puissance du polynôme donné. Ce résultat, en effaçant les multiplicateurs et les diviseurs qui se détruisent, sera

$$[b] \quad \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots m \times a^n b^{n'} y^{m-n-n'}}{1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots n' \times 1.2.3 \ldots (m-n-n')}.$$

Posons encore $z = d + \ldots$: on aura $y^{m-n-n'} = (c+z)^{m-n-n'}$, et la partie de $y^{m-n-n'}$ dans laquelle se trouve $c^{n''}$ sera

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots (m-n-n') \times c^{n''} z^{m-n-n'-n''}}{1.2.3 \ldots n'' \times 1.2.3 \ldots (m-n-n'-n'')}.$$

Par suite, en mettant dans $[b]$ cette expression au lieu de $y^{m-n-n'}$, et faisant les réductions, on aura

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots\ldots m \times a^n b^{n'} c^{n''} z^{m-n-n'-n''}}{1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots n' \times 1.2.3 \ldots n'' \times 1.2.3 \ldots (m-n-n'-n'')}.$$

Il est évident maintenant, sans pousser les raisonnemens plus loin, que si on nomme V le terme général du développement de

$$(a+b+c+d \ldots)^m,$$

ce terme pourra se représenter ainsi

$$V = \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots m \times a^n b^{n'} c^{n''} \ldots}{1.2.3 \ldots n \times 1.2.3 \ldots n' \times 1.2.3 \ldots n'' \times \ldots},$$

$n, n', n'', \ldots$ étant tels nombres entiers positifs qu'on voudra, pourvu que leur somme soit égale à m. De sorte qu'on obtiendrait tous les termes du développement dont il s'agit en donnant, dans cette formule, à $n, n', n'', \ldots$ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à la condition

$$n + n' + n'' \ldots = m.$$

Remarque. Quand on fait un de ces nombres égal à zéro, V prend une forme illusoire. Par exemple, soit $n=0$, la suite $1.2.3\ldots n$ placée au dénominateur ne peut plus avoir de sens : car en prenant des facteurs croissans à partir de 1, on ne peut pas rencontrer le facteur zéro. Pour lever cette difficulté, remontons au terme général [a] du développement de $(a+x)^m$, et remarquons que l'hypothèse $n=0$ le réduit à $\frac{x^m}{1.2.3\ldots 0}$. Mais, d'un autre côté, l'hypothèse $n=0$ devrait donner, dans ce développement, le terme qui ne contient point a, et ce terme est x^m; donc, pour que ce terme puisse se déduire de la formule [a], il suffit de considérer la suite $1.2.3\ldots n$ comme équivalente à 1 dans le cas particulier de $n=0$. La même observation doit s'étendre aux autres suites de facteurs contenues dans le dénominateur de V; et alors V donnera, sans aucune exception, tous les termes de la puissance du polynôme $a+b+c+$ etc.

Racines quelconques des nombres et des polynômes.

222. Supposons, par exemple, qu'on ait à extraire la racine cinquième d'un nombre.

On formera d'abord le tableau des puissances cinquièmes des neuf premiers nombres, et l'on s'en servira pour obtenir, à une unité près, la racine des nombres moindres que 10^5, c'est-à-dire, qui n'ont pas plus de cinq chiffres.

Quand un nombre a plus de cinq chiffres, sa racine cinquième en aura plus d'un, et on peut la décomposer en deux parties $a+b$, a étant les dixaines et b les unités. Alors on examinera comment se compose la puissance 5e de $a+b$; mais, comme on ne se servira que des deux termes qui renferment les plus hautes puissances de a, on posera seulement

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \text{ etc.}$$

Ces raisonnemens et ceux qui restent encore à faire sont tellement semblables à ceux qu'on fait en arithmétique pour trouver la racine cubique, que je crois inutile de m'y arrêter davantage.

223. Quand le degré de la racine est un nombre composé de

plusieurs facteurs, elle peut s'extraire au moyen de racines successives dont les degrés sont ces divers facteurs. En effet, d'après la 2ᵉ règle du nº 202, on a

$$\sqrt[m]{a^{mnp}} = a^{np}, \quad \sqrt[n]{a^{np}} = a^p, \quad \sqrt[p]{a^p} = a.$$

Or, si on voulait extraire de a^{mnp} la racine de l'ordre mnp, cette racine serait évidemment a : c'est-à-dire, la même qu'on trouve en extrayant d'abord la racine m, puis la racine n, puis encore la racine p.

On pourra donc obtenir la racine 4ᵉ au moyen de deux racines carrées, la racine 8ᵉ au moyen de trois, la racine 16ᵉ au moyen de quatre, et ainsi de suite : c'est-à-dire que toute racine dont le degré est une puissance de 2 peut s'extraire par des racines carrées successives.

Au reste, quand on a besoin d'extraire des racines de degré élevé, il est toujours plus commode de faire ces opérations par logarithmes.

224. Passons aux polynômes. La question à résoudre est celle-ci : *On suppose qu'un polynôme donné* P *est la puissance* m *d'un polynôme inconnu* p ; *et il s'agit de retrouver* p.

Considérons les deux polynômes comme ordonnés selon les exposans décroissans d'une même lettre x, et nommons a, b, c,... les termes inconnus de la racine p : ils devront être tels qu'en élevant $a+b+c$... à la puissance m, on retrouve tous les termes qui composent P. Or, si on imagine qu'on effectue cette puissance par des multiplications successives, il est clair que, dans le résultat, le terme où x aura le plus haut exposant sera la puissance m de a; donc *on connaîtra le* 1ᵉʳ *terme* a *de la racine cherchée* p *en extrayant la racine* m *du* 1ᵉʳ *terme du polynôme donné* P.

Le 1ᵉʳ terme de la racine étant trouvé, il sera facile d'obtenir le 2ᵉ ; mais je préfère montrer tout d'abord comment, lorsqu'on connaît plusieurs termes successifs de la racine à partir du 1ᵉʳ, on peut déterminer le terme qui vient immédiatement après.

Soit u la somme des termes connus, et v celle des termes inconnus ; on doit avoir $P = (u+v)^m$, ou, en développant,

$$P = u^m + mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

Je n'ai point mis en évidence la composition des coefficiens k, k',... parce que cela serait inutile, ainsi qu'on va le voir. De cette égalité, on tire

$$P - u^m = mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

D'une part, le 1[er] membre $P - u^m$ est une quantité qu'on peut calculer en formant la puissance m de la quantité connue u, et en la retranchant du polynôme P. D'autre part, le second membre est une somme de produits au moyen desquels on peut facilement assigner la composition du 1[er] terme du reste égal à $P - u^m$, et par suite découvrir le 1[er] terme de la partie inconnue v.

D'abord, si on développe u^{m-1}, il est clair, d'après les seules règles de la multiplication, que le 1[er] terme du développement, c'est-à-dire celui qui renferme x au plus haut exposant, sera a^{m-1}; donc, si on nomme f le 1[er] terme de v, le 1[er] terme du produit $mu^{m-1}v$ sera $ma^{m-1}f$. Par un raisonnement semblable, on voit que les premiers termes, dans les développemens des autres produits, seront respectivement $ka^{m-2}f^2$, $k'a^{m-3}f^3$,... Ces termes, abstraction faite des coefficiens qui n'ont aucune influence sur le degré de x, peuvent se déduire du terme $ma^{m-1}f$ en y supprimant un ou plusieurs facteurs égaux à a, et en les remplaçant par autant de facteurs égaux à f. Or f étant en x d'un degré inférieur à a, ces changemens ne peuvent donner que des termes de degré inférieur à $ma^{m-1}f$. Donc, après avoir soustrait du polynôme donné P la puissance m de la partie u trouvée à la racine, le 1[er] terme du reste est égal au produit de m fois la puissance $m-1$ du 1[er] terme a de la racine par le premier terme de ceux qui restent encore à trouver. Donc enfin, en divisant le 1[er] terme du reste par m fois la puissance $m-1$ du 1[er] terme de la racine, on connaîtra un nouveau terme de cette racine.

Cette conclusion donne le moyen de découvrir successivement tous les termes de la racine, une fois que le 1[er] est connu. *Pour avoir le 2[e] terme* b, *on retranche du polynôme donné* P *la puissance* m *du* 1[er] *terme* a *de la racine*, *puis on divise le* 1[er] *terme du reste par* ma^{m-1}; *pour avoir le* 3[e] *terme* c *de la racine*, *on retranche de* P *la puissance* m *de* $a+b$, *puis on divise le* 1[er] *terme du nouveau reste par* ma^{m-1}; *ainsi de suite.*

225. Ce procédé fera toujours connaître si le polynôme donné est ou n'est pas une puissance exacte du degré m. En effet, pour peu qu'on fasse attention aux réductions qui doivent s'opérer en formant les restes successifs, on voit que le 1er terme de chaque reste contient la lettre x, d'après laquelle on a ordonné, à un exposant moindre que le 1er terme du reste précédent; donc on finira ou par trouver un reste nul, auquel cas le polynôme donné est la puissance m de la quantité écrite à la racine, ou par trouver un reste dont le 1er terme ne sera plus divisible par m fois la puissance $m-1$ du 1er terme de la racine, et alors on sera certain que le polynôme donné n'est pas une puissance exacte du degré m.

On peut aussi remarquer que si le polynôme donné est une puissance du degré m, la racine m de son dernier terme doit être le dernier terme de la racine de ce polynôme. Donc, si le calcul conduit à placer à la racine un terme de degré moindre, on sera encore assuré que le polynôme n'est pas une puissance exacte de l'ordre m.

226. Au lieu d'ordonner de façon que les exposans d'une lettre x soient décroissans, on peut ordonner en sens contraire; et il est clair que les raisonnemens qui font trouver la racine (224) subsisteront en entier. Alors, dans le premier terme des restes successifs, l'exposant de x va en augmentant, et par conséquent il ne sera jamais un obstacle à ce qu'on puisse effectuer les divisions qui doivent donner les termes de la racine. Mais comme la racine du dernier terme du polynôme donné doit toujours être le dernier terme de la racine cherchée, il s'ensuit que le calcul ne peut amener à la racine un terme de degré supérieur que dans les cas où le polynôme donné n'est pas une puissance exacte.

Il serait superflu de parler des cas où la lettre x, d'après laquelle on ordonne, se trouve au même exposant dans plusieurs termes. Ce qui a été dit à ce sujet, en traitant de la division ou de la racine carrée, doit se répéter ici littéralement.

CHAPITRE XI.

Calcul des radicaux et des exposans fractionnaires.

Calcul des radicaux arithmétiques.

227. Dans les premiers temps de l'algèbre, on ne considérait que des grandeurs positives, et par suite non-seulement les quantités placées sous les radicaux étaient positives, mais les valeurs des radicaux étaient elles-mêmes regardées comme telles. Plus tard, lorsque les quantités négatives ont été introduites dans les calculs algébriques, on a remarqué qu'un radical de degré pair devait être précédé du signe $\pm$; et plus tard encore, après de nouveaux progrès, quand on y a admis les quantités imaginaires, on a reconnu que les radicaux pouvaient aussi avoir des déterminations de cette espèce.

Sous l'acception restreinte dont j'ai parlé d'abord, c'est-à-dire, lorsque les radicaux ont des valeurs positives et qu'on rejette toutes les autres, ils seront très-bien désignés par la dénomination de *radicaux arithmétiques;* et, quand on leur donne toute l'extension que permet l'emploi des signes de l'algèbre, par celle de *radicaux algébriques.*

Je vais exposer ici les règles de calcul relatives aux premiers : l'ordre à suivre sera le même que pour les radicaux carrés.

228. On a déjà dit (210) qu'on élève un produit à une puissance en y élevant tous ses facteurs, et que par conséquent on extrait aussi la racine d'un produit en extrayant celle de chaque facteur; donc

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b};$$

donc, *s'il y a sous un radical une puissance de même degré que le radical, on peut mettre la racine de cette puissance en facteur hors du radical; et, réciproquement, un facteur placé devant un*

radical peut passer sous ce radical, en l'élevant à la puissance marquée par l'indice.

229. Lorsque des radicaux de degrés différens sont joints entre eux par les signes + et —, comme dans l'expression

$$3a\sqrt[5]{a^2b}+b\sqrt[3]{a^2b^2}-a^2\sqrt[7]{2ab},$$

ils ne donnent lieu à aucune réduction.

Mais il en est autrement lorsqu'ils ont le même indice, et qu'en les simplifiant il reste la même quantité sous chacun d'eux. Par exemple, soit

$$3\sqrt[5]{2a^{13}b}-5\sqrt[5]{64a^8b^6}-7\sqrt[5]{2a^3b^{11}}:$$

on simplifie les radicaux, et il vient

$$3a^2\sqrt[5]{2a^3b}-10ab\sqrt[5]{2a^3b}-7b^2\sqrt[5]{2a^3b}.$$

Maintenant tous les radicaux sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ne diffèrent que par les facteurs placés en dehors; dès-lors on peut les réduire à un seul, et écrire

$$(3a^2-10ab-7b^2)\sqrt[5]{2a^3b}.$$

230. Soit le produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}$. En l'élevant à la puissance m on trouve abc, et par conséquent il est lui-même égal à $\sqrt[m]{abc}$; donc

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc};$$

donc *on multiplie entre eux plusieurs radicaux de même degré en formant le produit des quantités placées sous les radicaux, et en affectant ce produit du radical commun.*

231. On élève la fraction $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ à la puissance m en formant la puissance m de son numérateur et de son dénominateur, ce qui donne $\frac{a}{b}$; donc

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

donc *on divise l'un par l'autre deux radicaux de même indice en divisant l'une par l'autre les quantités placées sous les radicaux, et en affectant le quotient du radical commun.*

232. Considérons maintenant les puissances des radicaux. D'abord, par la règle de la multiplication (230), il est clair qu'en prenant n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$, on a

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\ldots = \sqrt[m]{aaa\ldots} = \sqrt[m]{a^n};$$

donc *on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On élève encore un radical à une puissance *en divisant, quand cela est possible, l'indice du radical par l'exposant de la puissance.* Ainsi,

$$(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}.$$

En effet, $\sqrt[mn]{a}$ est une quantité mn fois facteur dans a : on peut donc partager a en m groupes, chacun composé de n facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$. Or chaque groupe équivaut à $(\sqrt[mn]{a})^n$; donc cette dernière quantité est m fois facteur dans a; donc enfin

$$(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}.$$

S'il arrive que l'exposant de la puissance, sans être un diviseur de l'indice, ait seulement avec lui un facteur commun, on pourra faire concourir les deux règles à la formation de la puissance. Par exemple, soit $(\sqrt[mn]{a})^{np}$. On remarquera qu'on peut faire la puissance np d'une quantité en élevant d'abord cette quantité à la puissance n, et le résultat à la puissance p. Or, d'après la seconde règle, $(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}$; et, d'après la première, $(\sqrt[m]{a})^p = \sqrt[m]{a^p}$; donc

$$(\sqrt[mn]{a})^{np} = \sqrt[m]{a^p}.$$

233. Pour extraire une racine d'un radical, il n'y a qu'à renverser les règles ci-dessus. D'abord on a

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[m]{a};$$

car en élevant $\sqrt[m]{a}$ à la puissance n on, retrouve $\sqrt[m]{a^n}$. Donc *on extrait la racine d'un radical en extrayant celle de la quantité qui est sous le radical.*

Lors même que la quantité sous le radical n'est pas une puissance de même ordre que la racine à extraire, on peut encore appliquer cette règle, mais alors la racine à extraire ne sera qu'indiquée. Par exemple, on écrira

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}.$$

En second lieu, puisqu'on a $(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}$, on doit avoir aussi

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

donc *on peut extraire une racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par le degré de la racine à extraire.*

Cette manière de prendre la racine d'un radical est la plus usitée. D'ailleurs, chacune des deux règles montre également que l'ordre dans lequel on extrait deux racines successives est tout-à-fait indifférent; et il est clair que cette conclusion s'étend à un nombre quelconque de racines successives.

234. La multiplication et la division des radicaux de même indice réduit ces radicaux à un seul. Il en sera donc de même pour des radicaux quelconques, si on les ramène préalablement au même indice, et c'est ce qui est facile. Remarquons, d'un côté, qu'on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical (232); et, d'un autre côté, qu'on extrait une racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par celui de la racine qu'on veut extraire (233). De là il suit que *la valeur d'un radical ne change point si on multiplie son indice par un nombre, et qu'en même temps on élève à la puissance marquée par ce nombre la quantité placée sous le radical.*

Cette remarque montre que plusieurs radicaux peuvent se ramener à un indice commun, par les mêmes règles qui servent à réduire des fractions au même dénominateur. Ici les indices des radicaux remplacent les dénominateurs des fractions.

Par exemple, soit le produit

$$P = \sqrt[3]{a^2b^2} \times \sqrt[4]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^4}.$$

Comme chaque indice est premier avec les deux autres, le plus petit nombre divisible par chacun d'eux est le produit $3 \times 4 \times 5 = 60$, et ce sera l'indice auquel je ramenerai les radicaux.

En divisant 60 par les trois indices, on obtient les quotiens 20, 15, 12 : c'est par ces nombres qu'on doit multiplier respectivement les indices des trois radicaux, en même temps qu'on élevera les quantités placées sous les radicaux aux puissances marquées par ces nombres. De cette manière il vient

$$P = \sqrt[60]{a^{40}b^{40}} \times \sqrt[60]{a^{30}b^{45}} \times \sqrt[60]{a^{36}b^{48}};$$

puis, en effectuant la multiplication et simplifiant,

$$P = \sqrt[60]{a^{106}b^{133}} = ab^2\sqrt[60]{a^{46}b^{13}}.$$

Soit encore le produit

$$Q = \sqrt[4]{32a^2b^5} \times \sqrt[6]{128a^7b} \times \sqrt[8]{64a^3b^7}.$$

Ici le plus petit nombre divisible par chaque indice est 24. Observons en outre que les facteurs numériques, sous les radicaux, sont des puissances de 2, savoir : $32 = 2^5$, $128 = 2^7$, $64 = 2^6$. En réduisant les trois radicaux à l'indice 24, on aura

$$Q = \sqrt[24]{2^{30}a^{12}b^{30}} \times \sqrt[24]{2^{28}a^{28}b^4} \times \sqrt[24]{2^{18}a^9b^{21}}$$
$$= \sqrt[24]{2^{76}a^{49}b^{55}} = 2^3a^2b^2\sqrt[24]{2^4ab^7} = 8a^2b^2\sqrt[24]{16ab^7}.$$

Calcul des exposans fractionnaires.

235. Puisque les exposans fractionnaires ne font que remplacer des radicaux (205), c'est du calcul des radicaux qu'on doit tirer les règles du calcul de ces exposans. Il est inutile d'avertir qu'il ne sera encore question ici que de radicaux arithmétiques.

En parcourant les différens cas que peuvent présenter la multiplication et l'élévation aux puissances, il vient

$$a^p \times a^{\frac{q}{n}} = a^p \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{pn+q}} = a^{\frac{pn+q}{n}}.$$

$$a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p}\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn+qm}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}}.$$

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q = \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q = \sqrt[m]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{m}}.$$

$$\left(a^q\right)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(a^q)^p} = \sqrt[m]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{m}}.$$

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q} = \sqrt[mn]{a^{pq}} = a^{\frac{qp}{mn}}.$$

Tous ces résultats sont remarquables en ce qu'*ils sont précisément les mêmes que si l'on eût appliqué immédiatement aux exposans fractionnaires les règles établies pour les exposans entiers.*

Cette analogie entre les deux sortes d'exposans a lieu encore dans la division et dans l'extraction des racines. En effet, dans ces opérations, les règles des exposans se déduisent de celles de la multiplication et de l'élévation aux puissances; donc elles doivent, comme dans la multiplication et l'élévation aux puissances, rester les mêmes pour les exposans fractionnaires que pour les exposans entiers.

Par là il devient évident que la division peut donner naissance à des exposans fractionnaires négatifs; par conséquent la convention du n° 58 s'étendra aussi à ces derniers, c'est-à-dire que p, étant entier ou fractionnaire, l'expression a^{-p} est toujours équivalente à $\frac{1}{a^p}$. De là il suit que, pour les exposans négatifs fractionnaires, les règles seront absolument les mêmes que pour les exposans négatifs entiers; et comme, pour ceux-ci, elles sont déjà les mêmes que pour les exposans positifs, on conclut que tous les exposans, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, entrent d'après les mêmes règles dans les diverses opérations de l'algèbre.

A la vérité, on n'a considéré (60, 61) les exposans entiers négatifs que dans la multiplication et la division, et non pas dans les élévations aux puissances; mais la conclusion ci-dessus n'en est pas moins vraie. En effet, m et n étant des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, il est facile de voir qu'on a

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn};$$

et ces résultats montrent qu'on doit toujours, comme dans le cas des exposans positifs, multiplier l'exposant de a par celui de la puissance.

236. En général, toute notation bien choisie doit être la représentation exacte de l'opération dont elle tire son origine ; et cette condition est si fidèlement remplie par les différentes sortes d'exposans, qu'il est toujours facile de transformer une expression dans laquelle elles se trouvent, en une autre qui ne renferme que des exposans entiers positifs et des radicaux. Pour qu'il ne puisse rester aucun doute à cet égard, j'effectuerai cette transformation sur la formule

$$x = \left(\sqrt[-\frac{m}{n}]{a^{-\frac{p}{q}}}\right)^{-r}.$$

Ne considérons pour un moment que la quantité placée entre parenthèses, et posons

$$z = \sqrt[-\frac{m}{n}]{a^{-\frac{p}{q}}}.$$

A cause du sens attaché au signe $\sqrt[-\frac{m}{n}]{}$, on doit avoir

$$z^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{p}{q}};$$

à cause des exposans négatifs, cette égalité se change en celle-ci

$$\frac{1}{z^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \quad \text{d'où} \quad z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}};$$

et cette dernière, à cause des exposans fractionnaires, équivaut à celle-ci

$$\sqrt[n]{z^m} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Or, en élevant les deux membres de cette égalité à la puissance n, il vient

$$z^m = \sqrt[q]{c^{px}};$$

puis, en extrayant la racine m de chacun,

$$z = \sqrt[mq]{a^{px}}.$$

Donc enfin la formule proposée deviendra

$$x = z^{-r} = \frac{1}{z^r} = \frac{1}{\sqrt[mq]{a^{pxr}}}.$$

237. On pourrait demander si les règles du calcul des exposans s'appliquent aussi aux exposans incommensurables ou imaginaires.

Relativement aux exposans incommensurables, je ferai remarquer qu'ils n'ont absolument aucun sens par eux-mêmes, et que, pour leur en donner un, il faut concevoir par la pensée qu'on les remplace par des exposans commensurables qui en approchent de plus en plus. Alors, une formule dans laquelle il entre des exposans incommensurables doit être considérée comme représentant la limite vers laquelle tendent les valeurs qu'on en déduit, en y remplaçant ainsi les exposans par des nombres commensurables qui peuvent différer de ces exposans aussi peu qu'on voudra. De cette manière, on comprend que l'expression proposée représentera exactement la même limite, après qu'on y aura exécuté sur les exposans incommensurables qu'elle contient les mêmes opérations que s'ils étaient commensurables.

Par exemple, m et n étant incommensurables, on doit toujours avoir

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

En effet, si on met au lieu de m et n des nombres commensurables m' et n', m'' et n'',... qui approchent indéfiniment de m et de n, on aura

$$a^{m'} \times a^{n'} = a^{m'+n'}, \qquad a^{m''} \times a^{n''} = a^{m''+n''}, \ldots$$

Les premiers membres de ces égalités tendent donc vers la même limite que les seconds. Or, $a^m \times a^n$ représente la limite des uns, et a^{m+n} celle des autres; donc $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Relativement aux exposans imaginaires, nous observerons d'une

manière générale qu'en introduisant les quantités imaginaires dans les calculs, une convention tacite subsiste toujours : c'est de regarder comme équivalentes les expressions dans lesquelles on remplace certaines lettres a, b, etc., par des quantités imaginaires, toutes les fois qu'il est démontré que ces expressions sont égales en y mettant pour ces lettres des valeurs réelles quelconques.

S'il s'agit, par exemple, de $a^m \times a^n$, cette expression n'ayant absolument aucun sens lorsque m et n sont imaginaires, il est clair que, sans une convention expresse ou tacite, on ne pourrait point la regarder comme équivalente à a^{m+n}.

Sur les valeurs multiples des radicaux algébriques.

238. Les radicaux n'ont encore été considérés que comme représentant des valeurs essentiellement réelles et positives; maintenant je vais leur rendre toute leur généralité, c'est-à-dire que je les regarderai comme désignant indistinctement toutes les valeurs qui reproduisent la quantité placée sous le radical, quand on les élève à la puissance marquée par l'indice de ce radical. Par là nous sommes ramenés à la distinction déjà établie ailleurs (158) entre les *déterminations arithmétiques* et les *déterminations algébriques*. Chaque radical n'en admet qu'une seule de la première espèce; et encore, pour cela, faut-il que la quantité soumise au radical soit réelle et positive. Quelques développemens sur ce point ne seront pas inutiles.

239. Prenons un radical quelconque $\sqrt[m]{A}$, et supposons A successivement positif, négatif, imaginaire.

Lorsque A est positif, on sait trouver, exactement ou avec approximation, par les méthodes connues, une quantité positive a dont la m^{eme} puissance reproduise A. Or, toute autre quantité positive, élevée à cette puissance, donnerait évidemment un résultat $>$A ou $<$A; donc la valeur a est une détermination arithmétique du radical, et c'est la seule.

Lorsque A est négatif, on remarquera qu'il n'existe pas de grandeur positive dont les puissances soient négatives; donc alors le radical ne peut avoir que des déterminations algébriques.

Enfin, lorsque A est imaginaire, comme il est évident que les

puissances d'une grandeur réelle, positive ou négative, sont elles-mêmes des grandeurs réelles, il s'ensuit que toutes les déterminations du radical sont algébriques, et même imaginaires.

240. On peut encore considérer séparément le cas où l'indice m est pair et celui où il est impair.

Dans le premier cas, toutes les valeurs du radical sont deux à deux égales et de signes contraires. En effet, si a est l'une d'elles, de telle sorte qu'on ait $a^m=A$, il est clair qu'on aura aussi, attendu que m est un nombre pair, $(-a)^m=a^m=A$, c'est-à-dire que $-a$ est aussi une valeur du radical. On peut donc alors représenter toutes les valeurs du radical par une suite de quantités affectées du signe $\pm$, telles que $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$,... En même temps que m est pair, si A est positif, le radical a une valeur réelle et positive; et en supposant que ce soit a, on voit que $-a$ est aussi une valeur réelle, mais négative, du radical. Quant aux autres valeurs, $\pm b$, $\pm c$,..., elles ne peuvent être qu'imaginaires.

Dans le cas où l'indice m est impair, en changeant le signe de la quantité A placée sous le radical, les valeurs de ce radical ne feront que changer de signe. En effet, si a est une valeur de $\sqrt[m]{A}$, il est clair que, m étant impair, on doit avoir $(-a)^m=-a^m$ $=A$: ainsi, en supposant que les valeurs de $\sqrt[m]{A}$ soient a, b, c, d,..., celles de $\sqrt[m]{-A}$ seront $-a$, $-b$, $-c$, $-d$,.... Lorsque A est une quantité réelle, l'une des valeurs du radical est réelle et de même signe que A, c'est-à-dire, positive si A est positif, et négative si A est négatif. Les autres valeurs sont essentiellement imaginaires.

241. Jusqu'ici j'ai parlé des valeurs multiples des radicaux, sans en préciser le nombre. Il est temps à présent de porter l'attention sur la proposition suivante :

Un radical quelconque a autant de valeurs différentes, ni plus ni moins, qu'il y a d'unités dans l'indice de ce radical, ou, en d'autres termes, *toute quantité a autant de racines d'un certain degré qu'il y a d'unités dans l'indice de ce degré.*

Cette proposition est déjà connue pour les radicaux carrés; considérons aussi le radical cubique $\sqrt[3]{A}$. Toute quantité qui a

pour cube A, est par cela même une valeur de $\sqrt[3]{A}$; donc les valeurs de ce radical sont précisément les mêmes que les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^3 = A \quad \text{ou} \quad x^3 - A = 0.$$

Pour mieux fixer les idées, supposons A positif. Alors il existe une quantité positive dont le cube est A, et que l'on sait calculer exactement ou avec approximation. Désignons cette quantité par a, et remplaçons A par a^3 : l'équation $x^3 - A = 0$ deviendra

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Le binôme $x^3 - a^3$ est divisible par $x - a$ (53), et l'on a

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2).$$

Or, pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs le soit; donc on aura toutes les solutions de l'équation $x^3 - a^3 = 0$ en posant successivement

$$x - a = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + ax + a^2 = 0,$$

et en tirant de là les valeurs de x. On obtient ainsi

$$x = a, \quad x = a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right);$$

et par conséquent telles sont les trois racines cubiques de a^3 ou A. On retrouve la valeur a, et l'on devait s'y attendre : car elle était, par hypothèse, une racine cubique de A. Mais on voit qu'outre celle-là il en existe deux autres, que l'analyse précédente fait reconnaître. Et remarquez bien que cette analyse subsiste quelle que puisse être la quantité A, pourvu que a soit une valeur de $\sqrt[3]{A}$, soit réelle soit imaginaire.

La proposition peut facilement s'étendre à tous les radicaux dont l'indice est une puissance de 2 ou de 3, ou un nombre composé des facteurs 2 et 3. Par exemple, supposons qu'on ait le radical $\sqrt[12]{A}$, dont l'indice $12 = 2 \times 2 \times 3$.

La quantité A aura deux racines carrées; chacune d'elles aura aussi deux racines carrées, ce qui fera quatre quantités différentes; enfin chacune de ces quantités aura trois racines cubiques, ce qui fera en tout douze quantités différentes; et je dis que cha-

cune d'elles est une valeur de $\sqrt[12]{A}$. Soit a une des deux racines carrées de A, a' une des deux racines carrées de a, et a'' une des trois racines cubiques de a'. Il est clair que a'' sera une des douze quantités dont il s'agit. Or, il est clair aussi qu'on aura

$$a''^3 = a', \qquad a''^6 = a'^2 = a, \qquad a''^{12} = a^2 = A;$$

donc a'' est une valeur de $\sqrt[12]{A}$.

Quel que soit le radical $\sqrt[m]{A}$ que l'on considère, la détermination de ses différentes valeurs revient toujours à la résolution d'une équation. En effet, ce radical désigne indifféremment toutes les quantités réelles ou imaginaires qui, élevées à la puissance m, reproduisent A ; par conséquent elles ne sont autres que les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^m = A$.

Par là on voit que la proposition générale qui fait l'objet de ce n° revient à prouver que dans cette équation l'inconnue x a m valeurs différentes. Je ne saurais entreprendre ici cette démonstration; mais j'y reviendrai ailleurs, et j'admettrai dès à présent comme établi que tout radical a autant de valeurs différentes, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans l'indice du radical.

242. En désignant par a une valeur de $\sqrt[3]{A}$, on a trouvé plus haut, pour les trois valeurs de ce radical,

$$a, \quad a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), \quad a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Soit A=1 : on pourra prendre a=1, et par conséquent les trois valeurs de $\sqrt[3]{1}$ seront

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Si on les compare avec celles de $\sqrt[3]{A}$, on aura cette conséquence remarquable : que *les trois racines cubiques d'une quantité quelconque s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par les trois racines cubiques de l'unité.*

Je vais prouver que cette propriété s'étend aux radicaux de tous les ordres. Représentons par a une valeur du radical quelconque

$\sqrt[m]{A}$, et par $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$; si on forme les m produits

$$a\times 1,\quad a\times\alpha\quad a\times\beta,\quad a\times\gamma,\ldots$$

et si on les élève à la puissance m, il vient

$$a^m,\quad a^m\alpha^m,\quad a^m\beta^m,\quad a^m\gamma^m,\ldots$$

Or, ces quantités sont toutes égales à A, car on doit évidemment avoir $a^m = A$, $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1,\ldots$; donc les produits a, $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma,\ldots$ sont les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$. Ainsi, on peut dire en général que, *dans chaque ordre, les racines d'une quantité quelconque se forment en multipliant l'une d'elles par les racines de l'unité.*

243. Ce qu'on dit ici des racines d'une quantité quelconque peut s'appliquer à celles de l'unité, et alors on a cette propriété curieuse : que les diverses racines de l'unité ne font que se reproduire dans un ordre différent, quand on multiplie successivement chacune d'elles par toutes ces racines. J'engage le lecteur a en faire la vérification sur les racines cubiques dont les valeurs sont ci-dessus. Il reconnaîtra en même temps que les deux racines imaginaires sont le carré l'une de l'autre; et cette remarque recevra dans la suite une grande extension.

244. Afin de prévenir toute équivoque, quelques auteurs ont pensé qu'une notation caractéristique était nécessaire pour distinguer le cas où l'on prend un radical avec toutes ses déterminations de celui où l'on n'en considère qu'une seule. Une convention assez simple serait de remplacer, dans le premier cas, la barre horizontale du radical par un trait crochu.

Par exemple, $\sqrt{\urcorner a}$ désignerait tout à la fois les deux valeurs de la racine carrée; et $\sqrt{a}$, l'une d'elles seulement : de sorte qu'on pourrait écrire

$$\sqrt{\urcorner A} = \pm\sqrt{A}.$$

Si, en particulier, on suppose $A = 4$, on aura $\sqrt{\urcorner 4} = \pm 2$.

Avec cette notation, le théorème général du n° 242 s'écrirait ainsi :

$$\sqrt[m]{\urcorner A} = \sqrt[m]{A}\sqrt[m]{\urcorner 1}.$$

245. Les exposans fractionnaires donnent lieu à des remarques analogues. L'expression $A^{\frac{n}{m}}$ peut être employée pour désigner à la fois toutes les valeurs du radical $\sqrt[m]{A^n}$, ou seulement l'une d'elles. Si l'on jugeait utile de distinguer ces deux points de vue par quelque différence dans la notation, on pourrait encore convenir de placer, dans le premier cas, le trait crochu au-dessus de la quantité A. De cette manière, on aurait

$$\sqrt[m]{\overline{a^n}} = \overline{A}^{\frac{n}{m}}, \qquad \sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}.$$

Par exemple, si $m = 2$, on pourrait écrire

$$\sqrt{\overline{A^n}} = \overline{A}^{\frac{n}{2}} = \pm\sqrt{A^n} = \pm A^{\frac{n}{2}}.$$

246. Lorsqu'on a plusieurs radicaux de même indice placés sur des quantités positives, il pourrait arriver qu'on eût besoin de considérer plus spécialement, dans ces radicaux, les déterminations qui résultent de la multiplication de leurs valeurs arithmétiques par la même racine de l'unité, sans d'ailleurs particulariser cette racine. Pour désigner ces déterminations, je me suis quelquefois servi, dans mes cours, de la dénomination de valeurs ou racines *similaires*. Ainsi, a et b étant les valeurs arithmétiques des radicaux $\sqrt[m]{A}$ et $\sqrt[m]{B}$, et α étant une des racines m^{emes} de 1, les produits $a\alpha$ et $b\alpha$ seraient deux racines *similaires*.

Quand, sous les radicaux, il y a des quantités négatives —A, —B, les radicaux n'ont plus de valeur arithmétique. Si l'indice m est impair, ils ont chacun une valeur réelle, mais négative; alors on prendrait pour a et b les valeurs négatives de ces radicaux, et on nommerait valeurs *similaires* les produits tels que $a\alpha$ et $b\alpha$, formés avec la même racine de l'unité.

Quand les radicaux ont un indice pair, et qu'ils sont placés sur des quantités négatives —A et —B, toutes leurs déterminations sont imaginaires. Alors on peut concevoir que a et b soient des valeurs de ces radicaux telles qu'elles deviennent égales lorsque les quantités —A et —B sont égales; et c'est aux produits de a et de b par une même racine de l'unité qu'on donnerait le nom de racines *similaires*.

247. Pour ne point contrarier l'usage, je ne me servirai point de cette dénomination, non plus que d'aucune notation nouvelle : mais au moins le lecteur doit-il être bien averti maintenant de l'équivoque qui peut accompagner les radicaux et les exposans fractionnaires ; et par conséquent, lorsqu'il les emploie, il doit faire soigneusement attention à l'acception qu'il leur donne.

Calcul des radicaux algébriques.

248. Lorsqu'on prend les radicaux dans leur signification la plus étendue, les expressions qui en contiennent peuvent aussi avoir plusieurs valeurs, et par conséquent les transformations qu'on fait subir à ces expressions, pour ne pas être défectueuses, doivent leur conserver toutes leurs valeurs. Il convient donc de reprendre ici les différentes opérations qu'on peut exécuter sur les radicaux, et de faire en sorte que les résultats atteignent toute la généralité qu'ils doivent avoir.

249. La simplification des radicaux est fondée sur l'égalité

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b};$$

et cette égalité n'est sujette à aucune restriction. En effet, le second membre a m valeurs, et en élevant chacune d'elles à la puissance m, on retrouve toujours $a^m b$; donc ce membre représente exactement toutes les m valeurs de $\sqrt[m]{a^m b}$.

250. Dans la multiplication des radicaux de même indice, on doit encore avoir, comme dans le n° 231,

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

D'abord, si on élève le produit $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$ à la puissance m, il vient ab ; donc toutes les valeurs de ce produit sont comprises parmi les m valeurs de $\sqrt[m]{ab}$. Ensuite, il est clair que chacun des facteurs $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[m]{b}$ ayant m valeurs différentes, on ne peut pas trouver moins de m produits différens, en multipliant les m valeurs de l'un par celles de l'autre. Donc le produit $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$ a exactement les mêmes valeurs que $\sqrt[m]{ab}$.

Cette conclusion donne lieu à une remarque assez importante. En multipliant les m valeurs du premier radical par une valeur du second, on aurait déjà m résultats différens; donc en les multipliant par toute autre valeur du second radical, on doit reproduire les mêmes résultats, mais dans un autre ordre.

251. Ce qui vient d'être dit s'applique littéralement à la division des radicaux de même indice : de sorte qu'on devra encore avoir, avec toute la généralité possible,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

252. Passons aux puissances. Trois cas sont à distinguer, et je vais les parcourir successivement.

1°. Quand les nombres m et n sont premiers entre eux, on a

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

D'abord, en élevant le 1er membre à la puissance m, il vient

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m=(\sqrt[m]{a})^{mn}=[(\sqrt[m]{a})^m]^n=a^n;$$

et ceci prouve que toutes les valeurs de $(\sqrt[m]{a})^n$ se trouvent parmi celles de $\sqrt[m]{a^n}$. Il reste donc à faire voir que ces valeurs sont au nombre de m.

Soient a', a'', a''',... les m valeurs diverses de $\sqrt[m]{a}$, celles de $(\sqrt[m]{a})^n$ seront a'^n, a''^n, a'''^n,...; et je vais montrer que toutes ces valeurs sont différentes. Admettons qu'il y en ait d'égales; et soit, par exemple,

[1] $$a'^n=a''^n.$$

Puisque a' et a'' sont deux racines m^{emes} de a, on a aussi

[2] $$a'^m=a''^m.$$

Supposons $m>n$, et que la division du nombre m par n donne $m=nq+r$, l'égalité [2] devient

[3] $$a'^{nq+r}=a''^{nq+r}.$$

Si on fait la puissance q des deux membres de l'égalité [1], on a

[4] $$a'^{nq} = a''^{nq}.$$

et, si on divise l'une par l'autre les égalités [3] et [4], il reste

$$a'^{r} = a''^{r}.$$

Maintenant supposons qu'en divisant n par r on ait $n = rq' + r'$. Dans l'égalité [1] remplaçons n par cette valeur, élevons la dernière égalité à la puissance q', puis alors divisons-les l'une par l'autre : il restera

$$a'^{r'} = a''^{r'}.$$

En continuant ainsi, on voit qu'on tombe toujours sur des égalités de la forme

$$a'^{s} = a''^{s},$$

dans lesquelles l'exposant s est un des restes qu'on obtient en effectuant sur m et n les opérations du plus grand commun diviseur. Or, ces deux nombres étant premiers entre eux, on doit arriver au reste 1 ; donc on aurait $a' = a''$; donc a' et a'' ne seraient point deux valeurs différentes de $\sqrt[m]{a}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc 1°, etc.

2°. Quand l'indice du radical est un multiple mn de l'exposant n de la puissance, on doit avoir

$$(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}.$$

En effet, pour toute quantité x, qui serait une valeur de $\sqrt[mn]{a}$, on doit avoir $x^{mn} = a$, ou, ce qui est la même chose, $(x^n)^m = a$; donc les valeurs de x^n ne sont autres que celles de $\sqrt[m]{a}$, c'est-à-dire que $(\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a}$.

3° Quand l'indice du radical et l'exposant de la puissance ont un facteur commun, si ces nombres sont désignés par mp et np, p étant leur plus grand diviseur, on devra avoir

$$(\sqrt[mp]{a})^{np} = \sqrt[m]{a^n}:$$

car, en s'appuyant sur les deux premiers cas, il vient

$$(\sqrt[mp]{a})^{np} = [(\sqrt[mp]{a})^p]^n = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Remarque. Si on appliquait aux deux derniers cas la règle du premier, on trouverait un radical qui comporterait plus de valeurs qu'on n'en doit avoir. Cependant on se sert presque toujours de cette règle sans faire aucune distinction : mais alors il est sous-entendu que les résultats peuvent quelquefois embrasser une trop grande généralité.

253. La règle relative aux racines des radicaux sera générale : elle est comprise dans l'égalité

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

Il est clair en effet qu'en posant $x=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, on aura

$$x^n=\sqrt[m]{a},\quad \text{puis}\quad x^{mn}=a;$$

donc les valeurs de x sont les mêmes que celles de $\sqrt[mn]{a}$.

254. Il n'y a point lieu à parler de réduction au même indice pour les radicaux algébriques : car cette transformation est évidemment défectueuse, en ce qu'elle augmente le nombre des valeurs de ces radicaux. Elle ne pourra donc pas servir ici, comme dans le n° 234, à expliquer la multiplication et la division des radicaux d'indices différens. Cependant on va prouver que les résultats trouvés par cette voie sont encore vrais dans le cas des radicaux algébriques, pourvu que l'indice commun soit toujours le plus petit possible. Je ne considérerai que la multiplication ; l'explication serait absolument la même pour la division.

1° Lorsque les indices m et n sont premiers entre eux, je dis qu'on a

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^nb^m}.$$

D'abord, si on élève le produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ à la puissance mn, il vient

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b})^{mn}=(\sqrt[m]{a})^{mn}(\sqrt[n]{b})^{mn}=a^nb^m,$$

ce qui montre que toutes les déterminations du produit sont parmi celles du radical $\sqrt[mn]{a^nb^m}$. Il faut prouver en outre qu'elles ne sont pas en moindre nombre.

Soient $a', a'', a''', \ldots\ldots$ les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$,

et $b', b'', b''', \ldots\ldots$ les n valeurs de $\sqrt[n]{b}$.

En multipliant les quantités $a', a'', a''', \ldots$ par $b', b'', b''', \ldots$ on aura toutes les déterminations du produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$, lesquelles seront

$$\begin{array}{lll} a'b', & a''b', & a'''b', \ldots \\ a'b'', & a''b'', & a'''b'', \ldots \\ a'b''', & a''b''', & a'''b''', \ldots \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

Voilà bien mn produits, mais il faut prouver qu'ils sont inégaux.

Il n'y a lieu à démonstration que dans le cas où l'on compare entre eux des produits formés de facteurs différens; par exemple, $a'b'$ et $a''b''$. Admettons pour un moment que ces produits soient égaux : en les élevant à la puissance n, on aurait $a'^n b'^n = a''^n b''^n$; et cette égalité, en observant que $b'^n = b''^n = b$, devient

$$a'^n = a''^n.$$

Mais a' et a'' étant deux racines m^{emes} de a, on a aussi

$$a'^m = a''^m.$$

Les quantités a' et a'' sont donc tout-à-fait dans le même cas que celles du n° 252 (1°); par conséquent, on arriverait de la même manière à conclure $a' = a''$, ce qui est contre l'hypothèse.

2° Lorsque les indices ont des facteurs communs, en nommant p leur plus grand commun diviseur, on aura

$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}.$$

En effet, par les n°s 253 et 250, il vient

$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}}.$$

Mais, par ce qui vient d'être dit ci-dessus (1°), on a $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$; et, par le n° 253 déjà cité, on a $\sqrt[p]{\sqrt[mn]{a^n b^m}} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}$; donc enfin $\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b} = \sqrt[mnp]{a^n b^m}$.

Calcul des expressions imaginaires du 2e degré.

255. On a souvent à combiner entre elles des expressions imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$, dans lesquelles a et b sont des quantités réelles; et on démontre que les résultats sont eux-mêmes toujours réductibles à la forme $a+b\sqrt{-1}$. Cette proposition va se vérifier dans les différens cas que je vais parcourir.

256. Si on soumet les expressions imaginaires aux quatre opérations fondamentales, on a

$$(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1};$$
$$(a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1};$$
$$(a+b\sqrt{-1})\times(a'+b'\sqrt{-1})=aa'+ab'\sqrt{-1}+a'b\sqrt{-1}-bb'$$
$$=aa'-bb'+(ab'+a'b)\sqrt{-1};$$
$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}.$$

257. Les puissances de $\sqrt{-1}$ se présentent fréquemment. Or, il est évident qu'on a

$$(\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1},\quad (\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},\quad (\sqrt{-1})^4=+1;$$

de là on conclut qu'en s'élevant aux puissances supérieures, on retrouvera toujours ces quatre résultats. Si on veut renfermer cette conclusion dans des formules, on désignera par i un nombre entier positif quelconque, et on aura

$$(\sqrt{-1})^{4i}=[(\sqrt{-1})^4]^i=+1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+1}=(\sqrt{-1})^{4i}\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+2}=(\sqrt{-1})^{4i}\times(\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+3}=(\sqrt{-1})^{4i}\times(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}.$$

Ces formules doivent être employées respectivement, selon qu'en

divisant l'exposant par 4, on aura pour reste 0, 1, 2 ou 3, ce qui comprend tous les cas.

258. Maintenant, considérons l'expression $(a+b\sqrt{-1})^n$, n étant un nombre entier positif. Par la formule du binôme, on a

$$(a+b\sqrt{-1})^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^n = a^n\left[1+\frac{n}{1}\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)b^2}{1.2.a^2}-\frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.2.3.a^3}\sqrt{-1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{1.2.3.4\;a^4}+\text{etc.}\right];$$

et, en réunissant les termes affectés de $\sqrt{-1}$,

$$(a+b\sqrt{-1})^n = a^n\left[1-\frac{n(n-1)b^2}{1.2.a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{1.2.3.4\;a^4}-\text{etc.}\right]$$
$$+a^n\left[\frac{n}{1}\frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.2.3\;a^3}+\text{etc.}\right]\sqrt{-1}.$$

Puisque les quantités a et b sont supposées réelles, ce résultat est évidemment de la forme $A+B\sqrt{-1}$, A et B étant aussi des quantités réelles.

Pour développer $(a-b\sqrt{-1})^n$, il suffira de changer b en $-b$ dans le résultat précédent. Par là il ne souffre d'autre changement que celui de B en $-B$: car b entre à des puissances paires dans tous les termes de A, et à des puissances impaires dans tous ceux de B.

Ainsi, en posant, pour abréger,

$$A=a^n\left[1-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right],$$
$$B=a^n\left[\frac{n}{1}\frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right],$$

on aura

[1] $$(a+b\sqrt{-1})^n=A+B\sqrt{-1}.$$
[2] $$(a-b\sqrt{-1})^n=A-B\sqrt{-1}.$$

Pour passer aux puissances négatives, on observe que

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2.$$

De là on tire

$$\frac{1}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2},\ \text{et}\ \frac{1}{a-b\sqrt{-1}}=\frac{a+b\sqrt{-1}}{a^2+b^2},$$

donc on aura

$$\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n}=\frac{(a-b\sqrt{-1})^n}{(a^2+b^2)^n},$$

$$\frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^n}=\frac{(a+b\sqrt{-1})^n}{(a^2+b^2)^n};$$

et par conséquent, à cause des formules [1] et [2],

[3] $$(a+b\sqrt{-1})^{-n}=\frac{A-B\sqrt{-1}}{(a^2+b^2)^n},$$

[4] $$(a-b\sqrt{-1})^n=\frac{A+B\sqrt{-1}}{(a^2+b^2)^n}.$$

Dans la suite, il sera démontré que la formule du binôme convient à des exposans de nature quelconque. Par conséquent les transformations [1], [2], [3], [4], sont vraies quel que soit n. Mais il arrivera, quand cet exposant sera négatif ou fractionnaire, que les valeurs de A et B seront composées d'une infinité de termes (*).

259. Quand on veut réduire l'expression radicale

$$\sqrt[n]{a\pm b\sqrt{-1}}$$

à la forme $A\pm B\sqrt{-1}$, on la remplace par la puissance fractionnaire $(a\pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, qu'on développe comme il vient d'être dit. L'algèbre ne fournit point d'autre méthode générale pour cette transformation; mais lorsque n est une puissance de 2, on peut encore l'effectuer sans le secours des séries.

Considérons d'abord les deux radicaux $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$. En posant

[5] $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=x,$$

[6] $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=y,$$

(*) Si on multiplie entre elles les égalités [1] et [2], il vient

$$(a^2+b^2)^n=A^2+B^2,$$

relation fort simple et qui peut être quelquefois utile. Par exemple, elle montre comment une puissance quelconque, entière et positive, d'un nombre qui est une somme de deux carrés, peut se décomposer elle-même en une somme de deux carrés.

et en élevant ensuite ces quantités au carré, il vient

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=x^2,$$
$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=y^2.$$

Quel que soit le signe de a la valeur de x^2 est positive, mais celle de y^2 est négative. De ces égalités on tire

$$[7] \quad x=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y=\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}.$$

Or, les égalités [5] et [6] donnent

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\frac{x-y}{1};$$

donc enfin, en mettant pour x et y les valeurs [7], on aura

$$] \quad \sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$
$$] \quad \sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}.$$

Maintenant, si on considère les expressions radicales

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}}, \quad \sqrt[8]{a\pm b\sqrt{-1}}, \quad \sqrt[16]{a\pm b\sqrt{-1}}, \text{ etc.}$$

on observera que l'extraction d'une racine dont l'indice est une puissance de 2, peut être remplacée par des extractions successives de racine carrée; et par conséquent, l'emploi répété des formules [8] et [9] réduira toujours les expressions ci-dessus à des expressions de la forme $A\pm B\sqrt{-1}$.

Remarque. Dans chacune de ces formules, le premier membre, à raison des radicaux qu'il contient, peut avoir quatre valeurs différentes; et c'est aussi ce qui a lieu pour le second membre. Dans l'une et l'autre, les quatre valeurs du premier membre sont les mêmes; et c'est encore ce qui a lieu évidemment pour les seconds membres : de sorte que les deux formules n'en font vraiment qu'une seule. Elles ne présentent de différence que lorsqu'on les emploie simultanément dans un même calcul, parce qu'alors on y doit regarder les termes dans lesquels entre $\sqrt{-1}$ comme affectés de signes contraires. Mais alors il faut remarquer en outre que, par la manière même dont on est parvenu à ces formules, $\sqrt{a^2+b^2}$ y représente le produit $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\,\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$;

par conséquent, les déterminations de ces deux radicaux doivent toujours être supposées associées de manière que leur produit ait le signe qu'on donnera à $\sqrt{a^2+b^2}$ dans les seconds membres. Sans cette attention, les formules conduiraient à des résultats fautifs.

Explication de quelques paradoxes.

260. On propose quelquefois sur les radicaux des difficultés qui embarrassent les commençans, mais qui disparaissent aussitôt qu'on fait attention à la signification plus ou moins étendue qu'on attache à chaque radical.

261. Soit l'expression

$$[1] \qquad 2b\sqrt{ab^2}+3\sqrt{a^3}.$$

Par les règles du n° 229, on réduira les radicaux à un seul. En effet, on a

$$2b\sqrt{ab^2}=2b^2\sqrt{a},\quad 3\sqrt{a^3}=3a\sqrt{a};$$

donc l'expression proposée équivaut à

$$2b^2\sqrt{a}+3a\sqrt{a},$$

ou, en mettant $\sqrt{a}$ en facteur commun, à

$$[2] \qquad (2b^2+3a)\sqrt{a}.$$

Or, si on considère chaque radical carré comme portant avec lui le signe $\pm$, l'expression [1] peut avoir quatre valeurs distinctes, à cause des quatre combinaisons qu'on peut faire entre les signes, tandis que l'expression [2] n'a évidemment que deux valeurs. Il n'est donc point vrai, en toute rigueur, de dire que les deux expressions soient équivalentes.

Mais si on fait attention à la manière dont la réduction s'est opérée, on reconnaît qu'en mettant le radical $\sqrt{a}$ en facteur commun, on a supposé tacitement qu'il devait être pris avec le même signe dans chacun des termes où il entrait; et par suite, au lieu de quatre arrangemens de signes, il n'y en a plus que deux, $++$ et $--$. On voit donc qu'on poura en effet employer les expressions [1] et [2] comme équivalentes, pourvu qu'on regarde les deux radicaux qui entrent dans la première comme devant être pris avec le même signe, c'est-à-dire, tous deux avec $+$, ou tous deux avec $-$.

262. Dans l'exemple précédent on attachait à l'expression proposée une idée plus générale que ne comportait la transformation qu'on lui a fait subir. Voici un exemple du contraire.

Soit le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$: la règle de la multiplication (250) donnerait

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{-a\times-a}=\sqrt{a^2}.$$

Or, dit-on, il est bien vrai que $\sqrt{a^2}$ a deux valeurs $\pm a$, mais le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ étant le carré de $\sqrt{-a}$, il doit être égal à $-a$; donc le résultat $\sqrt{a^2}$ renferme une valeur fausse $+a$.

L'explication de ce paradoxe est facile. Le résultat est exactement ce qu'il doit être, et l'erreur est ici tout entière dans une fausse supposition, laquelle consiste à regarder le produit de $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ comme le carré de $\sqrt{-a}$, tandis qu'il a une signification plus étendue, ainsi qu'on va le reconnaître.

Considérons en général le produit $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$, dans lequel A et B sont des quantités quelconques. Il doit avoir autant de valeurs qu'on en peut trouver en multipliant chacune des deux valeurs de $\sqrt{A}$ par chacune de celles de $\sqrt{B}$. Pour plus de netteté, désignons ces valeurs par $\pm A'$ et $\pm B'$. L'expression $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ représentera indifféremment chacun des quatre produits

$$+A'\times+B',\ +A'\times-B',\ -A'\times+B',\ -A'\times-B',$$

lesquels se réduisent à deux seulement, $\pm A'B'$. Or, le carré de ces deux produits est $A'^2B'^2$ ou AB ; donc ils sont les deux racines carrées de AB ; donc on a rigoureusement, et sans aucune restriction dans le signe $\sqrt{\ }$, l'égalité

$$\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{AB}.$$

Cela posé, si, au lieu de $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$, on considère le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, la règle n'en doit pas moins donner les deux valeurs qui résultent de la combinaison des deux valeurs du premier facteur avec les deux valeurs du second ; et au contraire, quand on veut faire le carré de $\sqrt{-a}$, chaque valeur de ce radical ne devant

être alors multipliée que par elle-même, il n'en peut évidemment résulter que $-a$.

M. Lacroix observe avec raison que le produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ donne lieu au même paradoxe. Pour dire qu'il est égal à a, il faut supposer tacitement qu'il équivaut à $(\sqrt{a})^2$, tandis qu'en lui laissant toute sa généralité, il est véritablement égal à $\pm a$.

263. C'est dans les radicaux imaginaires qu'on remarque surtout ce genre de difficulté. Supposons qu'on veuille apprécier la justesse de la transformation

[3] $$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

Nommons a' et b' les déterminations arithmétiques de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, c'est-à-dire les deux nombres positifs dont les carrés sont a et b. En laissant aux radicaux toute l'extension possible, on a toujours

$$\sqrt{-a}=a'\sqrt{-1},\quad \sqrt{-b}=b'\sqrt{-1},$$

et alors les deux déterminations de $\sqrt{-a}$ et de $\sqrt{-b}$ résultent de celles de $\sqrt{-1}$. Par suite il vient

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=a'b'(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}).$$

D'après ce qui a été dit dans le n° précédent, si on n'établit aucune restriction, on a $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1\times-1}=\pm 1$; donc

[4] $$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm a'b'.$$

Mais si on veut introduire la restriction que les deux facteurs du produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ soient les déterminations de $\sqrt{-a}$ et $\sqrt{-b}$ correspondantes à la même détermination de $\sqrt{-1}$, alors on a simplement $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$, et par suite

[5] $$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-a'b'.$$

Maintenant on peut remarquer que le carré de $a'b'$ est $a'^2b'^2$ ou ab; donc, si on convient de n'attacher à $\sqrt{ab}$ que la seule idée d'une détermination arithmétique, on pourra dire que $a'b'=\sqrt{ab}$, et écrire les égalités [4] et [5] comme ci-dessous :

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm\sqrt{ab},\quad \sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

La dernière n'est autre chose que la transformation [3], et par là on voit de quelles restrictions cette transformation doit être accompagnée.

264. Soit encore l'expression $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$. En réduisant le second radical à l'indice 4, il vient

[6] $$\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a},$$

résultat qui est, dit-on, évidemment absurde : car, a étant une quantité positive, il représente une quantité réelle, tandis que l'expression proposée est imaginaire.

Il me semble qu'il y a ici confusion d'idées. Si, dans l'expression $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, le radical $\sqrt[4]{a}$ est une détermination arithmétique, il est bien vrai que cette expression est imaginaire. Mais alors il n'est point permis de lui appliquer la transformation ci-dessus : car elle laisse aux deux radicaux $\sqrt[4]{a}$ et $\sqrt{-1}$ toute leur généralité.

Pour mieux nous en convaincre, développons toutes les valeurs dont le produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$ est susceptible. Soit a' la détermination arithmétique de $\sqrt[4]{a}$: pour avoir les quatre déterminations de ce radical, il faut (242) multiplier a' par les quatre valeurs de $\sqrt[4]{1}$. Or, il est facile de voir qu'en désignant par $\pm\alpha$ les deux valeurs de $\sqrt{-1}$, celles de $\sqrt[4]{1}$ sont

$$+1,\quad -1,\quad +\alpha,\quad -\alpha;$$

car en les élevant à la 4ᵉ puissance on reproduit 1. Donc les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$ sont

$$+a',\quad -a',\quad +a'\alpha,\quad -a'\alpha;$$

Maintenant, pour avoir toutes les valeurs du produit $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, il faut multiplier ces quatre quantités successivement par chacune des valeurs de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, par $+\alpha$ et par $-\alpha$. On trouve ainsi huit produits, savoir :

$$+a'\alpha,\quad -a'\alpha,\quad +a'\alpha^2,\quad -a'\alpha^2.$$
$$-a'\alpha,\quad +a'\alpha,\quad -a'\alpha^2,\quad +a'\alpha^2.$$

Mais en observant d'abord que les quatre derniers sont les mêmes que les premiers, écrits dans un ordre différent, et ensuite que α^2 est la même chose que -1, ces produits se réduisent à ceux-ci :

$$+a'\alpha,\quad -a'\alpha,\quad -a',\quad +a'.$$

Alors on voit qu'ils ne sont autres que les quatre valeurs de $\sqrt[4]{a}$. Donc l'égalité [6] est parfaitement exacte; et l'erreur, qu'on prétend y remarquer, vient de ce qu'on attache au produit $\sqrt[4]{a}\,\sqrt{-1}$ une signification restreinte que n'admet point la transformation qu'on lui fait subir.

265. Je terminerai cet article par l'explication d'un autre paradoxe, que présente l'emploi des exposans fractionnaires.

Soit l'expression $a^{\frac{2}{4}}$: si on simplifie la fraction $\frac{2}{4}$, il vient

$$a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}};$$

donc, en repassant aux radicaux, on aura

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}.$$

Cependant cette égalité manque de justesse, car le premier membre doit avoir quatre valeurs, et le second n'en a que deux.

On présentera la difficulté d'une manière générale en posant

$$[7] \qquad a^{\frac{np}{mp}} = a^{\frac{n}{m}},$$

et en concluant de là

$$[8] \qquad \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Pour découvrir la cause de l'erreur, il suffit de remonter à la convention qui a fixé le sens des exposans fractionnaires (205). Alors on voit qu'ils ne font que remplacer des radicaux ; et, pour rester dans les termes de la convention, on ne doit point regarder, dans l'expression $a^{\frac{n}{m}}$, l'exposant comme une fraction ordinaire, mais il faut comprendre que le numérateur n indique une puissance qu'on doit former d'abord, et le dénominateur m une racine qu'on doit extraire ensuite.

Lors même qu'on ne considère que des radicaux arithmétiques, c'est toujours de cette manière qu'on doit entendre les exposans fractionnaires; et par conséquent alors, bien loin qu'on puisse tirer l'égalité [8] de l'égalité [7], c'est au contraire l'égalité [7] qui doit se déduire de l'égalité [8].

CHAPITRE XII.

Propositions sur les nombres. Grandeurs incommensurables et approximation des racines. Progressions. Fractions continues.

Propositions sur les nombres.

266. Théorème. *Un produit de plusieurs nombres entiers ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie ses facteurs.*

Supposons d'abord qu'on mette les deux derniers facteurs l'un à la place de l'autre. Soient a et b ces facteurs, et P le produit de tous les précédens : je dis qu'on aura $Pab = Pba$. En effet, multiplier P par a c'est prendre autant de fois P qu'il y a d'unités dans a; donc on a

$$Pa = P + P + P + \ldots,$$

en comprenant dans cette somme un nombre a de termes égaux à P. Pour multiplier Pa par b, il suffit de prendre b fois chacun des termes; donc

$$Pab = Pb + Pb + Pb + \ldots$$

Mais cette dernière somme, renfermant a fois le terme Pb, est égale à $Pb \times a$ ou Pba; donc $Pab = Pba$.

Si tous les facteurs de P étaient égaux à 1, on aurait $P = 1$; Pab se réduirait à ab et Pba à ba; donc $ab = ba$. Ainsi le théorème est vrai dans le cas de deux nombres.

Maintenant considérons un produit, tel que $abcde$, composé de tant de facteurs qu'on voudra. A cause de la première partie

de notre démonstration, on peut échanger les deux derniers facteurs, et l'on a $abcde = abced$. La même raison montre qu'on a $abce = abec$, et par conséquent $abced = abecd$. Il est évident qu'en continuant ainsi, on peut successivement avancer le facteur e à toutes les places vers la gauche : et ce qu'on dit du facteur e peut s'appliquer à tous les autres.

Reprenons le produit $abcde$: on y peut remplacer ab par ba ; donc $abcde = bacde$. Dans le produit bac on peut échanger a et c, et écrire bca ; donc $bacde = bcade$. Par là on voit qu'on peut aussi avancer un facteur à telle place qu'on voudra vers la droite.

Donc on peut amener chaque facteur du produit à une place quelconque, ce qui revient à dire qu'on peut intervertir à volonté l'ordre des divers facteurs, sans que le produit change.

267. *Remarque.* La démonstration précédente ne s'applique qu'aux nombres entiers ; mais le théorème s'étend à toute espèce de facteurs. Quand il y en a de fractionnaires, si on les réduit en fractions, et si on regarde les facteurs entiers comme ayant l'unité pour dénominateur, on peut dire que le produit s'obtient en divisant le produit de tous les numérateurs par celui de tous les dénominateurs. Or, en changeant l'ordre des facteurs primitifs, on ne fait qu'intervertir l'ordre des nombres entiers qui composent ces deux produits, ce qui n'altère en rien ces produits.

Quand le produit renferme des facteurs incommensurables, pour reconnaître la vérité de la proposition, il suffit d'expliquer le sens qu'on attache alors au mot *produit*. Dans ce cas, il n'a absolument aucun sens, à moins qu'on ne le regarde comme représentant une limite vers laquelle tendent les produits qu'on obtient en remplaçant les facteurs incommensurables par des valeurs commensurables qui en approchent de plus en plus. Or, ces produits successifs ne changent pas quand on change l'ordre des facteurs ; donc il en est de même du produit qui renferme les facteurs incommensurables.

268. *Corollaires.* I. Puisqu'un produit ne change pas quand on change l'ordre de ses facteurs, on a $m \times abc = abcm = mabc$; donc on multiplie une quantité par un produit, en multipliant cette quantité par les facteurs de ce produit. Cette démonstration est déjà connue par la note de la page 22.

II. En général, lorsqu'on multiplie entre elles plusieurs quantités P, Q, R,..., on pourra considérer leur produit comme composé de tous les facteurs de ces quantités. En effet, d'après le corollaire précédent, si on écrit les facteurs de Q à la suite des facteurs de P, on indiquera un produit égal à $P\times Q$; par la même raison, si après tous les facteurs de P et de Q on place ceux de R, on indiquera un produit égal à $P\times Q\times R$; etc.

III. Il suit de là que tout nombre entier, qui divise exactement un des facteurs d'un produit de plusieurs nombres entiers, doit diviser exactement ce produit.

A ce sujet, on doit observer qu'un nombre peut quelquefois diviser exactement un produit, quoiqu'il ne divise aucun facteur. Par exemple, 20 ne divise ni 12 ni 15, et cependant il divise le produit 12×15 ou 180. Il en est ainsi parce que 20 est composé de facteurs dont les uns se trouvent dans 12 et les autres dans 15. Mais si le nombre 20 n'avait aucun facteur commun avec l'un des deux facteurs, il devrait nécessairement diviser l'autre : c'est ce qui résultera du théorème suivant.

269. THÉORÈME. *Tout nombre* P *qui divise exactement un produit* AB *de deux nombres, et qui est premier par rapport à l'un d'eux, doit nécessairement diviser l'autre.*

Supposons P premier relativement à A. En opérant sur ces deux nombres comme si on cherchait leur plus grand diviseur, on doit parvenir à un reste égal à 1. Soit $A > P$: nommons

Q le quotient de A par P, et R le reste;
Q' le quotient de P par R, et R' le reste;
Q'' le quotient de R par R', et R'' le reste;
etc.

Ces divisions successives donnent les égalités

$$A = PQ + R,\quad P = RQ' + R',\quad R = R'Q'' + R'',\ \text{etc.}$$

Multiplions par B les deux membres de chacune, puis divisons-les par P; il vient

$$\frac{AB}{P} = BQ + \frac{BR}{P},\quad B = \frac{BR}{P}Q' + \frac{BR'}{P},\quad \frac{BR}{P} = \frac{BR'}{P}Q'' + \frac{BR''}{P},\ \text{etc.}$$

D'après l'énoncé, AB est divisible par P, donc le second membre

de la 1[re] égalité doit être entier; et comme BQ est nombre entier, il faut que BR soit divisible par P. La 2[e] égalité prouve que la divisibilité de BR par P entraîne celle de BR′ par P; puis la 3[e] prouve que la divisibilité de BR et BR′ par P entraîne celle de BR″ par P; et ainsi de suite. Les produits de B par tous les restes successifs seront donc divisibles par P. Or, dans la suite de ces restes, on doit trouver l'unité; donc le produit B× 1 ou B est divisible par P. C'est ce qu'il fallait démontrer.

270. *Corollaire.* Un nombre premier P qui divise un produit ABCD...E de plusieurs nombres entiers, doit diviser l'un d'eux. Décomposons ce produit en A×BCD...E : puisque P est un nombre premier, s'il ne divise point A, on pourra le regarder comme premier à l'égard de A, et, d'après le théorème précédent, il devra diviser BCD...E. Ce dernier produit se décompose en B×CD...E, et on conclut encore que si P ne divise point B, il devra diviser CD...E. En continuant ainsi, on voit que si aucun des facteurs qui précèdent E n'est divisible par P, E devra l'être. Donc P divise l'un des facteurs.

271. Théorème. *Il n'existe qu'un seul système de nombres premiers dont le produit soit égal à un nombre donné : ou, en d'autres termes, deux produits de nombres premiers ne peuvent pas être égaux, à moins qu'ils ne soient composés de facteurs égaux chacun à chacun.*

Soient *abcd*... et ABCD... les deux produits égaux. Puisque le produit *abcd*... est divisible par *a*, le produit ABCD... doit l'être aussi : mais *a* est un nombre premier ainsi que A, B, C, etc.; donc, si *a* n'est point égal à quelqu'un de ces facteurs, il ne pourra diviser aucun d'eux. Or, d'après le théorème précédent, *a*, ne divisant ni A ni B, ne peut point diviser le produit AB; ne divisant ni AB ni C, il ne peut point diviser le produit AB×C ou ABC; et ainsi de suite; donc *a* ne pourrait point diviser le produit ABC... Il faut donc que *a* soit égal à l'un des nombres A, B, C... Supposons $a = A$, et divisons les deux produits par *a*. Les produits restans *bcd*... et BCD... seront encore égaux, et l'on pourra leur appliquer le raisonnement précédent. On conclura donc que *b* est égal à l'un des facteurs B, C, D..., à B, par exemple. On fera voir semblablement que *c* est égal à l'un des autres

facteurs; et ainsi de suite. Donc les deux produits *abcd*... et ABCD... sont composés des mêmes facteurs premiers.

Cette démonstration ne suppose pas que les nombres a, b, c... soient inégaux : de sorte que si, dans le premier produit, un facteur se répète plusieurs fois, il doit se répéter, dans le second, un pareil nombre de fois.

272. Les corollaires de cette proposition sont nombreux : je me bornerai aux principaux.

I. Un produit de plusieurs nombres contient tous les facteurs premiers dont ces nombres sont composés, et il n'en contient pas d'autres. En effet, il est démontré, d'un côté (268, cor. II), que le produit de plusieurs nombres peut être considéré comme composé de tous les facteurs premiers de ces nombres; et, d'un autre côté (271), qu'il n'y a qu'un seul système de facteurs premiers dont le produit soit égal à un nombre donné.

II. Une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux ne peut pas être réduite à des termes moindres. Supposons que a et b soient des nombres premiers entre eux, et qu'on puisse avoir $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, a' et b' étant des nombres respectivement moindres que a et b. De là on tire $ab'=ba'$. Mais a et b n'ont point de facteurs communs; donc a' contient les facteurs premiers de a, et b' contient ceux de b; donc les nombres a' et b' ne seraient pas moindres que a et b.

III. Deux produits de nombres entiers sont premiers entre eux lorsque tous les facteurs de l'un d'eux sont premiers par rapport à ceux de l'autre. Soient ABC... et abc... les deux produits. Le produit ABC... n'a pas d'autres diviseurs premiers que ceux des nombres A, B, C..., et le produit abc... n'en a pas d'autres que ceux des nombres a, b, c... Donc, si aucun des nombres A, B, C... n'a de diviseur commun avec a, ni avec b, ni avec c, etc., les produits eux-mêmes ne pourront avoir de diviseur commun.

IV. Si a et b sont des nombres premiers entre eux, les puissances a^m et b^n sont dans le cas du corollaire III, donc elles représentent des nombres premiers entre eux. Les exposans m et n peuvent d'ailleurs être égaux ou inégaux.

V. Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est

égal au produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres. Soit D le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. Par le cor. I, on sait que tous les facteurs premiers de D doivent se trouver parmi les facteurs premiers de chacun de ces nombres. D'ailleurs aucun autre facteur premier ne peut leur être commun à tous ; car s'il en existait un autre d, ces nombres admettraient pour diviseur commun le produit Dd, lequel serait plus grand que D.

De là il suit que si on détermine le plus grand commun diviseur D à deux nombres A et B, puis le plus grand commun diviseur D' à D et à un troisième nombre C, D' sera le plus grand commun diviseur aux trois nombres A, B, C. On continuerait de la même manière s'il y avait plus de trois nombres.

VI. Plusieurs nombres étant donnés, composons un produit de telle sorte que tout facteur premier appartenant à quelqu'un de ces nombres se trouve dans ce produit avec l'exposant le plus élevé dont il soit affecté dans ces différens nombres ; le produit ainsi formé sera le plus petit nombre divisible par chacun des nombres donnés.

Il est clair, en effet, que si un nombre ne renferme pas tous ces facteurs, ou s'il les renferme à des exposans moindres, il ne sera pas divisible par chacun des nombres donnés ; et, d'un autre côté, si, outre ces facteurs, il en contenait d'autres, il serait plus grand que le produit dont il s'agit.

273. PROBLÈME. *Trouver tous les diviseurs d'un nombre quelconque* N.

La première idée qui se présente est d'essayer successivement la division du nombre N par chacun des nombres 1, 2, 3, 4... jusqu'à N ; mais on peut abréger ces tâtonnemens. Soit D un diviseur de N, et D' le quotient de N par D : on a $DD' = N$, ou, sous une autre forme, $DD' = \sqrt{N} \times \sqrt{N}$; donc si D est $< \sqrt{N}$, D' sera $> \sqrt{N}$. Il suit de là qu'après avoir trouvé tous les diviseurs moindres que $\sqrt{N}$, les quotiens qui auront été obtenus en divisant N par ces diviseurs, seront les diviseurs plus grands que $\sqrt{N}$.

Par exemple, soit $N = 360$. La racine carrée de 360 est comprise entre 18 et 19 : ainsi, on divisera 360 seulement par les

nombre 1, 2, 3,... 18. De cette manière on trouve tous les diviseurs de 360, savoir :

1	2,	3,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	12,	15,	18.
360,	180,	120,	90,	72,	60,	45,	40,	36,	30,	24,	20.

274. Problème. *Former une table de nombres premiers.*

On appelle nombre *premier* celui qui n'a pour diviseurs que l'unité et lui-même. Lors donc qu'un nombre étant donné, le procédé ci-dessus ne fera découvrir aucun autre diviseur, on sera sûr que ce nombre est premier. Pour éviter ces calculs, qui peuvent être fort longs, on a construit des tables qui renferment tous les nombres premiers jusqu'à certaines limites (*).

La manière la plus simple de les construire consiste à écrire de suite les nombres impairs 3, 5, 7, 9, etc., jusqu'à telle limite qu'on voudra, et à effacer tous les multiples de trois, tous ceux de 5, tous ceux de 7, etc. Il est évident que les nombres premiers sont les seuls qui resteront. A la tête de ces nombres il ne faut pas oublier de placer 1 et 2.

Rien d'ailleurs de plus facile que de reconnaître les multiples qu'on doit effacer. Ceux de 3 se trouvent en comptant les nombres 3, 5, 7, etc., de 3 en 3, à partir de 5; ceux de 5, en les comptant de 5 en 5, à commencer de 7; et ainsi de suite (**).

275. *Remarques.* I. La suite des nombres premiers est illimitée. Admettons qu'il en soit autrement, et que n soit le plus grand de tous. Si on forme le produit $P=2.3.5...n$, qui renferme tous les nombres premiers, il faudrait que le nombre $P+1$, qui est $>n$, fût divisible par quelqu'un de ces nombres. Or cela

(*) Legendre cite particulièrement les tables de Chernac et celles de Burckhardt. Dans celles de Chernac, on trouve tous les nombres premiers jusqu'à 1 000 000, et les diviseurs de tous les autres nombres compris dans cette limite. Celles de Burckhardt s'étendent jusqu'à 3 036 000.

(**) Représentons-nous une planchette percée de trous, au-dessus desquels les nombres impairs 3, 5, 7, etc., sont placés par ordre; puis à mesure qu'on arrive, en les comptant de trois en trois, de cinq en cinq, de sept en sept, etc., aux multiples qu'on doit effacer, concevons qu'on laisse échapper ces multiples à travers les trous correspondans, il ne restera sur la planchette que les nombres premiers. Tel est le fameux *crible* d'Eratosthène, qui vivait à Alexandrie 280 ans avant J. C.

est évidemment impossible, car il y aura toujours le reste 1. Donc il est impossible que la suite des nombres premiers soit limitée.

II. En comparant tous les nombres avec les multiples d'un même nombre, on est conduit à les présenter sous différentes formes dont on fait souvent usage. Par exemple, si on les compare aux multiples de 6, on pourra d'abord les représenter par une des six formules

$$6x,\ 6x+1,\ 6x+2,\ 6x+3,\ 6x+4,\ 6x+5,$$

dans lesquelles x est un nombre entier quelconque. Mais si on ne veut considérer que les nombres premiers, il ne faudra conserver que les deux formules $6x+1$ et $6x+5$: car les autres donnent des nombres divisibles par 2 ou par 3. On peut aussi, à la place de $6x+5$, écrire $6(x+1)-1$, ou bien encore $6x-1$, puisque x est un nombre entier quelconque. Ainsi tous les nombres premiers, excepté 2 et 3 qui sont diviseurs de 6, sont compris dans la formule

$$N=6x\pm1.$$

On raisonnerait d'une manière analogue, si on considérait d'autres multiples que ceux de 6.

276. Problème. *Décomposer un nombre en facteurs premiers, et trouver ensuite tous ses diviseurs.*

Un nombre quelconque N, s'il n'est pas premier, peut être représenté par le produit de plusieurs nombres premiers a, b, c, etc., élevés chacun à une certaine puissance, de sorte qu'on peut toujours supposer $N=a^m b^n c^p \ldots$ C'est cette décomposition qu'il s'agit d'opérer.

Prenons pour exemple le nombre 504. Je le divise d'abord par 2 autant de fois que possible, et on trouve ainsi

$$504=252\times2=126\times2\times2=63\times2\times2\times2.$$

Alors je divise autant de fois que possible 63 par 3, qui est le plus petit nombre premier au-dessus de 2, et il vient

$$63=21\times3=7\times3\times3.$$

Donc on a

$$504=7\times3\times3\times2\times2\times2,$$

ou bien, sous une autre forme,

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Les divisions par 3 ont amené le quotient 7. Si ce quotient n'était pas un nombre premier, on continuerait les opérations en essayant successivement les autres nombres premiers 5, 7, etc.

Maintenant on formera facilement tous les diviseurs de 504. Ils ne sont autres que les nombres qu'on obtient en prenant tous les facteurs premiers un à un, deux à deux, etc. Pour être sûr de n'omettre aucun diviseur, on adopte la disposition suivante :

		1,					
504	2	2,					
252	2	4,					
126	2	8,					
63	3	3,	6,	12,	24,		
21	3	9,	18,	36,	72,		
7	7	7,	14,	28,	56,	21,	42,
		84,	168,	63,	126,	152,	504.

La première colonne à gauche contient le nombre donné 504 et les quotiens des divisions successives. A côté de ces nombres, dans une seconde colonne, sont écrits les nombres premiers qu'on emploie comme diviseurs, et qui sont les facteurs premiers du nombre 504. Enfin, on place à gauche de cette colonne tous les diviseurs de 504, et je vais dire comment on les trouve.

En tête de la troisième colonne, mais au-dessus de la ligne qui contient 504, on écrit d'abord l'unité, qu'on doit regarder comme le premier diviseur de 504. On multiplie cette unité par le premier nombre de la seconde colonne, et on a ainsi le diviseur 2 qu'on écrit à côté de ce nombre. On multiplie ensuite les diviseurs déjà trouvés, 1 et 2, par le deuxième nombre de la seconde colonne; et, en omettant la répétition du produit 1×2 ou 2, on obtient le nouveau diviseur 4, qu'on écrit sur la ligne du dernier multiplicateur. On continue de la même manière jusqu'à ce qu'on multiplie enfin par le dernier nombre de la seconde colonne, ce qui produit une dernière suite de diviseurs, laquelle sera toujours terminée par le nombre donné.

Quand on connaît déjà tous les facteurs premiers d'un nombre N, on peut encore trouver ses diviseurs par un autre procédé.

Supposons que le nombre N, décomposé en facteurs premiers, soit

$$N = a^m b^n c^p \ldots;$$

tous les diviseurs de N seront représentés par la formule $a^{m'} b^{n'} c^{p'} \ldots$, dans laquelle les exposans m', n', p',... ne doivent point surpasser m, n, p... Par là on reconnaît que ces diviseurs seront les différens termes qu'on obtient en effectuant le produit

$$P = (1 + a + a^2 \ldots + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n)(1 + c + c^2 \ldots + c^p)\ldots$$

277. *Remarques.* La multiplication des deux premiers polynômes donne un nombre de termes égal à $(m+1)(n+1)$; par conséquent celle des trois premiers polynômes en donne un nombre égal à $(m+1)(n+1)(p+1)$, et ainsi de suite; donc le nombre de tous les diviseurs de N est exprimé par la formule

$$(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$$

En même temps on voit que le produit P est la somme de tous ces diviseurs. Or, on sait (53) que les polynômes qui composent P sont respectivement égaux à $\frac{a^{m+1}-1}{a-1}$, $\frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, etc.; donc la somme de tous les diviseurs du nombre N peut s'exprimer par la formule

$$P = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{p+1}-1}{c-1} \ldots$$

Par exemple, soit $N = 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$: on aura $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$. Donc le nombre des diviseurs de 504 sera

$$4 \times 3 \times 2 = 24;$$

et la somme de tous ces diviseurs sera

$$\frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{7^2-1}{7-1} = 15 \times 13 \times 8 = 1560.$$

278. PROBLÈME. *Combien de fois un nombre premier θ est-il facteur dans la suite des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à n? ou, en d'autres termes, quelle est la plus haute puissance de θ qui divise le produit $1.2.3\ldots n$?*

Soit n' la partie entière du quotient de n par θ. Dans la suite proposée on trouve les n' facteurs θ, 2θ, 3θ,... du produit

$$\theta.2\theta.3\theta\ldots n'\theta;$$

et il est clair qu'ils sont les seuls qui soient divisibles par θ. Ce produit peut s'écrire ainsi

$$1.2.3\ldots n'\times\theta^{n'};$$

donc on obtiendra la puissance cherchée en multipliant $\theta^{n'}$ par la plus haute puissance de θ renfermée dans le produit $1.2.3\ldots n'$.

Le même raisonnement peut se répéter à l'égard de ce produit. Par conséquent, en appelant n'' la partie entière du quotient de n' par θ, on reconnaîtra que la plus haute puissance de θ, contenue dans le dernier produit, se compose de la puissance $\theta^{n''}$ multipliée par la plus haute puissance de θ contenue dans le produit $1.2.3\ldots n''$.

Semblablement, en nommant n''' la partie entière du quotient de n'' par θ, on sera encore conduit à chercher la plus haute puissance de θ renfermée dans le produit $1.2.3\ldots n'''$.

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient $<\theta$. Pour fixer les idées, supposons que ce soit n'''; alors on conclura que la plus haute puissance de θ, contenue dans le produit donné $1.2.3\ldots n$, est $\theta^{n'+n''+n'''}$.

Veut-on savoir, par exemple, quelle est la plus haute puissance de 7 qui divise le produit $1.2.3\ldots 1000$? On fera $n=1000$; et, en ne prenant que les entiers des quotiens, on aura

$$\frac{1000}{7}=142,\quad \frac{142}{7}=20,\quad \frac{20}{7}=2.$$

La somme de ces quotiens étant 164, il s'ensuit que la puissance cherchée est 7^{164}.

279. *Corollaire.* Soient $m, n, p, q, \ldots$ des nombres entiers tels qu'on ait $m=n+p+q\ldots$; l'expression

$$[1]\qquad \frac{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots m}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\times \text{etc.}}$$

représentera toujours un nombre entier. En effet, soit θ un fac-

teur premier du dénominateur, on aura

$$\frac{m}{\theta}=\frac{n}{\theta}+\frac{p}{\theta}+\frac{q}{\theta}+\text{etc.}$$

En nommant m', n', p', q',... les quotiens entiers, on aura donc aussi

$$m'=\text{ ou }>n'+p'+q'+\text{ etc.}$$

Si on divise de nouveau par θ, et qu'on nomme m'', n'',... les nouveaux quotiens entiers, on aura pareillement

$$m''=\text{ ou }>n''+p''+q''+\text{ etc.}$$

On continuera ainsi tant que les quotiens ne seront pas tous moindres que θ. Alors, en ajoutant, on aura

$$(m'+m''+\ldots)=\text{ ou }>(n'+n''+\ldots)+(p'+p''+\ldots)+(q'+q''+\ldots)+\text{etc.}$$

Or ces différentes sommes font connaître les plus hautes puissances de θ par lesquelles on peut diviser les produits qui composent l'expression [1]; donc il n'y a aucun facteur premier dans le dénominateur de cette expression qui ne soit à une puissance au moins égale dans son numérateur; donc cette expression représente un nombre entier. Cette conclusion renferme, comme cas particulier, la remarque du n° 210.

Continuation. Théorèmes sur les résidus.

280. THÉORÈME. *Soit* p *un nombre premier par rapport à* a; *si on divise par* p *les multiples successifs de* a *jusqu'à* (p—1)a *inclusivement, les résidus ou restes de ces divisions seront tous différens.*

Admettons que deux multiples ma et $m'a$, moindres que pa, puissent donner le même résidu r. En nommant E et E' les entiers des quotiens, on devrait avoir

$$ma=\text{E}p+r,\quad m'a=\text{E}'p+r.$$

Si on retranche ces égalités l'une de l'autre, il vient

$$(m'-m)a=(\text{E}'-\text{E})p,\quad \text{d'où}\quad \frac{(m'-m)a}{p}=\text{E}'-\text{E};$$

et comme le nombre p est premier avec a, il s'ensuivrait qu'il divise $m'-m$, ce qui est impossible puisque m et m' sont $<p$.

Remarque. Appelons $r, r', r'',\ldots$ les p restes qu'on obtient en divisant $a, 2a, 3a,\ldots(p-1)a$, par p ; et supposons qu'on ait

$$a=\mathrm{E}p+r,\quad 2a=\mathrm{E}'p+r',\quad 3a=\mathrm{E}''p+r'',\ \text{etc.}$$

Si on ajoute pa à chaque égalité, on a

$$(p+1)a=(\mathrm{E}+a)p+r,\quad (p+2)a=(\mathrm{E}'+a)p+r',\ \text{etc.};$$

donc, après avoir passé pa qui est le premier multiple de a divisible par p, les multiples suivans ramènent les restes déjà trouvés, et dans le même ordre. Sans pousser la démonstration plus loin, il est clair que cette période de restes se reproduit après chaque multiple de a divisible par p.

281. Théorème. *Soit* p *un nombre premier avec* a, *si on divise par* p *la suite des puissances* 1, a, a^2, a^3,... *il y en aura toujours une entre* 1 *et* a^p, *qui laissera un résidu égal à* 1 ; *jusqu'à celle-là tous les résidus seront différens ; et au-delà, les mêmes résidus se reproduiront périodiquement.*

Les résidus devant être moindres que p, on ne peut pas en trouver plus de $p-1$ qui soient différens ; donc, dans les p premiers termes de la suite $1, a, a^2,\ldots a^{p-1}$, il en existe au moins deux qui donnent le même résidu. En les représentant par a^m et $a^{m'}$, et le résidu commun par r, supposons qu'on ait

$$[1]\qquad a^m=\mathrm{E}p+r,\quad a^{m'}=\mathrm{E}'p+r.$$

De là on tire

$$a^{m'}-a^m=(\mathrm{E}'-\mathrm{E})p,\qquad \text{ou}\qquad a^m(a^{m'-m}-1)=(\mathrm{E}'-\mathrm{E})p;$$

et comme p est premier avec a, il devra diviser $a^{m'-m}-1$. Donc on aura l'unité pour résidu en divisant par p la puissance $a^{m'-m}$, laquelle est $<a^p$.

Désignons par a^n la plus petite puissance, autre que 1, qui donne le résidu 1, tous les résidus précédens seront inégaux entre eux. En effet, si pour deux puissances a^m et $a^{m'}$, moindres que a^n, on pouvait avoir les égalités [1], on en conclurait, comme tout-à-l'heure, que la puissance $a^{m'-m}$ donnerait le résidu 1 ; par conséquent a^n

ne serait pas la plus petite puissance qui jouît de cette propriété.

Soit $a^n = Ep + 1$, E étant entier. Au-delà, on aura

$$a^{n+1} = Eap + a, \quad a^{n+2} = Ea^2p + a^2, \quad a^{n+3} = Ea^3p + a^3, \text{ etc.};$$

donc, pour les puissances $a^n, a^{n+1}, \ldots a^{2n-1}$, les résidus seront successivement les mêmes que pour $a^0, a^1, a^2 \ldots a^{n-1}$.

Pour a^{2n} le reste sera 1 comme pour a^n : car l'égalité $a^n = Ep + 1$, en la multipliant par a^n, donne $a^{2n} = Ea^np + a^n$. En répétant le raisonnement précédent, on fera donc voir que les puissances de a^{2n} à a^{3n-1} donnent encore la même période de restes; et ainsi de suite.

Remarque. Par ce qui précède, il est clair que le résidu d'une puissance de a ne doit pas changer, quand on ôte à l'exposant un multiple quelconque de n ; et cette observation fournit un moyen facile d'obtenir les résidus des puissances très-élevées, lorsqu'on connaît les résidus de la première période. Quant à ceux-ci, on les détermine directement, mais on simplifie le calcul en faisant attention que, pour passer du résidu de a^t à celui de a^{t+1}, il suffit de multiplier le premier par a et de diviser le produit par p.

Par exemple, cherchons le résidu de la division de 4^{898} par 11. Ceux de $4^0, 4^1, 4^2$, sont 1, 4, 5. Le produit 5×4 ou 20 donne le résidu 9; 9×4 ou 36 donne 3; et 3×4 ou 12 donne 1. L'on s'arrête ici, et l'on forme le tableau suivant :

Puissances......	4^0,	4^1,	4^2,	4^3,	4^4.
Résidus.........	1,	4,	5,	9,	3.

L'exposant 5 étant celui qui ramène le résidu 1, on divisera l'exposant donné 898 par 5, et le reste 3 indiquera que la puissance 4^{898} laisse le même résidu que 4^3 ; donc ce résidu est 9.

282. Théorème. *Si* p *est un nombre premier qui ne divise point* a, *l'exposant de la plus petite puissance de* a, *autre que* a^0, *dont la division par* p *donne l'unité pour reste, sera ou* p — 1 *ou un diviseur de* p — 1.

Soit a^n cette plus petite puissance. D'après le théorème précédent, on doit avoir $n = p - 1$ ou $< p - 1$: il reste donc à prouver que dans le second cas n est diviseur de $p - 1$.

Supposons que pour les puissances a^0, a^1, a^2,... a^{n-1} les n résidus soient

$$[\alpha] \qquad 1,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''',\ldots$$

On sait qu'ils sont tous différens; mais comme il n'y en a que n, on n'y trouvera pas tous les nombres de la suite

$$[A] \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots p-1.$$

Soit β un de ces nombres, non compris dans la suite $[\alpha]$: si on multiplie tous ces résidus par β, il vient

$$\beta,\ \alpha'\beta,\ \alpha''\beta,\ldots;$$

et si on divise ces produits par p, on obtient n résidus

$$[\beta] \qquad \beta,\ \beta',\ \beta'',\ldots,$$

que je dis être tous différens entre eux, et différens aussi de ceux de la suite $[\alpha]$.

D'abord ils sont différens entre eux. Représentons par ρ, ρ', deux résidus quelconques de la suite $[\alpha]$, et par a^m, $a^{m'}$, les puissances dont ils proviennent, de sorte qu'on ait

$$a^m = \mathrm{E}p + \rho, \quad a^{m'} = \mathrm{E}'p + \rho'.$$

En multipliant ces égalités par β, il vient

$$\beta a^m = \beta \mathrm{E}p + \beta\rho, \quad \beta a^{m'} = \beta \mathrm{E}'p + \beta\rho';$$

et si les produits $\beta\rho$, $\beta\rho'$, pouvaient donner un même résidu ρ'', les dernières égalités pourraient prendre la forme

$$\beta a^m = \mathrm{F}p + \rho'', \quad \beta a^{m'} = \mathrm{F}'p + \rho'',$$

F et F' étant encore des entiers. Par la soustraction, on aurait donc

$$\beta a^m (a^{m'-m} - 1) = (\mathrm{F}' - \mathrm{F})p:$$

or, p est un nombre premier qui par hypothèse ne divise point a, et qui ne divise pas non plus β puisque β est $< p$; donc p devrait diviser $a^{m'-m}-1$; donc a^n ne serait pas la plus petite puissance de a qui ramène le résidu 1. Donc tous les nombres de la suite $[\beta]$ sont différens entre eux.

Ils sont différens aussi de ceux de la suite [α]. Reprenons l'égalité $a^{m'}=E'p+\rho'$, multiplions-la par β, et admettons que le produit $\beta\rho'$ puisse amener le même résidu ρ que a^m. On aurait deux égalités de cette forme

$$a^m=Ep+\rho,\quad \beta a^{m'}=E''p+\rho,$$

E et E'' étant toujours des entiers.

Si $m>m'$, on retranchera la 2e de la 1re, et il viendra

$$a^{m'}(a^{m-m'}-\beta)=(E-E'')p.$$

Il faudrait donc que $a^{m'-m}-\beta$ fût divisible par p, ou que $a^{m'-m}$ donnât le résidu β. Ainsi β appartiendrait à la suite [α], ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $m<m'$, on prendra au lieu de a^m, la puissance a^{n+m} qui donne le même résidu que a^m, et le raisonnement précédent subsistera.

Donc les suites [α] et [β] renferment $2n$ termes, tous différens, et tous $<p$.

S'ils n'épuisent pas la suite [A], prenons un nombre γ parmi ceux qui restent, multiplions la suite [α] par γ, divisons par p les produits

$$\gamma,\quad a'\gamma,\quad a''\gamma,\ldots,$$

et représentons les n résidus correspondans par

$$[\gamma]\qquad\qquad \gamma,\quad \gamma',\quad \gamma'',\ldots$$

En répétant ce qui vient d'être dit pour β, on verrait que ces résidus sont différens entre eux, et différens de ceux de la suite [α]: on va prouver qu'ils sont différens aussi de ceux de la suite [β].

Admettons qu'un même résidu ρ appartienne aux suites [β] et [γ]: on devrait avoir des égalités de cette forme,

$$\beta a^m=Ep+\rho,\quad \gamma a^{m'}=E'p+\rho,$$

m et m' étant deux nombres $<n$.

Si $m>m'$, on en déduirait

$$a^{m'}(\beta a^{m-m'}-\gamma)=(E-E')p;$$

donc $\beta a^{m-m'}-\gamma$ serait divisible par p. Mais $\beta a^{m-m'}$ donne un reste de la suite [β] ; donc la différence entre ce reste et γ devrait être divisible par p. Or cela est impossible : car le nombre γ est lui-même moindre que p, et différent de tous les restes [β].

Si $m<m'$, on prendra au lieu de a^m, la puissance a^{n+m} qui donne le même résidu que a^m, et la démonstration précédente subsistera encore.

Donc les suites [α], [β], [γ], renferment $3n$ termes, tous différens, et tous $<p$.

Si la suite [A] en contient encore d'autres, on pourra continuer les mêmes raisonnemens, et il est clair qu'à la fin elle sera épuisée par des séries dont chacune renferme n termes. Or le nombre des termes de la suite [A] est $p-1$; donc enfin n est diviseur de $p-1$, et le théorème est démontré.

Dans l'exemple qui termine le n° 281, on a vu que 4^5 est la plus petite puissance de 4 dont la division par 11 ramène le résidu 1 ; et en effet l'exposant 5 est un diviseur de 11—1 ou 10.

283. *Corollaire.* En partant de l'égalité $a^n = Ep+1$, on a celles-ci

$$a^n = Ep+1, \quad a^{2n} = Ea^n p + a^n, \quad a^{3n} = Ea^{2n} p + a^{2n}, \text{ etc.} ;$$

et l'on en conclut que le résidu 1 correspond à tous les exposans multiples de n ; donc a^{p-1} donnera aussi le résidu 1 ; donc $a^{p-1}-1$ est divisible par p. Ainsi se trouve démontré ce beau théorème qui porte le nom de son inventeur Fermat : *Un nombre premier* p *qui ne divise point* a *doit diviser* $a^{p-1}-1$.

284. *Remarque.* D'après ce qui a été dit n° 281, tout nombre a, dont la puissance $p-1$ est la plus petite qui ramène le résidu 1, jouit de cette propriété que les puissances inférieures à $p-1$, fournissent tous les résidus 1, 2, 3,... $p-1$, mais dans un ordre différent de l'ordre naturel. Si, parmi les nombres qui remplissent cette condition, on ne prend pour a que les nombres au-dessous de p, on aura ceux que Euler appelle des *racines primitives* par rapport à p. On n'a point de méthode directe pour les chercher, mais on peut le faire par tâtonnement. Euler les a donnés pour les nombres premiers jusqu'à 37, et je les rapporte ici d'après lui.

Nomb.	Racines primitives.
3	2.
5	2, 3.
7	3, 5.
11	2, 6, 7, 8.
13	2, 6, 7, 11.
17	3, 5, 6, 7, 11, 12, 14.
19	2, 3, 10, 13, 14, 15.
23	5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21.
29	2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27.
31	3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24.
37	2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35.

En consultant ce tableau, on y voit que 5 est racine primitive par rapport à 7; et en effet, si on divise par 7 les puissances 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, on trouve les résidus 1, 5, 4, 6, 2, 3, qui comprennent tous les nombres au-dessous de 7.

On pourrait prouver que, par rapport à chaque nombre premier p, il existe autant de racines primitives qu'il y a, entre 1 et p, de nombres premiers à $p-1$. Mais, pour cette proposition et pour toutes les autres qu'on pourrait encore démontrer sur les nombres, je renverrai à la *Théorie des nombres* par LEGENDRE.

Sur les grandeurs incommensurables. Approximation des racines.

285. Deux grandeurs de même espèce sont dites *commensurables*, lorsqu'elles ont une commune mesure, c'est-à-dire lorsqu'il existe une troisième grandeur qui est contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles; dans le cas contraire, elles sont *incommensurables*.

Quand on dit d'une quantité, prise isolément, qu'elle est commensurable ou incommensurable, il y a toujours une certaine unité sous-entendue avec laquelle on la compare; et alors ces expressions indiquent qu'il existe une mesure commune entre cette quantité et l'unité, ou bien qu'il n'en existe pas.

Supposons, par exemple, qu'une ligne donnée contienne 23 fois une certaine longueur, et que le mètre la contienne 7 fois, la ligne donnée sera commensurable; et comme elle est égale à 23 septièmes de l'unité, elle sera représentée par $\frac{23}{7}$. Cet exemple suf-

fit pour montrer que toute quantité commensurable peut s'exprimer exactement en nombres entiers ou fractionnaires.

D'un autre côté, toute quantité représentée par un nombre entier ou fractionnaire est commensurable : car il y a évidemment une commune mesure entre elle et l'unité. Ainsi, qu'une longueur soit égale à $\frac{43}{10}$, et que le mètre soit l'unité sous-entendue, la commune mesure sera le décimètre.

Donc une quantité qui ne peut s'exprimer exactement ni avec des entiers ni avec des fractions est incommensurable. Telles sont $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$.

En faisant attention que le *rapport* ou la *raison* entre une quantité commensurable et l'unité à laquelle on la rapporte est toujours exprimée exactement par un nombre entier ou fractionnaire, on comprendra pourquoi l'on désigne encore les quantités commensurables sous la dénomination de *rationnelles*, et les incommensurables sous celle d'*irrationnelles*.

286. *Lorsque la racine d'un nombre entier, quel que soit le degré de cette racine, ne peut pas être exprimée exactement en nombres entiers, elle ne peut pas l'être non plus avec des fractions, et par conséquent elle est incommensurable.*

Supposons qu'on puisse exprimer cette racine avec des fractions, on pourra toujours la mettre sous la forme d'un nombre fractionnaire irréductible $\frac{a}{b}$. Or, à quelque puissance qu'on élève un tel nombre, bien loin de retrouver un nombre entier, je vais montrer qu'on n'obtient jamais qu'un nombre fractionnaire irréductible. En effet, les nombres premiers qui divisent a ne devant point diviser b, il s'ensuit, en vertu d'un théorème connu (269), qu'ils ne pourront pas diviser $b \times b$ ou b^2, ni $b^2 \times b$ ou b^3, etc. Cette conclusion revient à dire que les nombres premiers qui divisent les puissances de b ne peuvent pas diviser a; donc aussi, d'après le théorème cité, ils ne diviseront ni $a \times a$ ou a^2, ni $a^2 \times a$ ou a^3, etc. Ainsi les puissances de a n'ont aucun facteur commun avec celles de b. Donc la fraction $\frac{a}{b}$ étant irréductible, ses puissances $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, etc., seront irréductibles aussi. Donc les ra-

cines des nombres entiers, quand elles ne sont pas des nombres entiers, sont toujours incommensurables.

287. Déterminons aussi à quel caractère on connaîtra que la racine d'un nombre est incommensurable.

D'après ce qui a été dit dans le n° précédent, la puissance $\frac{a^n}{b^n}$ d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est elle-même une fraction irréductible; donc, pour qu'une fraction soit égale à une puissance n, il faut qu'après l'avoir réduite à sa plus simple expression, on puisse extraire exactement la racine n de son numérateur et de son dénominateur.

Quand cette double extraction sera possible, il est clair qu'elle fera connaître la racine de la fraction donnée. On trouve ainsi $\sqrt{\frac{867}{363}} = \sqrt{\frac{289}{121}} = \frac{17}{11}$.

288. On peut remplacer cette règle par une autre, fondée sur ce principe, que si une fraction est égale à la puissance n d'une fraction, et que l'un de ses termes soit une puissance n, l'autre en doit être une aussi.

En effet, supposons que la fraction $\frac{A}{B^n}$ soit égale à la puissance n d'une autre fraction $\frac{a}{b}$: on devra avoir

$$\frac{A}{B^n} = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{a^n B^n}{b^n};$$

donc $a^n B^n$ est divisible par b^n. Or, si on conçoit a et B décomposés en facteurs premiers, il est clair que tous ces facteurs sont à la puissance n dans $a^n B^n$; et de même, les facteurs premiers de b sont à la puissance n dans b^n. Donc, après avoir divisé $a^n B^n$ par b^n, ce qui revient à supprimer dans $a^n B^n$ tous les facteurs de b^n, il ne restera au quotient que des facteurs élevés à la puissance n; donc A est une puissance exacte de l'ordre n.

Cela posé, remarquons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ étant donnée, on peut toujours, en multipliant ou en divisant ses deux termes par des facteurs convenables, rendre son dénominateur puissance exacte d'un ordre quelconque n. Donc, il faudra qu'alors le numérateur en soit une aussi, pour que la fraction donnée puisse être égale à la puissance n d'une fraction.

Par exemple, en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur, on rendra ce dénominateur carré parfait; il deviendra un cube en les multipliant par son carré; et ainsi de suite. De cette manière on a $\sqrt{\frac{867}{363}} = \sqrt{\frac{867 \times 363}{363 \times 363}} = \sqrt{\frac{314721}{363 \times 363}} = \frac{561}{363}$.

En simplifiant ce résultat, on retrouverait $\frac{17}{11}$ comme dans le n précédent.

289. Maintenant expliquons comment on évalue avec approximation les racines incommensurables. La question générale est celle-ci: *Etant donnée une quantité quelconque* M, *déterminer sa racine* $n^{\text{ème}}$ *à moins d'une fraction* $\frac{1}{p}$.

Tout se réduit à chercher combien de fois $\sqrt[n]{M}$ contient la fraction $\frac{1}{p}$: car si r exprime ce nombre de fois, il est évident que $\sqrt[n]{M}$ sera comprise entre $\frac{r}{p}$ et $\frac{r+1}{p}$; et comme ces deux fractions ne diffèrent entre elles que de $\frac{1}{p}$, la différence entre $\sqrt[n]{M}$ et chacune d'elles sera moindre que $\frac{1}{p}$. En conséquence, on posera

$$[1] \qquad \frac{x}{p} = \sqrt[n]{M};$$

et la valeur de x, calculée à une unité près, sera le nombre r. Or, de l'équation [1] on déduit

$$\frac{x^n}{p^n} = M, \quad x^n = Mp^n, \quad x = \sqrt[n]{Mp^n};$$

donc il faut extraire, à une unité près, la racine du produit Mp^n.

Ainsi, on peut établir cette règle générale: *Pour évaluer, avec une approximation marquée par une certaine partie d'unité, la racine* $n^{\text{ème}}$ *d'une quantité donnée* M, *multipliez cette quantité par la puissance* p^n *du dénominateur de la fraction qui désigne l'approximation, extrayez la racine du produit à une unité près, puis divisez cette racine par le dénominateur* p *de cette même fraction.*

Par exemple, veut-on trouver $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{6}$ près? on fait le produit $2 \times 36 = 72$, on en extrait la racine carrée 8, à une unité près, puis on divise 8 par 6. Le quotient $\frac{8}{6}$ ou $1\frac{1}{3}$ est la racine demandée.

Soit encore à évaluer $\sqrt{7\frac{2}{3}}$ à $\frac{1}{5}$ près. On fera le produit $7\frac{2}{3}\times 25=\frac{575}{3}=191\frac{2}{3}$. Alors on remarquera que la racine carrée de ce produit, à une unité près, est la même que si on avait le nombre 191 sans fraction. En conséquence, on extrait, par les règles connues, cette racine qui est 13; et la racine cherchée sera $\frac{13}{5}$ ou $2\frac{3}{5}$.

290. Les approximations se font ordinairement en décimales, et, pour ce genre de fractions, la règle générale se simplifie beaucoup. Pour fixer les idées, je ne parlerai ici que de la racine carrée.

Supposons d'abord qu'on ait à évaluer en décimales la racine carrée d'un nombre entier. Dans ce cas, la règle se réduira à celle-ci : On place à la suite du nombre donné deux fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine, on en extrait alors la racine à moins d'une unité, puis on sépare sur la droite de cette racine le nombre requis de décimales.

Il peut se faire que le nombre donné ait déjà des décimales. S'il n'en a pas deux fois autant qu'on en veut à la racine, on complète ce nombre par des zéros; et, s'il en a plus, on supprime les décimales excédentes. Du reste, on extrait la racine sans faire attention à la virgule, mais on y a égard à la fin de l'opération.

S'il s'agissait d'un nombre fractionnaire, tel que $\frac{5}{7}$ ou $3\frac{5}{7}$, on réduirait la fraction $\frac{5}{7}$ en décimales, en ayant soin d'en prendre deux fois autant que la racine doit en contenir.

291. Quand on extrait, à une unité près, la racine carrée d'un nombre entier, on trouve ordinairement le plus grand nombre entier contenu dans cette racine. Mais le nombre qui a une unité de plus, quoique trop grand, approche aussi à une unité près, et même il peut se faire qu'il soit plus approché que le premier : or, il y a une règle très-simple pour le reconnaître.

Soit a le nombre entier contenu dans la racine, et R le reste de l'opération. Si a est une racine plus approchée que $a+1$, le carré de $a+\frac{1}{2}$ surpassera le nombre donné, et par conséquent on devra avoir $R<(a+\frac{1}{2})^2-a^2$ ou $R<a+\frac{1}{4}$; donc alors le reste R est tout au plus égal à a. Ainsi, quand le reste ne surpasse pas le nombre trouvé à la racine, ce nombre est le plus approché de la ra-

cine ; et, dans le cas contraire, c'est ce nombre augmenté d'une unité.

292. Les approximations relatives aux racines se ramènent toujours à extraire la racine d'un nombre entier à une unité près. Quand il s'agit d'une racine carrée qui doit avoir beaucoup de chiffres, et qu'on a trouvé plus de la moitié de ces chiffres, je vais montrer comment on obtient les autres d'une manière abrégée, au moyen d'une simple division.

Supposons donc que N soit un nombre entier, et qu'on ait calculé plus de la moitié des chiffres de la racine. Pour leur donner le rang qu'ils doivent avoir, mettons à leur droite autant de zéros qu'il y a encore de chiffres à connaître. Désignons par a le nombre ainsi formé, par R le reste complet qu'on trouve, en abaissant toutes les tranches dont on n'a point fait usage, et enfin par x c qu'il faut ajouter à a pour obtenir $\sqrt{N}$. On devra avoir

$$(a+x)^2-a^2=R,$$

ou, en développant le carré,

$$2ax+x^2=R;$$

donc

$$x=\frac{R}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Soit q le quotient de la division de R par $2a$, et R′ le reste : cette égalité devient

$$[1] \qquad x=q+\frac{R'}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Supposons qu'il y ait encore n chiffres à trouver à la racine, le carré x^2 sera moindre que 10^{2n}. Mais, par hypothèse, a renferme au moins $2n+1$ chiffres ; donc $a>10^{2n}$, et par suite $\frac{x^2}{2a}<1$. D'ailleurs $\frac{R'}{2a}$ est <1 ; donc la différence des deux fractions est <1 ; donc en prenant simplement $x=q$, l'erreur est <1, et l'on aura, à une unité près, $\sqrt{N}=a+q$.

Remarque. Il peut se faire que le quotient q soit la valeur

exacte de x, qu'il soit moindre, ou qu'il soit plus grand. Si $q=x$, l'équation [1] donne $x^2=R'$; donc $q^2=R'$. Si $q<x$, elle donne $x^2<R'$; donc $q^2<R'$. Si $q>x$, elle donne $x^2>R'$; donc $q^2>R'$. Ainsi, suivant qu'on a $q^2=R'$, $q^2<R'$, $q^2>R'$, la racine $a+q$ est exacte, ou approchée par défaut, ou approchée par excès.

Progressions arithmétiques.

293. On appelle *progression arithmétique ou par différence une suite de termes tels qu'en retranchant chacun du suivant on obtient toujours la même différence.* Cette différence est *la raison* de la progression.

Voici deux progressions arithmétiques, écrites selon l'usage adopté,

$$\div 3.7.11.15. \text{ etc.} \qquad \div 45.41.37.33. \text{ etc.}$$

Dans la première, la raison est 4; dans la seconde, elle est -4. L'une est croissante, et l'autre est décroissante.

294. Soit une progression arithmétique quelconque

$$\div a.b.c.d.e.f. \text{ etc.},$$

et soit δ la raison. D'après la définition même, chaque terme est égal au précédent plus la raison; donc

$$b=a+\delta, \quad c=a+2\delta, \quad d=a+3\delta, \text{ etc.}$$

Donc, en général, l étant un terme dont le rang est marqué par n, on doit avoir

$$[1] \qquad l=a+(n-1)\delta:$$

c'est-à-dire qu'*un terme quelconque est égal au premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

295. Considérée sous un point de vue général, cette formule exprime une relation entre a, δ, n et l; et elle servira à résoudre les questions dans lesquelles, trois de ces quantités étant données, il s'agira de déterminer la quatrième.

Par exemple, proposons-nous d'*insérer* m *moyens arithmétiques entre deux nombres donnés* a *et* l.

donc, en ajoutant les égalités correspondantes, on aura

$$a+l=b+k,\quad b+k=c+i,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire que la somme de deux termes quelconques, également éloignés des extrêmes, est égale à la somme des extrêmes.

Cela posé, nommons S la somme des termes de la progression : en les prenant d'abord dans l'ordre même de la progression, et ensuite dans un ordre inverse, on aura

$$S=a+b+c\ldots\ +i+k+l,$$
$$S=l+k+i\ldots\ +c+b+a.$$

Donc, en ajoutant ces égalités, si on observe que la somme de deux termes correspondans est toujours égale à la somme des extrêmes $a+l$, et si on appelle n le nombre des termes de la progression, il viendra $2S=(a+l)n$, d'où

$$[2] \qquad S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Donc *la somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la demi-somme des termes extrêmes, multipliée par le nombre des termes.*

298. Les relations [1] et [2], dans lesquelles il entre cinq quantités a, δ, n, l, S, pourront servir en général à trouver deux quelconques de ces quantités, quand les trois autres seront données. Ainsi elles fournissent la solution d'autant de problèmes distincts qu'il y a de manières de prendre deux quantités sur cinq; et par conséquent le nombre de ces problèmes sera de $\frac{5\cdot4}{2}$ ou 10. Pour qu'ils soient possibles, il faudra toujours que la valeur de n soit non-seulement réelle, mais encore positive.

Sans entrer dans le détail des calculs, je placerai ici les solutions de ces dix problèmes :

I. Données a, δ, n. Inconnues l, S. $\left\{ l=a+(n-1)\delta,\quad S=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)\delta]. \right.$

II. Données l, δ, n. Inconnues a, S. $\left\{ a=l-(n-1)\delta,\quad S=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)\delta]. \right.$

III. Données a, n, l. Inconnues δ, S. $\left\{\delta=\frac{l-a}{n-1},\quad S=\frac{1}{2}n(a+l).\right.$

IV. Données δ, n, S. Inconnues a, l. $\left\{a=\frac{2S-n(n-1)\delta}{2n},\quad l=\frac{2S+n(n-1)\delta}{2n}.\right.$

V. Données a, n, S. Inconnues δ, l. $\left\{l=\frac{2S}{n}-a,\quad \delta=\frac{2(S-an)}{n(n-1)}.\right.$

VI. Données l, n, S. Inconnues a, δ. $\left\{a=\frac{2S}{n}-l,\quad \delta=\frac{2(nl-S)}{n(n-1)}.\right.$

VII. Données a, δ, l. Inconnues n, S. $\left\{n=\frac{l-a}{\delta}+1,\quad S=\frac{(l+a)(l-a+\delta)}{2\delta}.\right.$

VIII. Données a, l, S. Inconnues n, δ. $\left\{n=\frac{2S}{a+l},\quad \delta=\frac{(l+a)(l-a)}{2S-(l+a)}.\right.$

IX. Données a, δ, S. Inconnues l, n. $\left\{\begin{array}{l} n=\frac{\delta-2a\pm\sqrt{(\delta-2a)^2+8\delta S}}{2\delta}, \\ l=a+(n-1)\delta. \end{array}\right.$

X. Données l, δ, S. Inconnues a, n. $\left\{\begin{array}{l} n=\frac{\delta+2l\pm\sqrt{(\delta+2l)^2-8\delta S}}{2\delta}, \\ a=l-(n-1)\delta. \end{array}\right.$

Progressions géométriques.

299. *La progression géométrique ou par quotient est une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède le quotient reste constant.* Ce quotient est la *raison* de la progression.

Voici deux exemples où l'on voit comment on écrit les progressions de cette espèce :

$$\div\!\div 2:6:18:54:\text{etc.},\qquad \div\!\div 60:20:\frac{20}{3}:\frac{20}{9}:\text{etc.}$$

La première est croissante, et a pour raison 3; la seconde est décroissante, et a pour raison $\frac{1}{3}$.

300. Soit une progression géométrique quelconque

$$\div\!\div a:b:c:d:e:\ldots\ldots.k:l.$$

En désignant la raison par q, on doit avoir $b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$, et, en général, n étant le rang du terme l,

$$[1] \qquad l=aq^{n-1}:$$

c'est-à-dire qu'*un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à la puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

301. *Si l'on veut insérer* m *moyens géométriques entre* a *et* l, on remarquera que le nombre des termes de la progression sera $m+2$; en conséquence on fait $n=m+2$ dans l'équation [1], puis on en tire la raison

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

On voit qu'il y aura à extraire une racine, opération qui est, en général, assez laborieuse, et qu'on facilitera beaucoup par l'emploi des logarithmes.

302. De cette formule on conclut que, *si on insère un même nombre de moyens géométriques entre chaque terme d'une progression géométrique et le suivant, la nouvelle suite sera encore une progression de même espèce.*

En effet, si on met dans la formule, à la place de a et de l, deux termes consécutifs quelconques d'une progression géométrique, le quotient qui est sous le radical sera constant; par suite la raison de toutes les progressions partielles sera la même; et, comme le terme qui finit chacune d'elles commence la suivante, il en résulte que l'ensemble de ces progressions est aussi une progression géométrique.

303. Appelons S la somme des termes de la progression : on aura

$$S=a+b+c+d\ldots.+k+l.$$

Si on multiplie cette somme par la raison q, et si on remarque que le produit de chaque terme par q est égal au terme suivant, il vient

$$qS=b+c+d\ldots+l+ql;$$

et si de cette égalité on retranche la précédente, on trouve

$$(q-1)S=ql-a,$$

d'où l'on tire

[2] $$S=\frac{ql-a}{q-1}.$$

Donc *la somme des termes d'une progression géométrique s'obtient en multipliant le dernier terme par la raison, en retranchant du produit le premier terme, et en divisant le reste par la raison moins un.*

304. Remplaçons l par sa valeur aq^{n-1}, la formule [2] devient

[3] $$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1};$$

et je vais examiner les conséquences qu'on en tire dans les hypothèses $q>1$, $q<1$, $q=1$.

1° Soit $q>1$, ce qui est le cas des progressions croissantes. Alors la quantité q^n est d'autant plus grande que n est plus grand, et même il n'y a aucune limite qu'elle ne puisse surpasser, en donnant à n une valeur assez considérable.

En effet, si on pose $q=1+\alpha$, on a $q^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+$etc.; donc $q^n>n\alpha$. Or, quelque petite que soit la quantité α, il est clair qu'en prenant n assez grand, $1+n\alpha$ peut surpasser telle grandeur qu'on voudra; donc à plus forte raison en est-il ainsi de q^n.

De là on conclut, ce qui est d'ailleurs évident par soi-même, que la somme S peut devenir aussi grande qu'on voudra en prenant un nombre suffisant de termes dans la progression.

2° Soit $q<1$, ce qui est le cas des progressions décroissantes. Après avoir changé les signes du numérateur et du dénominateur, la formule [3] peut s'écrire de cette manière

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{q-1}.$$

Ici, la quantité q^n sera d'autant moindre que n sera plus grand, et même elle peut devenir aussi petite qu'on voudra. Pour s'en

convaincre, on posera $q=\frac{1}{\beta}$, β étant >1. On aura $q^n=\frac{1}{\beta^n}$: or, d'après ce qui a été ci-dessus, en prenant n de plus en plus grand, β^n peut augmenter jusqu'à l'infini; donc q^n diminuera jusqu'à zéro, et par suite, la partie soustractive $\frac{aq^n}{1-q}$ décroîtra aussi jusqu'à zéro. On voit ainsi que la somme S doit encore augmenter, ce qui est évident sans calcul; et, de plus, qu'elle ne surpassera jamais la limite $\frac{a}{1-q}$, dont elle peut d'ailleurs approcher autant qu'on voudra.

Ces raisonnemens démontrent qu'en faisant $n=\infty$, on aura, en toute rigueur,

$$[4] \qquad S=\frac{a}{1-q}:$$

c'est-à-dire que, *si on prolonge à l'infini une progression géométrique décroissante, la somme des termes est égale au quotient du premier, divisé par l'unité moins la raison.*

D'après cette règle, pour avoir la somme

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\text{etc.}$$

on fera $a=1$, $q=\frac{1}{3}$; et il viendra

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

3° Soit $q=1$. La formule [3] donne $S=\frac{0}{0}$, mais l'indétermination n'est ici qu'apparente : car, en divisant q^n-1 par $q-1$ (53), la formule devient

$$S=a(q^{n-1}+q^{n-2}\ldots+q+1);$$

et alors l'hypothèse $q=1$ donne $S=an$. Cette conséquence est évidente *à priori :* car, la raison étant 1, tous les termes de la progression sont égaux à a.

305. *Remarques.* La division de q^n-1 par $q-1$ ne fait que reproduire, dans un ordre inverse, la progression dont la formule [3] représente la somme. Il est clair en effet que cette progression peut se représenter ainsi

$$\div\!\div a:aq:aq^2:\ldots aq^{n-1}.$$

Pour la retrouver sans inversion, il suffirait décrire la formule sous cette forme :

$$S=\frac{a(1-q^n)}{1-a}.$$

Il y a plus, la formule [4], qui exprime la somme de tous les termes d'une progression décroissante prolongée à l'infini, peut aussi reproduire cette progression. Effectuons, suivant la règle ordinaire, la division de a par $1-q$.

	a	$1-q$
1[er] reste	$+aq$	$a+aq+aq^2+$ etc.
2[e]	$+aq^2$	
3[e]	$+aq^3$	
etc.	etc.	

Si on arrête la division successivement au 1[er] reste, au 2[e], au 3[e], etc., il faudra, pour compléter les quotiens correspondans, leur ajouter les fractions

$$\frac{aq}{1-q},\ \frac{aq^2}{1-q},\ \frac{aq^3}{1-q},\ \text{etc.}$$

Or, q étant <1, ces fractions ont des valeurs décroissantes; et comme on peut pousser la division jusqu'à avoir au reste un exposant de q aussi grand qu'on voudra, il s'ensuit qu'en supposant les termes du quotient prolongés indéfiniment, la fraction complémentaire doit être regardée comme zéro. Par conséquent la suite de tous ces termes, continuée à l'infini, est la valeur exacte du quotient.

Il est très-important de ne point perdre de vue que cette conclusion n'est légitime que dans l'hypothèse $q<1$. Si l'on avait $q>1$, les fractions complémentaires, bien loin de tendre vers zéro, devraient au contraire aller en augmentant jusqu'à l'infini négatif.

306. De même que pour les progressions arithmétiques, toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions géométriques peuvent se réduire à dix, dont les solutions se déduisent des deux équations

$$[1] \qquad l=aq^{n-1}, \quad [2] \qquad S=\frac{ql-a}{q-1}.$$

Ces solutions sont renfermées dans le tableau suivant :

I.	Données a, q, n. Inconnues l, S.	$l=aq^{n-1}$, $S=\frac{ql-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$.
II.	Données l, q, n. Inconnues a, S.	$a=\frac{l}{q^{n-1}}$, $S=\frac{l(q^{n-1})}{q^{n-1}(q-1)}$.
III.	Données a, n, l. Inconnues q, S.	$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, $S=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$.
IV.	Données q, n, S. Inconnues a, l.	$a=\frac{S(q-1)}{q^n-1}$, $l=\frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$.
V.	Données a, n, S. Inconnues q, l.	$q^{n-1}+q^{n-2}\ldots+1=\frac{S}{a}$, $l=aq^{n-1}$.
VI.	Données l, n, S. Inconnues q, a.	$\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{q}\right)^{n-2}\ldots+1=\frac{S}{l}$, $a=l\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}$
VII.	Données a, q, l. Inconnues n, S.	$S=\frac{ql-a}{q-1}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.
VIII.	Données a, l, S. Inconnues q, n.	$q=\frac{S-a}{S-l}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.
IX.	Données a, q, S. Inconnues l, n.	$l=\frac{a+S(q-1)}{q}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.
X.	Données l, q, S. Inconnues a, n.	$a=lq-S(q-1)$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.

Dans le V[e] cas, il faut observer qu'en éliminant l entre les équations [1] et [2], il en résulte une équation en q du degré $n-1$; et, à moins qu'on n'ait $n=3$, ce qui la réduirait au second degré, elle ne peut être résolue que par des méthodes qui seront exposées plus tard. D'ailleurs, dès que la raison q est connue, on trouve l par l'équation [1].

A l'égard du VI[e] cas, même observation. On y a pris pour inconnue $\frac{1}{q}$ au lieu de q.

Enfin dans les quatre derniers cas, on remarquera que l'équation [2] donne sur-le-champ chacune des quantités a, l, q, S, au moyen des trois autres : de sorte que toute la difficulté est de résoudre l'équation [1], dans laquelle l'inconnue n est en exposant. Cette résolution a été effectuée par logarithmes, d'après les règles qui seront exposées dans chapitre suivant.

Fractions continues.

307. *Définitions.* On désigne sous le nom de *fractions continues* des expressions de la forme

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.},}}}$$

dans lesquelles a, b, c, d,... sont des nombres entiers positifs. La suite de ces nombre peut d'ailleurs être limitée ou illimitée.

Pour plus de généralité, au lieu de l'unité, on pourrait prendre des numérateurs quelconques, et regarder les dénominateurs a, b, c,... comme représentant telles quantités qu'on voudra : mais les fractions continues, telles que nous les avons définies, sont les seules qui méritent quelque attention.

Je nommerai, avec Legendre, *quotiens incomplets* ou simplement *quotiens* les nombres a, b, c,... qui entrent dans la fraction continue, sans supposer pour cela qu'ils doivent nécessairement provenir d'une division.

Les *quotiens complets* s'obtiennent en prenant chaque quotient incomplet avec toute la quantité qui lui est jointe par le signe $+$. Tel serait $b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}$.

Les fractions $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, etc. sont souvent appelées *fractions partielles* ou *fractions intégrantes*.

Si l'on prend successivement, dans la fraction continue, d'abord le premier terme, puis les deux premiers, puis les trois premiers, etc., on aura différentes expressions qu'on pourra réduire à la forme des fractions ordinaires. Ces fractions sont désignées sous le nom de *réduites* ou de *fractions convergentes*.

308. *Loi de formation des réduites.* Pour les deux premières on a

$$a=\frac{a}{1},\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}.$$

On passera à la troisième réduite en changeant dans la seconde b en $b+\frac{1}{c}$, ce qui donne

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}.$$

On obtiendrait semblablement la quatrième réduite en changeant c en $c+\frac{1}{d}$ dans la troisième; et ainsi des suivantes.

Mais déjà on aperçoit que la troisième peut se former en multipliant les deux termes de la seconde, $\frac{ab+1}{b}$, par le quotient c, et en ajoutant respectivement à ces produits les deux termes de la première $\frac{a}{1}$: il s'agit donc de reconnaître si cette loi est générale. Or, cette question revient à examiner si cette loi, étant vraie jusqu'à une certaine réduite, subsiste encore à l'égard de la suivante: car alors il est clair qu'elle devra s'étendre de la troisième à la quatrième, de celle-ci à la cinquième, et ainsi de suite indéfiniment.

Soient donc trois réduites consécutives quelconques $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$; nommons m le dernier quotient employé dans la composition de $\frac{P''}{Q''}$, et supposons qu'on ait

$$P''=P'm+P,\quad Q''=Q'm+Q.$$

Nommons $\frac{1}{n}$ la fraction intégrante qui, dans la fraction continue, vient après le quotient m: on trouvera la réduite qui succède à $\frac{P''}{Q''}$, en remplaçant m par $m+\frac{1}{n}$ dans l'expression de $\frac{P''}{Q''}$;

et comme P, Q, P′ Q′, ne contiennent point m, il est clair qu'on aura, pour la nouvelle réduite,

$$\frac{P'\left(m+\frac{1}{n}\right)+P}{Q'\left(m+\frac{1}{n}\right)+Q}=\frac{(P'm+P)n+P'}{(Q'm+Q)n+Q'}=\frac{P''n+P'}{Q''n+Q'}.$$

Cette réduite est évidemment formée d'après la même loi que la précédente, et dès-lors cette loi est générale : c'est-à-dire que, *chaque réduite, à partir de la troisième, pourra se former en multipliant les deux termes de la réduite précédente par le nouveau quotient, et en ajoutant respectivement à ces produits es deux termes de l'avant-précédente.*

Quand on applique cette règle, il est commode de disposer tous les quotiens $a, b, c, \ldots$ sur une ligne horizontale, et de placer au-dessous d'eux les réduites correspondantes, à mesure qu'on les forme. Par exemple, si l'on donnait

$$x=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}},$$

la disposition serait celle-ci :

$$\begin{array}{lcccc} \text{Quotiens}\ldots. & 3, & 5, & 2, & 7. \\ \text{Réduites}\ldots. & \frac{3}{1}, & \frac{16}{5}, & \frac{35}{11}, & \frac{261}{82}. \end{array}$$

Lorsque la fraction continue n'est pas terminée, la loi d'après laquelle se composent les réduites prouve que leurs numérateurs et leurs dénominateurs forment deux suites croissantes jusqu'à l'infini.

309. *Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue.*

La 1re réduite est égale à a, et comme on néglige la partie fractionnaire qui lui est ajoutée, elle est évidemment $< x$.

La 2e est égale à $a+\frac{1}{b}$; et comme on y donne à l'unité un diviseur b moindre que dans la fraction continue, il s'ensuit que cette 2e réduite est $> x$.

La 3e est égale à $a+\cfrac{1}{b+\frac{1}{c}}$: or, ce qui vient d'être dit pour la 2e prouve que le diviseur $b+\frac{1}{c}$ est une quantité trop forte; donc la 3e réduite est $<x$. Le même raisonnement se continue indéfiniment.

310. *La différence entre deux réduites consécutives quelconques est égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs des deux réduites.*

Supposons que $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$, soient trois réduites successives; d'après la loi démontrée (308), si on nomme m le dernier quotient, on doit avoir

$$P''=P'm+P, \qquad Q''=Q'm+Q.$$

Cela posé, les réductions ordinaires donnent

$$\frac{P'}{Q'}-\frac{P}{Q}=\frac{QP'-PQ'}{QQ'},$$

$$\frac{P''}{Q''}-\frac{P'}{Q'}=\frac{P'm+P}{Q'm+Q}-\frac{P'}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'Q''}.$$

Ces deux différences ont des numérateurs égaux et de signes contraires. Ainsi, on peut déjà conclure que la différence entre deux réduites consécutives quelconques est égale, abstraction faite du signe, à un nombre constant divisé par le produit des dénominateurs de ces deux réduites. Or, si on considère les deux premières réduites, on trouve

$$\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{1}{1\times b};$$

donc le numérateur constant de toutes les différences est égal à 1, et l'on a

$$QP'-PQ'=\pm 1.$$

Le signe sera $+$ ou $-$, selon qu'on retranchera une réduite de rang impair d'une réduite de rang pair, ou *vice versâ*.

Comme les dénominateurs croissent jusqu'à l'infini, il est évident qu'on peut assigner deux réduites dont la différence soit aussi petite qu'on voudra; et comme elles comprendront entre elles la valeur de la fraction continue totale, il y a dès à présent lieu de

conclure qu'on peut trouver une réduite aussi approchée qu'on voudra.

Par exemple, si l'approximation doit être à $\frac{1}{1000}$ près, on poussera le calcul des réduites jusqu'à ce que le produit des dénominateurs des deux dernières soit au moins égal à 1000, et alors l'avant-dernière réduite aura l'approximation requise.

311. *Les réduites, formées d'après la règle* (308), *sont toujours des fractions irréductibles.*

Si une réduite $\frac{P}{Q}$ pouvait se simplifier, il y aurait un facteur k commun à P et à Q, et k devrait aussi diviser $QP'-PQ'$: or cela est impossible, car $QP'-PQ'=\pm 1$.

312. *Chaque réduite est plus approchée de la vraie valeur que la réduite précédente.*

Pour le démontrer, j'observerai d'abord que si on complète, dans chaque réduite, le dernier quotient employé à la former, on aura des expressions égales à la fraction continue totale x, et qu'il sera facile de comparer avec celles des réduites. Par exemple, soit la réduite

$$\frac{P''}{Q''}=\frac{P'm+P}{Q'm+Q},$$

dans laquelle m est le dernier quotient employé. Si on pose le quotient complet $m+$ etc. $=y$, et si on remplace m par y dans cette réduite, il est évident qu'on aura une expression égale à x,

$$x=\frac{P'y+P}{Q'y+Q},$$

et que la composition de cette expression la rend facilement comparable avec les deux réduites $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$.

Cela posé, en prenant les différences entre x et chacune de ces réduites il vient

$$x-\frac{P}{Q}=\frac{P'y+P}{Q'y+Q}-\frac{P}{Q}=\frac{(QP'-PQ')y}{Q(Q'y+Q)},$$

$$x-\frac{P'}{Q'}=\frac{P'y+P}{Q'y+Q}-\frac{P'}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'(Q'y+Q)}.$$

Quelle que soit la valeur de la quantité $QP'-PQ'$, ces différences sont de signes contraires; et de là on conclut, comme au n° 309, que la valeur de x est toujours comprise entre deux réduites consécutives.

Mais si on se rappelle que $QP'-PQ'=\pm 1$ (310), les différences ci-dessus se réduiront à

$$x-\frac{P}{Q}=\frac{\pm y}{Q(Q'y+Q)}, \quad x-\frac{P'}{Q'}=\frac{\mp 1}{Q'(Q'y+Q)}.$$

Or, y étant un quotient complet, et Q' étant un dénominateur qui vient après Q, on doit avoir $y>1$ et $Q'>Q$; donc la deuxième différence, abstraction faite du signe, est moindre que la précé dente. C'est cette propriété qui a fait donner aux réduites le nom de *fractions convergentes*.

313. *Remarque*. Le quotient complet y est compris entre m et $m+1$: donc si, dans le dénominateur de la deuxième différence, on remplace y par m, on aura une fraction trop grande; et si on y remplace y par $m+1$, on aura une fraction trop petite. Donc, abstraction faite du signe, on a

$$x-\frac{P'}{Q'}<\frac{1}{Q'(Q'm+Q)} \quad \text{et} \quad x-\frac{P'}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'm+Q'+Q)},$$

ou bien, puisque $Q'm+Q=Q''$,

$$x-\frac{P'}{Q'}<\frac{1}{Q'Q''} \quad \text{et} \quad x-\frac{P'}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'+Q'')}.$$

On obtient ainsi deux limites de la différence $x-\frac{P'}{Q'}$. La première limite revient à cette règle déjà connue (310), qu'*en prenant une réduite pour valeur approchée de* x, *l'erreur est moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la suivante*. Mais la seconde limite montre en outre que *l'erreur est plus grande que l'unité divisée par le produit du premier dénominateur multiplié par la somme de ce dénominateur et du suivant*.

314. *Chaque réduite approche de* x, *non-seulement plus qu'aucune des réduites précédentes, mais encore plus que toute autre*

fraction qui aurait un dénominateur moindre que celui de cette réduite.

Nous venons de reconnaître que chaque réduite approche plus de x que les réduites précédentes; mais aussi elle a l'inconvénient d'être exprimée en termes plus grands, et l'on sait d'ailleurs qu'elle n'est point simplifiable. Il est donc naturel de rechercher s'il existe une fraction conçue en termes plus simples qu'une réduite, et qui cependant ne soit pas moins approchée de x.

Reprenons les deux réduites $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$; et supposons qu'une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$, qu'on peut toujours regarder comme irréductible, approche plus de x que $\frac{P'}{Q'}$. Puisque x est entre ces deux réduites, mais plus près de la seconde que de la première, il faudrait que $\frac{\alpha}{\beta}$ fût aussi entre ces réduites. Donc on aurait, abstraction faite des signes des différences,

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{P}{Q}<\frac{P'}{Q'}-\frac{P}{Q},\quad \text{ou}\quad \frac{Q\alpha-P\beta}{Q\beta}<\frac{1}{QQ'}.$$

Mais le numérateur $Q\alpha-P\beta$ est un nombre au moins égal à 1 donc il faudrait qu'on eût le dénominateur $Q\beta>QQ'$, ou $\beta>Q'$. Ainsi une fraction, pour être plus approchée de x que la réduite $\frac{P'}{Q'}$, doit avoir un dénominateur plus grand (*).

Cette propriété imprime aux réduites un caractère qu'il importe de bien saisir. En général, quand on emploie des fractions dans les approximations, il ne faut pas croire qu'en prenant des dénominateurs plus grands on obtienne toujours un plus grand degré d'exactitude. Pour mieux me faire comprendre, soient les trois fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$. Si on les réduit au même dénominateur, elles deviennent $\frac{20}{28}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{24}{28}$; et par là on reconnaît qu'elles sont rangées

(*) Il y a plus : si on ne considère que des valeurs approchées qui soient toutes moindres, ou toutes plus grandes que x, on peut facilement prouver qu'une fraction, pour approcher plus de x qu'une réduite, mais dans le même sens, doit avoir un dénominateur plus grand que celui de la réduite suivante.

par ordre de grandeur. Or, il peut se faire qu'une quantité inconnue x tombe entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$, mais beaucoup plus près de $\frac{3}{4}$ que des deux autres; et alors il est évident qu'il sera impossible, avec des septièmes d'unité, d'obtenir pour x une approximation aussi grande que $\frac{3}{4}$. Cet exemple montre qu'en cherchant des valeurs approchées parmi les fractions qui ont un dénominateur donné, on peut quelquefois avoir un moindre degré de précision qu'avec des dénominateurs plus petits. Mais il est très-remarquable que cela ne doive jamais arriver quand les valeurs approchées seront choisies parmi les réduites qui se déduisent de la fraction continue égale à l'inconnue; et c'est sur cette propriété que je voulais fixer l'attention.

315. *Toute fraction continue périodique est égale à l'une des racines d'une équation du 2e degré à coefficiens rationnels.*

Soient a, b,... les premiers quotiens, qui forment la partie non périodique; et soient p, q,... les quotiens suivans, qui reviennent périodiquement. Posons

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{\cdot+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}},\qquad y=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{\vdots}{\cdot+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$$

Il est clair que dans ces deux expressions on pourra remplacer par y la suite $p+$ etc. : de sorte qu'on aura

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{\cdot+\cfrac{1}{y}}},\qquad y=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{\vdots}{\cdot+\cfrac{1}{y}}}.$$

En considérant ainsi ces deux suites comme terminées à y, et en leur appliquant les règles relatives à la composition des réduites, on arrivera à deux équations de cette forme

$$x=\frac{P'y+P}{Q'y+Q},\qquad y=\frac{R'y+R}{S'y+S}.$$

Or, si de la première on tire la valeur de y en x, et si on la substitue dans le deuxième, il est facile de voir que l'équation résultante sera du 2e degré en x. Donc, etc.

La proposition inverse est également vraie : c'est-à-dire que *toute racine irrationnelle d'une équation du 2ᵉ degré, dont les coefficiens sont rationnels, est égale à une fraction continue périodique*. Cette proposition peut se vérifier dans un grand nombre d'exemples, et j'en donnerai un dans le n° 318; mais pour la démonstration générale, je renverrai au *Traité de la résolution des équations numériques* par LAGRANGE, ou aux additions du même auteur à l'*Algèbre* d'EULER.

316. *Développer une quantité quelconque en fraction continue.*

Représentons cette quantité par x; la règle générale consiste à faire successivement

$$x=a+\frac{1}{x'},\quad x'=b+\frac{1}{x''},\quad x''=c+\frac{1}{x'''},\ \text{etc.}$$

a étant le plus grand nombre entier contenu dans x, b le plus grand nombre entier contenu dans x', et ainsi de suite. Quand on saura trouver ces nombres, il est clair qu'en remplaçant successivement x', x'',... par leurs valeurs, on aura le développement demandé,

$$x=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\text{etc.}}}$$

Lorsque x est une quantité incommensurable, la fraction continue devra se prolonger indéfiniment : car si elle se terminait, les réduites seraient en nombre limité et la dernière serait la valeur exacte de x; donc x ne serait pas incommensurable. Au contraire, lorsque x est commensurable, la fraction continue s'arrêtera toujours, ainsi qu'on va le voir tout-à-l'heure.

317. *Convertir une fraction ordinaire en fraction continue, et former ensuite les fractions convergentes.*

Soit une fraction ordinaire

$$x=\frac{M}{N}.$$

Divisons M par N : en nommant a le quotient et R le reste, on aura

$$\frac{M}{N}=a+\frac{R}{N}.$$

Divisons N par R : en nommant b le quotient et R' le reste, on aura

$$\frac{N}{R}=b+\frac{R'}{R}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{N}=\cfrac{1}{b+\cfrac{R'}{R}}.$$

Divisons encore R par R' : en nommant c le quotient et R'' le reste, on a pareillement

$$\frac{R}{R'}=c+\frac{R''}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R'}{R}=\cfrac{1}{c+\cfrac{R''}{R'}}.$$

En continuant ainsi ces opérations, qui sont les mêmes que si on cherchait le plus grand commun diviseur de M et de N, on arrivera nécessairement à un reste nul, puisque les restes successifs sont des nombres entiers décroissans. Supposons, pour fixer les idées, qu'on trouve, sans reste,

$$\frac{R'}{R''}=d, \quad \text{d'où} \quad \frac{R''}{R'}=\frac{1}{d}.$$

Alors il est facile de voir qu'on aura successivement

$$\frac{M}{N} \text{ ou } x=a+\frac{R}{N}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{R'}{R}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{R''}{R'}}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}.$$

Au moyen des quotiens $a, b, c, \ldots$ les réduites ou fractions convergentes se calculeront comme il a été expliqué n° 308.

Supposons, par exemple, que la fraction donnée soit

$$x=\frac{86400}{20929}.$$

Voici le tableau des calculs :

		4	7	1	3	1	16	1	1	15
Divisions...	86400	20929	2684	2141	543	512	31	16	15	1
	2684	2141	543	512	31	16	15	1	0	

Quotiens... 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15.

Réduites... $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}, \frac{86400}{20929}.$

La fraction donnée étant conçue en nombres assez considéra-

bles, on pourra, si on le juge convenable, la remplacer par une de ces réduites; et alors on sera assuré qu'aucune fraction plus simple ne pourra en approcher davantage. En prenant la réduite $\frac{161}{39}$, l'erreur serait $< \frac{1}{39 \times 655}$ ou $< \frac{1}{25545}$.

318. *Réduire en fraction continue la quantité irrationnelle* $\sqrt{a^2+1}$, *dans laquelle* a *est un nombre entier quelconque.*

Le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{a^2+1}$ est évidemment a. En conséquence on posera

$$\sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{x'}, \quad \text{d'où } x' = \frac{1}{\sqrt{a^2+1} - a}.$$

Pour extraire les entiers contenus dans x', on multiplie d'abord les deux termes de cette valeur par $a + \sqrt{a^2+1}$, et on lui donne cette forme plus simple

$$x' = a + \sqrt{a^2+1}.$$

Alors il est clair que $2a$ est la partie entière de x'; on fera donc

$$x = a + \sqrt{a^2+1} = 2a + \frac{1}{x''}, \quad \text{d'où } x'' = \frac{1}{\sqrt{a^2+1} - a}.$$

Cette valeur de x'' étant la même que celle de x', il s'ensuit que $\sqrt{a^2+1}$ sera exprimé par la fraction continue périodique

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \text{etc.}}}$$

En traitant de la même manière la racine carrée d'un nombre entier quelconque qui n'est pas un carré exact, on trouvera toujours une fraction périodique; mais il pourra se faire que la période se manifeste plus tard. Cette proposition rentre dans celle qui est énoncée à la fin du n° 315, et dont je n'ai point jugé à propos de rapporter la démonstration

319. *On propose d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre en fractions, dont chacune soit telle qu'aucune fraction plus simple ne puisse être plus approchée.*

D'après la propriété démontrée n° 314, cette question revient à développer en fraction continue le rapport de la circonférence au diamètre, et à calculer ensuite les diverses réduites..

Il n'existe point de méthode directe pour opérer ce développement : on y supplée en se servant de la valeur approchée, en décimales, du rapport dont il s'agit. La précision a été poussée jusqu'à 140 décimales, mais je ne ferai usage que des dix premières. En désignant ce rapport par π, on a

$$\pi = 3,1415926535\ldots$$

Si on ajoute une unité à la dernière décimale, la valeur exacte de π sera comprise entre les deux fractions

$$\frac{31415926535}{10000000000},\quad \frac{31415926536}{10000000000}.$$

En conséquence, on les réduira toutes deux en fraction continue; et en ne prenant que la partie commune aux deux développemens, on sera assuré qu'elle doit appartenir aussi à celui du rapport π. Pour ne point perdre de vue l'objet principal, j'admettrai ici cette assertion comme démontrée.

Si on effectue pour chaque fraction les divisions successives, comme au n° 317, on trouve ces deux séries de quotiens :

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, , 2, 13, 3, 1, 12, 3;
3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 45, 1, 1, 8.

Ne considérons donc que ceux qui sont communs à ces deux suites, à partir du premier sans interruption ; puis formons les réduites correspondantes : on aura ainsi les valeurs cherchées:

Quotiens...	3,	7,	15,	1,	292,	1,	1.
Réduites...	$\frac{3}{1}$,	$\frac{22}{7}$,	$\frac{333}{106}$,	$\frac{355}{113}$,	$\frac{103993}{33102}$,	$\frac{104348}{33215}$,	$\frac{208341}{66317}$.

La 1re réduite n'est autre chose que le quotient 3, auquel on donne l'unité pour dénominateur ; et la 2e est égale à $3+\frac{1}{7}$.

La 3e réduite $\frac{333}{106}$ est formée en multipliant les deux termes de la précédente par le 3e quotient 15 et en ajoutant respectivement

aux produits les termes de l'avant-précédente. Calcul analogue pour la 4e réduite et les suivantes (308).

Ces diverses fractions sont alternativement plus petites et plus grandes que la vraie valeur de π. Ainsi la fraction $\frac{22}{7}$ sera trop grande ; c'est le rapport trouvé par ARCHIMÈDE. D'après le n° 313, l'erreur qu'il comporte est entre $\frac{1}{7\times106}$ et $\frac{1}{7(7+106)}$, c'est-à-dire, entre $\frac{1}{742}$ et $\frac{1}{791}$.

La fraction $\frac{355}{113}$ est le rapport d'ADRIEN MÉTIUS. Il est encore plus grand que le rapport exact, mais il est beaucoup plus approché que celui d'ARCHIMÈDE : car il ne laisse qu'une erreur comprise entre $\frac{1}{113\times33102}$ et $\frac{1}{113\times(113+33102)}$, c'est-à-dire, entre $\frac{1}{3740526}$ et $\frac{1}{375329}$.

Le rapport $\frac{333}{106}$, placé entre celui d'Archimède et celui de Métius, paraît avoir été connu des Indiens ; il n'est guère plus simple que $\frac{355}{113}$, mais il est beaucoup moins approché : car l'erreur est entre $\frac{1}{106\times113}$ et $\frac{1}{106(106+113)}$, c'est-à-dire, entre [illegible] et $\frac{1}{23214}$.

Si on veut comparer ces rapports avec la valeur de π rapportée au commencement de ce n°, ce qu'il y a de mieux, c'est de les réduire en décimales. On trouve

$$\frac{22}{7}=3,142\ldots,\quad \frac{333}{106}=3,1415o\ldots,\quad \frac{355}{113}=3,1415929\ldots$$

On voit donc que le rapport d'ARCHIMÈDE est en erreur à la 3e décimale, celui de MÉTIUS à la 7e seulement, et le rapport intermédiaire à la 5e.

D'un autre côté, si on cherche les valeurs approchées de π par des polygones inscrits et circonscrits, en prenant le carré pour point de départ, on reconnaîtra qu'il faut s'élever aux polygones de 128 côtés pour avoir deux décimales exactes, à ceux de 2048 côtés pour en avoir quatre, et à ceux de 8192 pour en avoir six. Par là on voit de quels polygones dépendent les trois rapports ci-dessus. Je n'ai rien dit des autres parce qu'ils sont beaucoup plus compliqués, et qu'ils n'ont d'ailleurs aucune célébrité.

320. Je me suis appuyé, dans le n° précédent, sur une assertion qui a besoin de démonstration, et je proposerai la suivante :

Supposons que x soit une quantité comprise entre u et v, et qu'en développant u, v, x, en fractions continues, on ait

$$u=a+\frac{1}{u'},\quad u'=b+\frac{1}{u''},\quad u''=c+\frac{1}{u'''},\ \text{etc.},$$

$$v=a+\frac{1}{v'},\quad v'=b+\frac{1}{v''},\quad v''=c+\frac{1}{v'''},\ \text{etc.},$$

$$x=a'+\frac{1}{x'},\quad x'=b'+\frac{1}{x''},\quad x'=c'+\frac{1}{x'''},\ \text{etc.}$$

Puisque x est entre u et v, et que la même partie entière a se trouve dans u et v, cette partie entière doit aussi se trouver dans x; donc $a'=a$. De plus il est clair que $\frac{1}{x}$ doit être entre $\frac{1}{u'}$ et $\frac{1}{v'}$, et que par suite x' est entre u' et v' : ainsi on peut raisonner sur u', v', x', comme sur u, v, x, et on conclura que $b'=b$. Ensuite on conclura encore que $c'=c$. On poursuivra de même; et tant qu'il y aura des termes communs aux deux premières fractions continues, on reconnaîtra que ces termes doivent également se trouver dans la troisième : c'est ce qu'il fallait démontrer.

321. Comme dernière application des fractions continues, je donnerai le procédé qu'on en déduit *pour résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée*

$$[1]\qquad ax+by=c.$$

Les nombres a, b, c sont entiers, et les deux premiers sont supposés n'avoir acucun facteur commun. Concevons qu'on ait réduit le rapport $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et qu'on ait calculé toutes les réduites : la dernière réduite ne sera autre que ce rapport même. Retranchons-en l'avant-dernière que je représenterai par $\frac{a'}{b'}$. Le numérateur de la différence sera $ab'-ba'$, et, par la propriété du n° 310, on a

$$[2]\qquad ab'-ba'=\pm 1.$$

Multipliée par $\pm c$, cette égalité devient

$$a\times\pm b'c+b\times\mp a'c=c;$$

donc on satisfait à l'équation [1] en prenant $x=\pm b'c$, $y=\mp a'c$. Cette solution étant connue, on sait (137) que toutes les autres sont données par les formules

$$x=\pm b'c-bt,\quad y=\mp a'c+at,$$

t désignant un nombre entier quelconque. On prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon qu'il y aura $+$ ou $-$ dans l'égalité [2]; ou bien encore, ce qui est la même chose, selon que la réduite $\frac{a}{b}$ sera de rang pair ou de rang impair.

Exemple. Soit l'équation

[3] $$261x-82y=117.$$

Si on réduit $\frac{261}{82}$ en fraction continue, on trouve

Quotiens....	3,	5,	2,	7
Réduites....	$\frac{3}{1}$,	$\frac{16}{5}$,	$\frac{35}{11}$,	$\frac{261}{82}$.

Si on prend le numérateur de la différence $\frac{261}{82}-\frac{35}{11}$, et si on fait attention que $\frac{261}{82}$ est une réduite de rang pair, on aura

$$261\times11-82\times35=+1.$$

Donc, en multipliant par 117,

$$261\times11\times117-82\times35\times117=117;$$

donc on satisfait à l'équation [3] en faisant $x=11\times117=1287$ et $y=35\times117=4095$; donc enfin les valeurs générales de x et de y sont

$$x=1287+82t,\quad y=4095+261t.$$

Si on fait la division de 1287 par 82 et celle de 4095 par 261, on trouve $1287=82\times15+57$ et $4095=261\times15+180$. Alors, en remarquant que t est un nombre entier quelconque, on pourra écrire plus simplement,

$$x=57+82t,\quad y=180+261t.$$

CHAPITRE XIII.

Théorie des Logarithmes. Questions sur les intérêts composés.

Définition des Logarithmes. Leurs propriétés. Utilité des tables.

322. Soient deux progressions, l'une géométrique, commençant par 1, et l'autre arithmétique, commençant par 0 : telles que celles-ci, par exemple,

$$\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 12 \,.\, 15 \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, \text{etc.}$$

Si on les compare entre elles, on aperçoit facilement qu'en multipliant l'un par l'autre deux termes quelconques de la première, et en ajoutant ensemble les termes correspondans de la seconde, on trouve encore deux termes correspondans de ces mêmes progressions. Ainsi, $4\times16=64$, $6+12=18$; et l'on voit qu'en effet 18 répond à 64. De cette manière, une multiplication se trouve effectuée au moyen d'une addition.

Cette remarque si simple est sans doute fort ancienne; mais c'est le génie de NÉPER, baron d'Écosse, qui a fait éclore de ce germe la théorie des logarithmes, une des plus utiles découvertes modernes. Elle fut publiée en 1614, sous le titre de *Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio*. Je vais l'exposer ici avec tous les développemens convenables, en me tenant le plus près possible des idées de l'inventeur, sans toutefois employer la considération du mouvement dont il faisait usage.

323. Le savant Ecossais commence par remarquer que les nombres, dans toutes les nuances de grandeur, peuvent être regardés comme étant les termes d'une progression géométrique; et c'est là

un premier point qu'il importe de bien comprendre. Considérons la progression

$$\div 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \text{etc.}$$

Si on suppose que α soit une très-petite quantité, les termes croîtront par degrés très-rapprochés; et comme on peut diminuer α indéfiniment, on doit regarder à la limite les termes comme variant d'une manière continue. A la vérité, on ne peut point écrire une progression dans laquelle cette continuité existe; mais l'esprit la conçoit, et cela suffit. En conséquence, on pourra considérer tous les nombres plus grands que 1 comme compris dans la progression géométrique. Je laisse de côté ceux qui sont moindres, pour y revenir tout-à-l'heure.

En même temps, NÉPER prend une progression arithmétique

$$\div 0 . \beta . 2\beta . 3\beta . \text{etc.}$$

dont les termes croissent, à partir de o, par différences aussi faibles qu'on voudra; et alors, envisageant les termes de cette suite dans leur liaison avec ceux de la première, il les désigne sous le nom de *logarithmes*.

Ainsi, *les logarithmes des nombres sont les termes d'une progression arithmétique qui commence à zéro, correspondans à ces nombres considérés comme faisant partie d'une progression géométrique qui commence à l'unité.*

324. Cette définition semble ne point attribuer de logarithmes aux nombres plus petits que 1; et si au lieu de prendre la progression géométrique croissante, on la supposait décroissante, ce seraient les nombres plus grands que 1 qui n'auraient point de logarithmes. Pour fixer les idées, je raisonnerai toujours dans la première hypothèse; et alors, pour que la progression géométrique embrasse aussi les nombres moindres que 1, il suffit de la concevoir prolongée au-dessous de l'unité, ce qui revient à diviser l'unité par les puissances successives de la raison $1+\alpha$.

Mais quels seront les logarithmes de ces nombres, et comment continuer la progression arithmétique au-dessous de zéro? On peut bien former les termes de cette progression dans un ordre rétrograde, en retranchant la raison de chacun d'eux; mais

quand on est arrivé à zéro, la soustraction n'est plus possible, et il semble que la progression doive s'arrêter à ce terme. Cette difficulté disparaît sur-le-champ par l'emploi des quantités négatives, qui s'introduiraient ici naturellement, si elles n'étaient déjà connues : c'est-à-dire qu'on mettra le signe — devant les multiples de la raison qui devraient être retranchés de zéro, si cela était possible. L'on engendre ainsi des *termes négatifs*, au moyen desquels on fait descendre la progression arithmétique au-dessous de zéro, et qui sont les logarithmes des nombres moindres que l'unité.

En conséquence, si on écrit à la gauche des deux suites leurs termes descendans, on pourra les présenter ainsi :

$$[1] \div\!\div \cdots \frac{1}{(1+\alpha)^3} : \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \cdots$$

$$[2] \div \cdots -3\beta \;.\; -2\beta \;.\; -\beta \;.\; 0 \;.\; \beta \;.\; 2\beta \;.\; 3\beta \;\cdots$$

et alors la seconde donnera les logarithmes de tous les termes de la première. Il ne faut pas perdre de vue qu'il entre dans la définition des logarithmes comme condition essentielle, que les termes 1 et 0 doivent toujours se correspondre, ce qui revient à dire que $\log 1 = 0$.

Dans les deux suites, la partie ascendante augmente jusqu'à l'infini; mais, dans la première, la partie descendante tend indéfiniment vers zéro, tandis que, dans la seconde, elle croît jusqu'à l'infini négatif. Donc $\log \infty = \infty$, et $\log 0 = -\infty$.

Ces deux suites mettent encore en évidence cette remarque, que si un nombre quelconque n est placé à une certaine distance de l'unité dans la partie ascendante de la première, le nombre $\frac{1}{n}$ doit occuper le même rang dans la partie descendante. Donc ce dernier nombre a le même logarithme, mais pris négativement; donc $\log \frac{1}{n} = -\log n$.

325. Passons aux propriétés des logarithmes. La propriété fondamentale est celle qui a été remarquée n° 322, et que je vais démontrer généralement. Elle s'énonce ainsi : *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

1° Supposons que a et b soient deux nombres appartenant à la partie ascendante de la progression [1]. Par exemple, prenons

$$a=(1+\alpha)^2,\quad b=(1+\alpha)^5:$$

on aura

$$ab=(1+\alpha)^{5+2}.$$

Dans la progression [2], les logarithmes de a et b sont 2β et 5β; donc

$$\log a+\log b=(5+2)\beta.$$

Or $(5+2)\beta$ est le logarithme de $(1+\alpha)^{5+2}$; donc

$$\log ab=\log a+\log b.$$

2° Supposons a dans la partie descendante, et b dans la partie ascendante, mais plus loin de l'unité que a. Soient

$$a=\frac{1}{(1+\alpha)^2},\quad b=(1+\alpha)^5:$$

on aura

$$ab=(1+\alpha)^{5-2}.$$

Mais $\log a=-2\beta$, $\log b=5\beta$; donc $\log a+\log b=(5-2)\beta$: et comme $(5-2)\beta$ est évidemment le log. de $(1+\alpha)^{5-2}$, on conclut encore $\log ab=\log a+\log b$.

3° Supposons a dans la partie descendante, et b dans la partie ascendante, mais plus près de 1. Soient

$$a=\frac{1}{(1+\alpha)^5},\quad b=(1+\alpha)^2:$$

on aura

$$ab=\frac{1}{(1+\alpha)^{5-2}}.$$

Mais $\log a=-5\beta$, $\log b=2\beta$; donc $\log a+\log b=-(5-2)\beta$, ce qui est le log. de $\frac{1}{(1+\alpha)^{5-2}}$. Donc $\log ab=\log a+\log b$.

4° Enfin, prenons les deux nombres a et b dans la partie descendante, et soient

$$a=\frac{1}{(1+\alpha)^2},\quad b=\frac{1}{(1+\alpha)^5}.$$

on aura

$$ab = \frac{1}{(1+\alpha)^{2+5}}.$$

Ici $\log a = -2\beta$, $\log b = -5\beta$. Par suite $\log a + \log. b = -(2+5)\beta$, ce qui est le logarithme du produit ci-dessus; donc encore $\log ab = \log a + \log b$.

Cette égalité étant vraie dans tous les cas, changeons-y b en bc: elle devient

$$\log abc = \log a + \log bc = \log a + \log b + \log c.$$

On peut continuer ainsi, quel que soit le nombre des facteurs; donc *le logarithme d'un produit* etc,

326. Posons $\frac{a}{b} = q$, on aura $bq = a$; donc $\log b + \log q = \log a$, d'où

$$\log q = \log a - \log b.$$

Donc *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins celui du diviseur.*

327. Si un produit est composé de n facteurs égaux à a, on doit avoir

$$\log a^n = \log a + \log a + \ldots = n \log a.$$

Pour étendre cette formule aux exposans fractionnaires, on posera $x = a^{\frac{n}{m}}$, d'où $x^m = a^n$ Par suite $\log x^m = \log a^n$; donc, en vertu de la formule ci-dessus, $m \log x = n \log a$; et de là on tire $\log x = \frac{n}{m} \log a$.

Si a est affecté d'un exposant négatif $-n$, on remarquera que $a^{-n} \times a^n = 1$; donc (325) $\log a^{-n} + \log a^n = \log 1$. Or $\log 1 = 0$; donc $\log a^{-n} = -\log a^n = -n \log a$.

Donc *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance.*

328. Soit $r = \sqrt[n]{a}$, on a $r^n = a$; donc, par la règle précédente, $n \log r = \log a$, d'où

$$\log r = \log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$$

Donc *le logarithme de la racine d'un nombre s'obtient en divisant le logarithme du nombre par l'indice de la racine.*

329. Ces propriétés montrent clairement que si l'on avait des tables dans lesquelles on pût trouver tous les nombres, et à côté leurs logarithmes, il serait facile de ramener la multiplication à l'addition, la division à la soustraction, la formation des puissances à la multiplication, et l'extraction des racines à la division. Par exemple, qu'on ait à calculer $\sqrt[7]{837}$: on prendrait dans les tables log 837, on le diviserait par 7, et on aurait ainsi le log. de $\sqrt[7]{837}$; donc, en cherchant dans les tables le nombre correspondant, on aurait la racine demandée.

Table des Logarithmes. Des différens Systèmes considérés d'après leurs MODULES. *Système Népérien.*

330. On comprend bien que les tables ne peuvent pas renfermer les logarithmes correspondant à toutes les nuances de grandeur que peuvent avoir les nombres : car ces nuances sont infinies, même entre deux limites très-rapprochées. Elles ne peuvent pas non plus contenir les logarithmes de tous les nombres entiers : car la suite de ces nombres est illimitée. Mais on y mettra ceux des nombres entiers depuis 1 jusqu'à une certaine limite, jusqu'à 100000, par exemple; et, comme toutes les opérations numériques se ramènent à des calculs de nombres entiers, ces tables seront encore d'une immense utilité. Je vais exposer leur construction, en suivant toujours les idées de NÉPER.

D'après nos explications, pour que la progression géométrique embrasse les nombres plus grands que 1, dans tous les états de grandeur, il faut la concevoir comme formée de termes qui croissent d'une manière insensible à partir de 1; et, pour avoir leurs logarithmes, il faut aussi concevoir la progression arithmétique comme composée de termes qui varient par degrés insensibles, à partir de 0.

A leur origine, les accroissemens simultanés que peuvent recevoir les termes 1 et 0, sont d'une petitesse inappréciable; mais, quelque petits qu'ils soient, on conçoit qu'on peut établir entre

eux un certain rapport, lequel est entièrement arbitraire. Ainsi, lorsque ces accroissemens commencent à naître, on pourra supposer que celui du logarithme o est double, triple, etc., de celui du nombre 1. Ce rapport est appelé, d'une manière générale, le *Module* des logarithmes, et je le désignerai par M.

Cela posé, donnons au terme 1 de la progression géométrique un accroissement très-petit ω, mais cependant appréciable en nombres. L'accroissement correspondant du terme zéro de la progression arithmétique sera à fort peu près égal à $M\omega$; et l'on pourra prendre, pour les deux progressions, celles-ci :

$$[1] \quad \div\!\div\ 1 : 1+\omega : (1+\omega)^2 : (1+\omega)^3 : (1+\omega)^4 : \text{etc.}$$
$$[2] \quad \div\ 0\ .\ M\omega\ :\ 2M\omega\ .\ 3M\omega\ .\ 4M\omega\ .\ \text{etc.}$$

Nous avons dit que le rapport ou module M peut être pris à volonté : par conséquent, selon les valeurs particulières qu'on lui attribuera, on aura différens *systèmes* de logarithmes.

331. Les logarithmes que Néper a publiés étaient tirés des progressions

$$[3] \quad \div\!\div\ 1 : 1+\omega : (1+\omega)^2 : (1+\omega)^3 : \text{etc.}$$
$$[4] \quad \div\ 0\ .\ \omega\ .\ 2\omega\ .\ 3\omega\ .\ \text{etc.}$$

Cela revient à supposer le module $M=1$, et cette hypothèse se présentait d'elle-même, comme moyen d'éviter les multiplications par M.

Les termes de ces deux suites varient très-peu rapidement, de sorte qu'en les prolongeant l'une et l'autre aussi loin qu'on voudra, on est sûr de trouver, dans la première, des termes égaux aux nombres entiers 2, 3, etc., ou si approchans que la différence sera négligeable. Les termes correspondans de la seconde pourront donc être pris pour les logarithmes de ces nombres, et ce sont eux qu'on devrait écrire dans les tables.

Par-là, on voit que ces logarithmes ne sont pas exactement ceux des nombres à côté desquels ils seraient inscrits. Mais il existe d'ailleurs une autre cause d'inexactitude, laquelle résulte de ce que ω ne représente qu'approximativement l'accroissement que doit prendre le logarithme o, lorsque ω est celui du nombre 1. Tou-

tefois, cette supposition approchera d'autant plus de la vérité que ω sera une quantité plus petite.

332. Les logarithmes dont je viens de parler, qui répondent au module M=1, se nomment *Népériens*. On les appelle aussi *hyperboliques*, pour une raison qui ne peut point trouver place ici.

La comparaison des suites [2] et [4] montre sur-le-champ que, *pour transporter les logarithmes Népériens dans un système quelconque, il suffirait de les multiplier par le module de ce système.*

333. Je placerai ici deux valeurs assez souvent employées. L'une est le logarithme népérien de 10; et l'autre, qu'on représente ordinairement par e, est le nombre dont le logarithme népérien est 1. Ces valeurs sont :

$$\text{Log. nép. de } 10 = 2,\ 302\ 585\ 092\ \ldots,$$
$$e = 2,\ 718\ 281\ 828\ \ldots.$$

D'après ce qui a été expliqué n° 331, il n'y a aucune difficulté à concevoir comment elles ont pu être calculées.

334. On a fréquemment à multiplier et à diviser par 10, 100, 1000, etc.; par conséquent, en construisant des tables dans lesquelles 10 aurait 1 pour logarithme, ces opérations se réduiraient à une addition ou à une soustraction de quelques unités entières. Cette remarque n'avait point échappé à Néper; mais la mort l'empêcha de construire ces nouvelles tables, et ce fut Briggs, professeur d'Oxford, à qui il en avait recommandé instamment l'exécution, qui publia les premières en 1624, sous le titre de *Arithmetica logarithmica*, avec une introduction très-développée. Ces logarithmes sont ceux dont on fait toujours usage dans les calculs numériques : on les appelle indifféremment *logarithmes de Briggs*, ou *logarithmes vulgaires*.

D'après la remarque du n° 332, on voit que les logarithmes népériens une fois calculés, on les fera passer dans le nouveau système, en les multipliant tous par un module convenable M. Ce module est facile à trouver : car, puisque dans ce système le logarithme de 10 est 1, on doit avoir

$$\text{M} \times \text{log. nép. de } 10 = 1;$$

donc, en divisant 1 par le log. nép. de 10, rapporté plus haut, on connaîtra le module M; savoir :

$$M = 0,\ 434\ 294\ 481 \ldots$$

Des différens systèmes de logarithmes, considérés d'après leurs bases. Système de Briggs.

335. Si l'on suppose toujours qu'on s'élève ou qu'on s'abaisse à partir de 1, en suivant une progression dont les termes varient géométriquement d'une manière continue, on peut lui adjoindre une infinité de progressions dont les termes croissent, à partir de zéro, arithmétiquement et aussi d'une manière continue. C'est pour cette raison qu'il peut exister une infinité de systèmes de logarithmes; mais toute indétermination disparaît dès qu'on fixe le nombre auquel correspond un certain logarithme, qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement. Par exemple, on peut donner le nombre auquel on attribue l'unité pour logarithme, et c'est ce nombre qu'on nomme la *base* du système.

336. Sous ce point de vue, le système qui se présente tout d'abord comme le plus simple, est celui dont la base est 10, et je vais m'en occuper spécialement.

Dans ce système, les logarithmes de 10, 100, 1000, etc., sont 1, 2, 3, etc., et en général $\log 10^k = k$; de sorte que ces logarithmes, qui doivent revenir si souvent dans les calculs, sont toujours connus sans aucune peine.

De 10 à 100, les nombres ont leurs logarithmes compris entre 1 et 2; de 100 à 1000, entre 2 et 3, etc. Or, la partie entière d'un logarithme se nomme *caractéristique :* on peut donc conclure que, dans le système dont la base est 10, *la caractéristique du logarithme d'un nombre a autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans le nombre.*

337. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise un nombre par 10, 100, 1000, etc., son logarithme doit augmenter ou diminuer du logarithme de 10, 100, 1000, etc., c'est-à-dire de 1, 2, 3, etc. Donc, tant que le nombre restera plus grand que 1, la partie décimale du logarithme sera toujours la même, et il n'y aura que la caractéristique qui changera.

Ainsi, en prenant pour point de départ le nombre 658, on aurait

$$\log 658 = 2,8182259,$$
$$\log 65,8 = 1,8182259,$$
$$\log 6,58 = 0,8182259.$$

Si on contiuue la division par 10, il vient

$$\log 0,658 = 0,8182259 - 1 = -0,1817741,$$
$$\log 0,0658 = 0,8182259 - 2 = -1,1817741.$$

etc.

Mais on a trouvé plus commode de ne point effectuer les soustractions, et de donner à la partie décimale une caractéristique négative qu'on écrit ainsi : $\bar{1}$, $\bar{2}$, ... Par exemple, $\bar{2},8182259$ ne sera qu'une abréviation de $-2+0,8182259$.

En admettant ainsi des logarithmes dont la caractéristique seule est négative, il sera permis de dire qu'un nombre décimal étant donné, on peut y changer à volonté la place de la virgule, sans que la partie décimale de son logarithme soit altérée; et en même temps on voit qu'il sera toujours facile de rétablir la caratéristique à la simple inspection du nombre donné.

338. Expliquons maintenant comment on peut calculer les logarithmes des différens nombres, depuis 1 jusqu'à 100000, par exemple. Dans le système que nous considérons, 1 et 10 sont deux termes de la progression géométrique auxquels répondent les termes 0 et 1 de la progression arithmétique. Pour avoir des termes qui varient par degrés très-rapprochés, insérons un très-grand nombre de moyens géométriques entre 1 et 10, tout autant de moyens arithmétiques entre 0 et 1, et prolongeons les deux progressions jusqu'à 100000. Dans la première, on trouvera des termes qui différeront si peu des nombres entiers 2, 3, 4, etc., qu'on pourra négliger la différence, et prendre les termes correspondans de la seconde pour les logarithmes de ces nombres.

Soit un nombre n qui tombe entre deux termes de la première, auxquels correspondent l et l' dans la seconde. On peut concevoir par la pensée qu'en augmentant de plus en plus le nombre des moyens insérés, on s'élève dans les deux progressions par toutes les nuances possibles de grandeur. Il est clair qu'alors, dans la seconde, le terme correspondant à n serait entre l et l', et par con-

séquent, en prenant log $n=l$, l'erreur sera $< l'-l$. Par exemple, en admettant que les termes de la progression arithmétique croissent de millionième en millionième, elle fournirait les logarithmes avec six décimales exactes.

Pour réaliser cette supposition, il faut que 10 ait 1000000 termes avant lui dans la progression géométrique; et par conséquent, pour avoir la raison de cette progression, il faudrait extraire la racine 1000000° de 10. Comme on a $1000000=2^6.5^6$, cette opération peut se faire par des racines carrées et par des racines cinquièmes; mais ces dernières exigeant des calculs assez laborieux, Néper a pris soin d'indiquer lui-même la manière de trouver les logarithmes des nombres en n'employant que des racines carrées.

Nommons n le nombre dont on veut le logarithme, et que je suppose compris entre 1 et 10. On calculera le moyen géométrique entre 1 et 10, ce qui se fait par une simple racine carrée, et aussi le moyen arithmétique entre 0 et 1. Désignons le premier par A et le second par a. Supposons que n tombe entre 1 et A: on cherchera le moyen géométrique B entre 1 et A, et le moyen arithmétique b entre 1 et a. Supposons que n tombe entre A et B: on cherchera encore le moyen géométrique entre A et B, et aussi le moyen arithmétique entre a et b. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait resserré n entre deux moyens géométriques auxquels correspondent deux moyens arithmétiques dont les six premières décimales soient les mêmes : alors, en rejetant les décimales ultérieures, on sera sûr que l'un de ces moyens est le logarithme de n avec l'approximation demandée. Pour atteindre la plus grande approximation possible avec six décimales, on aura soin de calculer la 7° décimale; et, dans le cas où elle serait égale à 5 ou $>$ 5 on ajoutera 1 à la 6°. De cette manière l'erreur, en plus ou en moins, sera toujours au-dessous d'un demi-millionième.

339. Les nombres premiers sont les seuls dont on ait besoin de calculer les logarithmes par cette voie : car, d'après ce qui a été démontré (325), les logarithmes des autres nombres s'obtiendront en ajoutant entre eux les logarithmes des facteurs premiers dont ces nombres sont composés.

Ces additions pourront élever l'erreur à plus d'un demi-millionième mais il est facile de fixer un *maximum* qu'elle ne dépas-

sera jamais. Observons que dans notre hypothèse les tables doivent s'arrêter à 100000, que le plus petit nombre premier est 2, et que $2^{17} = 131072$. Donc un nombre < 100000 ne renferme pas plus de 17 facteurs ; et par conséquent, l'erreur de chaque logarithme étant moindre qu'un demi-millionième, la somme des erreurs, même quand elles seraient toutes dans le même sens, sera moindre que 17 demi-millionièmes.

Toutefois on conçoit qu'elle peut approcher assez près de cette limite ; et, pour obvier à cet inconvénient, on calculera les logarithmes des nombres premiers avec 8 décimales. Alors, en les ajoutant pour avoir ceux des nombres composés, l'erreur ne surpassera point 2 unités du 7ᵉ ordre, et par conséquent elle ne sera point d'une unité sur la 6ᵉ décimale (*).

340. Quand on détermine les systèmes de logarithmes par leurs bases, le passage d'un système à un autre est toujours facile. En désignant par a une quantité aussi petite qu'on voudra, tous les nombres se tireront de la progression géométrique

$$\div\!\div\ 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \text{etc.}$$

Supposons que, β et γ étant aussi des quantités de tel degré de petitesse qu'on voudra, les logarithmes des deux systèmes que l'on compare soient pris respectivement dans les deux progressions arithmétiques

$$\div\ 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \,.\, \text{etc.}$$
$$\div\ 0 \,.\, \gamma \,.\, 2\gamma \,.\, 3\gamma \,.\, \text{etc.}$$

On voit sur-le-champ que les logarithmes d'un même nombre, dans le second système et dans le premier, ont entre eux un rapport constant : de sorte qu'en appelant x' et x ces deux logarithmes, et K ce rapport constant, on aura

$$x' = Kx.$$

(*) On ne peut point affirmer qu'elle sera moindre qu'un demi-millionième. Par exemple, supposons qu'après l'addition les huit décimales soient 0,47232149. La partie négligée pouvant s'élever presqu'à 2 unités du 7ᵉ ordre, l'erreur commise, en prenant les six premiers chiffres 0,472321, atteindrait presque 7 unités du 7ᵉ ordre ; mais comme on l'ignore, on n'est point autorisé à augmenter d'une unité le 6ᵉ chiffre.

Quant au rapport K, il suffit, pour l'obtenir, que les logarithmes d'un seul nombre soient connus dans les deux systèmes. Or, dans le premier, le logarithme de la seconde base est censé connu, et, dans le second, il est égal à 1; donc, en appelant a et a' les deux bases, et désignant par $\log a'$ le logarithme de a' dans le premier système, on aura

$$1 = K \log a' \quad \text{d'où} \quad K = \frac{1}{\log a'}.$$

Des logarithmes considérés comme exposans.

341. Reprenons n° 324 les deux progressions

$$\div\div \ldots \frac{1}{(1+\alpha)^3} : \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \ldots,$$

$$\div \ldots -3\beta \,.\, -2\beta \,.\, -\beta \,.\, 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \ldots,$$

dans lesquelles α et β sont des quantités aussi petites qu'on voudra, de telle sorte qu'on puisse regarder leurs termes comme variant d'une manière continue. La seconde suite renfermera un multiple de β égal à 1 : soit $\mu\beta$ ce multiple, et soit a le terme correspondant de la première suite; on devra avoir à la fois

$$\mu\beta = 1 \quad , \quad (1+\alpha)^{\mu} = a.$$

De là on tire

$$= \beta \frac{1}{\mu}, \quad 1+\alpha = a^{\frac{1}{\mu}} = a^{\beta}.$$

Par conséquent, en faisant usage des exposans négatifs, les deux progressions peuvent s'écrire ainsi

$$\div\div \ldots a^{-3\beta} : a^{-2\beta} : a^{-\beta} : 1 : a^{\beta} : a^{2\beta} : a^{3\beta} \ldots$$

$$\div \ldots -3\beta : -2\beta \,.\, -\beta \,.\, 0 \,.\, \beta \,.\, 2\beta \,.\, 3\beta \ldots;$$

et alors on voit que si on appelle x un terme quelconque de la seconde et y le terme correspondant de la première, on doit toujours avoir la relation $y = a^x$.

Donc on peut encore définir *les logarithmes des nombres comme étant les exposans des puissances auxquelles il faut éle-*

ver une quantité constante, qu'on appelle BASE, *pour en déduire tous ces nombres.*

Quand on adopte cette définition, on sous-entend toujours que la base doit être une quantité réelle et positive. Il est d'ailleurs facile de prouver qu'on peut lui donner telle grandeur qu'on voudra, autre que l'unité.

342. Cela revient à démontrer que si, dans l'équation *exponentielle*

[1] $$y = a^x,$$

on donne à l'exposant x toutes les valeurs possibles, tant négatives que positives, les valeurs correspondantes de y comprendront toutes les nuances de grandeur entre zéro et l'infini.

En premier lieu, soit $a > 1$. Si on donne à x des valeurs positives croissantes à partir de zéro, telles que $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ... il vient

$$y = a^0,\quad a^{\frac{1}{10}},\quad a^{\frac{2}{10}},\quad a^{\frac{3}{10}},\quad \text{etc.}$$

ou en faisant $\sqrt[10]{a} = a'$,

$$y = 1,\quad a',\quad a'^2,\quad a'^3,\quad \text{etc.}$$

a' est ici une quantité plus grande que 1, et par conséquent cette suite est croissante jusqu'à l'infini. De plus, il est clair qu'en faisant augmenter x par différences plus petites que $\frac{1}{10}$, on peut rapprocher autant qu'on voudra les valeurs de y.

Posons $x = -z$, on aura

$$y = a^{-z} = \frac{1}{a}^z.$$

Or, d'après ce qui vient d'être dit, si on fait passer z par toutes les valeurs positives à partir de zéro, a^z croîtra d'une manière continue depuis 1 jusqu'à l'infini; donc $\frac{1}{a^z}$ décroîtra depuis 1 jusqu'à zéro. De là on conclut que les valeurs négatives de x, entre zéro et l'infini, font prendre à y toutes les grandeurs descendantes depuis 1 jusqu'à zéro.

En second lieu, soit $a < 1$. Faisons $a = \frac{1}{a'}$, a' sera > 1, et on aura

$$y = \frac{1}{a'^x}.$$

Ici a' est >1; donc, selon qu'on fera croître x positivement ou négativement, le dénominateur a'^x augmentera à partir de 1 jusqu'à l'infini ou diminuera à partir de 1 jusqu'à zéro; et par suite y devra décroître depuis 1 jusqu'à zéro ou croître depuis 1 jusqu'à l'infini.

Concluons donc que tout nombre, autre que l'unité, peut être pris pour base d'un système de logarithmes.

La discussion précédente fait voir en outre :

1° Que, dans tous les systèmes, le logarithme de l'unité est égal à zéro, et celui de la base égal à l'unité;

2° Que, dans les systèmes dont la base est >1, on a $\log \infty = \infty$, et $\log 0 = -\infty$;

3° Que, dans ceux dont la base est <1, on a, au contraire, $\log \infty = -\infty$ et $\log 0 = \infty$.

343. Par la nouvelle définition (341), les propriétés des logarithmes se tirent immédiatement de celles des exposans. En effet, soient y, y', y'',... des nombres dont les logarithmes sont x, x', x'',...: par cette définition, on doit avoir

$$y = a^x,\quad y' = a^{x'},\quad y'' = a^{x''},\ldots;$$

donc, par les règles relatives aux exposans, il viendra

$$yy'y''\ldots = a^x a^{x'} a^{x''}\ldots = a^{x+x'+x''\ldots},$$
$$\frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'},$$
$$y^n = (a^x)^n = a^{nx},$$
$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}.$$

Mais, d'après la définition, les exposans de a, dans les derniers membres, sont les logarithmes des quantités qui sont dans les premiers; on retrouve donc ainsi les propriétés connues.

344. Les logarithmes étant toujours considérés comme des exposans, proposons-nous de calculer le logarithme d'un nombre donné b. Ce problème, sur lequel repose la construction des tables, revient à résoudre l'équation

$$a^x = b.$$

L'inconnue est en exposant, et les méthodes expliquées jusqu'ici ne sont point applicables à ce cas. Voici celle qu'il faut suivre.

Supposons les nombres a et b tous deux plus grands que 1. En donnant à x successivement les valeurs 0, 1, 2, etc., on arrivera à deux puissances a^n et a^{n+1}, entre lesquelles b sera compris, et alors on saura que x est entre n et $n+1$. En conséquence, on posera

$$x = n + \frac{1}{x'}.$$

Par suite, l'équation $a^x = b$ devient

$$a^{n+\frac{1}{x'}} = b \quad \text{d'où} \quad a^{\frac{1}{x'}} = \frac{b}{a^n}.$$

Puisque b est $> a^n$ et $< a^{n+1}$, $\frac{b}{a^n}$ doit être > 1 et $< a$. Faisons, pour abréger, $\frac{b}{a^n} = c$, et élevons la dernière égalité à la puissance x', elle devient

$$c^{x'} = a.$$

En formant les puissances c^1, c^2, c^3,... on reconnaîtra que a est compris entre deux puissances consécutives $a^{n'}$ et $a^{n'+1}$, et par suite que x' est entre n' et $n'+1$. On posera donc

$$x' = n' + \frac{1}{x''};$$

il viendra

$$c^{n'+\frac{1}{x''}} = a, \quad \text{d'où} \quad c^{\frac{1}{x''}} = \frac{a}{c^{n'}};$$

puis, en élevant à la puissance x'' et faisant $\frac{a}{c^n} = d$,

$$d^{x''} = c.$$

En opérant semblablement sur cette équation, on trouvera entre quels nombre entiers, n'' et $n''+1$, doit être x''. On fera encore $x'' = n'' + \frac{1}{x'''}$; et on continuera le même procédé aussi loin qu'il sera convenable.

Rapprochons présentement les relations trouvées ci-dessus,

$$x=n+\frac{1}{x'},\ x'=n'+\frac{1}{x''},\ x''=n''+\frac{1}{x'''},\ \ldots;$$

et on pourra exprimer x par cette fraction continue

$$x=n+\cfrac{1}{n'+\cfrac{1}{n''+\text{etc.}}}$$

Par la théorie de cette sorte de fractions, on sait que plus on prendra de termes, plus on approchera de la valeur de x, et que même on pourra rendre l'erreur aussi petite qu'on voudra.

345. Lorsqu'on prend 10 pour base, on a évidemment $10^1=10$, $10^2=100$, etc.; donc les logarithmes des nombres 1, 10, 100, etc., sont 0, 1, 2, etc., et en général $\log 10^k=k$. Ici viennent naturellement se reproduire les remarques déjà faites sur la caractéristique nos 336 et 337, et auxquelles je renvoie.

Pour avoir les logarithmes des autres nombres, on devra résoudre successivement les équations

$$10^x=2,\quad 10^x=3,\quad 10^x=4,\quad \text{etc.},$$

ce qui ne peut plus maintenant offrir de difficulté. Il ne faut pas oublier qu'il suffit de chercher les logarithmes des nombres premiers : car de simples additions feront connaître ceux des nombres composés.

346. Dans les tables, les logarithmes sont toujours exprimés en décimales, et par conséquent il importe peu de savoir s'il existe d'autres nombres que les puissances de 10, qui aient des logarithmes commensurables. Cependant, pour satisfaire le lecteur, je traiterai ici cette question.

Pour plus de généralité, je chercherai d'abord *à quelles conditions on peut reconnaître que* x *est commensurable dans l'équation* $a^x=b$, a *et* b *étant des nombres entiers positifs.*

Supposons donc $x=\frac{m}{n}$, m et n étant deux nombres entiers. Il viendra

$$a^{\frac{m}{n}}=b,\quad \text{d'où}\quad a^m=b^n.$$

Dans a^m, il ne peut pas y avoir d'autres facteurs premiers que dans a, ni dans b^n d'autres facteurs premiers que dans b; donc la dernière égalité exige que les facteurs premiers de b soient les mêmes que ceux de a.

Soient

$$a=\alpha^p\beta^q\gamma^r \quad \text{et} \quad b=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'} :$$

on aura

$$(\alpha^p\beta^q\gamma^r)^m=(\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'})^n \quad \text{ou} \quad \alpha^{mp}\beta^{mq}\gamma^{mr}=\alpha^{np'}\beta^{nq'}\gamma^{nr'}.$$

Mais, pour que cette égalité subsiste, il faut que chaque facteur premier entre le même nombre de fois dans les deux membres; donc

$$mp=np', \quad mq=nq', \quad mr=nr'.$$

De là on tire

$$\frac{m}{n}=\frac{p'}{p}, \quad \frac{m}{n}=\frac{q'}{q}, \quad \frac{m}{n}=\frac{r'}{r};$$

et par conséquent on a ces conditions

$$\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{r'}{r}.$$

Réciproquement, admettons qu'on ait

$$a=\alpha^p\beta^q\gamma^r, \quad b=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}, \quad \frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{r'}{r}.$$

Si on prend

$$x=\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{r'}{r},$$

on aura $px=p'$, $qx=q'$, $rx=r'$, et par suite

$$a^x=\alpha^{px}\beta^{qx}\gamma^{rx}=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}=b.$$

Donc, *pour que* x *soit commensurable, il faut et il suffit que* a *et* b *soient composés des mêmes facteurs premiers, et que les rapports des exposans de* b *aux exposans de* a *soient égaux* (*).

(*) Les cas où, a et b étant des fractions ou des radicaux, on voudrait encore que x fût commensurable, se traiteront d'une manière analogue.

Lorsque $a=10=2\times5$, on devra avoir $b=2^{p'}\times5^{q'}$, et $\frac{p'}{1}=\frac{q'}{1}$ ou $p'=q'$; donc $b=2^{p'}\times5^{p'}=10^{p'}$: c'est-à-dire qu'*il n'y a que les puissances de* 10 *qui aient des logarithmes commensurables.*

347. Quand on définit les logarithmes par les exposans, et qu'on les a calculés pour une base particulière, il n'y a aucune difficulté à les transporter dans un autre système. En effet, si a' est la nouvelle base, et que, pour cette base, x' représente le logarithme d'un nombre quelconque y, on doit avoir

$$a'^{x'}=y.$$

Or, en prenant les logarithmes des deux membres dans le premier système, et observant (343) que $\log a'^{x'}=x'\log a'$, il viendra

$$x'\log a'=\log y,\quad \text{d'où}\quad x'=\frac{\log y}{\log a'}.$$

Remarque. De là on tire aussi $\frac{x'}{\log y}=\frac{1}{\log a'}$; donc, quel que soit le nombre y, il existe un rapport constant entre ses logarithmes, pris dans les deux systèmes. Quand les logarithmes ont été tirés des progressions, cette conséquence s'est présentée tout d'abord (340), puis on en déduit la valeur de x'; mais ici c'est le contraire.

348. Soit une progression géométrique quelconque

$$\div\!\!\div\; h : hq : hq^2 : hq^3 : \text{etc.},$$

les logarithmes des différens termes seront

$$\log h,\quad \log h+\log q,\quad \log h+2\log q,\quad \text{etc.}$$

Donc *les logarithmes des nombres en progression géométrique sont en progression arithmétique.*

Si l'on suppose $h=1$, les deux progressions seront

$$\begin{array}{l} \div\!\!\div\; 1 : q : q^2 : q^3 : \text{etc.},\\ \div\; 0\, .\, \log q\, .\, 2\log q\, .\, 3\log q\, .\, \text{etc.}, \end{array}$$

ce qui ramène à la définition des logarithmes, tels qu'on les a considérés d'abord.

Des deux questions principales que les tables de logarithmes servent à résoudre.

349. La première de ces questions est celle-ci : *Un nombre quelconque* N *étant donné, trouver son logarithme.*

Les tables publiées par CALLET, qui sont les plus répandues en France, contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000. Elles sont dites à sept décimales, parce qu'en effet elles donnent les logarithmes avec sept décimales. Cependant on doit observer que dans quelques parties il y en a huit. Pour réduire ces tables à un format commode, la caractéristique a été partout supprimée, comme étant connue d'avance (345) ; et en outre, une disposition particulière a été adoptée, que je vais expliquer en parcourant les différens cas de la question dont il s'agit ici.

Ier CAS. *On suppose que le nombre* N *est entier et* $<$108000.

De 1 à 1200, il ne faut aucune explication. Par exemple, veut-on le log. de 652? on cherche ce nombre dans la colonne N ; on trouve à côté les huit décimales 81424760, et en rétablissant la caractéristique, on a $\log 652 = 2{,}81424760$.

Au-delà de 1200, la disposition est moins simple. Dans la colonne N, les nombres se suivent sans interruption depuis 1020 jusqu'à 10800, et leurs logarithmes se trouvent encore dans la colonne immédiatement à droite. Je suppose qu'on demande le log. de 3456. Après avoir trouvé le nombre 3456 dans la colonne N, on remarquera que dans la colonne à droite les trois chiffres 538 sont censés se répéter dans l'espace vide qui est au-dessous d'eux ; et par conséquent on aura, en restituant la caractérique, $\log 3456 = 3{,}5385737$.

Jusqu'ici, il semblerait que les tables s'arrêtent à 10800. Mais à l'aide des autres colonnes, intitulées 1, 2, 3...9, elles vont réellement jusqu'à 108000. D'abord, si un nombre est décuple d'un autre, la partie décimale de son logarithme est la même ; et de là il suit que la colonne marquée 0 donne aussi de 10 en 10 les logarithmes des nombres jusqu'à 108000. Pour avoir ceux des nombres intermédiaires, il faut recourir aux colonnes 1, 2, 3...9.

La 1re sert à trouver les nombres terminés par 1, la 2e les nombres terminés par 2, etc. Au-delà de 10200, les logarithmes des nombres qui ne diffèrent que par le chiffre des unités ayant les trois premières décimales communes, on s'est contenté d'écrire ces décimales une seule fois dans la colonne 0, et on n'a placé dans les colonnes suivantes que les quatre dernières. Ainsi, veut-on le log. de 34567? on fera abstraction des unités 7, on cherchera 3456 dans la colonne N, puis on s'avancera horizontalement, à partir de ce nombre jusqu'à la colonne marquée 7, pour y prendre les derniers chiffres 6617 du logarithme demandé; et, quant aux premiers, ils sont donnés par le nombre isolé 538 qui se trouve dans la colonne 0, le plus proche en montant. En rétablissant donc la caractéristique, on a $\log 34567 = 4,5386617$.

IIe Cas. *On suppose que le nombre* N *est entier et* $>$ 108000.

Soit $N = 3456789$. Je sépare d'abord sur la droite assez de chiffres pour que la partie restant à gauche ne surpasse point 108000. J'ai ainsi le nombre $N' = 34567,89$ qui est 100 fois moindre que N, mais dont le logarithme a la même partie décimale que celui de N (337).

Ne considérant que la partie entière de N′, je cherche log 34567 comme dans le 1er cas, et je trouve, abstraction faite de la caractéristique, $\log 34567 = 0,5386617$.

Mais N′ surpassant 34567 de 0,89, le logarithme de N′ doit surpasser le précédent d'une certaine quantité que je vais chercher. Admettons pour un moment que les accroissemens des nombres soient proportionnels aux accroissemens de leurs logarithmes; on remarquera alors que les tables contiennent, dans la dernière colonne à droite, les différences, toutes calculées, entre les logarithmes des nombres consécutifs; et que, pour les nombres 34567 et 34568, cette *différence tabulaire* est de 126 unités décimales du dernier ordre. C'est donc là ce qu'il faut ajouter au log. de 34567, lorsque ce nombre augmente d'une unité; et par conséquent, lorsqu'il augmente de 0,89, on aura ce qu'il faut ajouter à son logarithme en faisant la proportion

$$1 : 0,89 :: 126 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 126 \times 0,89 = 112,14.$$

On doit négliger la fraction 0,14 qui est moindre que l'unité dé-

cimale du 7[e] ordre, et l'on a simplement $x=112$. On peut aussi s'épargner la multiplication $126\times 0{,}89$. En effet, dans les tables on voit au-dessous de 126 une petite colonne de *parties proportionnelles*, qui renferme les produits de cette différence par $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, etc., et qui donne immédiatement $126\times 0{,}8=101$, $126\times 0{,}09=11{,}3$; donc $126\times 0{,}89=101+11=112$.

De quelque manière que ce produit soit trouvé, en l'ajoutant au log. de 34567, et en rétablissant la caractéristique, on aura le logarithme cherché, savoir : log 3456789 = 6,5386729.

Les calculs que je viens d'expliquer sont réunis dans le type suivant :

N = 3456789		
log 34567	....	0,5386617
pour 0,8	....	101
pour 0,09	....	11
log 3456789	....	6,5386729

Remarques. La proportion entre les accroissemens des nombres et ceux des logarithmes n'est point rigoureusement exacte. Seulement elle fournit une approximation suffisante, quand les nombres sont grands et leurs accroissemens peu considérables. C'est pourquoi il est essentiel de ne séparer sur la droite du nombre donné que le moins de chiffres possible.

Si on avait à trouver log 345678987, il faudrait séparer quatre chiffres; et, en calculant la différence correspondante à 0,8987, on aurait $126\times 0{,}8=101$, $126\times 0{,}09=11{,}3$, $126\times 0{,}008=1{,}01$, $126\times 0{,}0007=0{,}088$. Or, si on ajoute ces produits partiels, on voit que le dernier, celui qui résulte du chiffre 7, n'a aucune influence sur la 7[e] décimale du logarithme. Cet exemple montre qu'en général, lorsqu'il faudra séparer plus de trois chiffres pour que la partie restante à gauche ne surpasse point 108000, on pourra compter comme zéro le 4[e] chiffre et les suivans (*).

* Si on voulait apprécier l'approximation sur laquelle on peut compter en faisant usage des tables logarithmiques, on ne saurait mieux faire que de consulter la note de M. Vincent insérée dans l'Algèbre de M. Reynaud et dans celle de M. Bourdon.

IIIe CAS. *On suppose que* N *renferme des parties décimales.*

Soit N=34,56789. On fera abstraction de la virgule, et on opérera comme si le nombre était entier. La partie décimale du logarithme ne sera point altérée, et en lui donnant la caractéristique convenable, qui est toujours connue d'avance, et qui dans notre exemple est égale à 1, on aura le logarithme cherché, savoir: log 34,56789=1,5386729.

Soit encore N=0,003456789. En opérant sans faire attention à la virgule, et en laissant toujours la caractéristique de côté, on trouverait 0,5386729. Ce serait là précisément le logarithme du nombre donné, si la virgule était placée à la droite du premier chiffre significatif 3. Mais par là le nombre serait multiplié par 1000; donc il faudra retrancher 3 du logarithme ci-dessus, et l'on aura log 0,003456789=0,5386729—3=—2,4613271.

Ce logarithme est entièrement négatif; mais, d'après ce qui a été dit dans le n° 337, on pourra, en employant la caractéristique négative $\bar{3}$, se dispenser de faire la soustraction, et écrire simplement log 0,003456789=$\bar{3}$,5386729.

IVe CAS. *On suppose que* N *est un nombre fractionnaire quelconque.*

Si des entiers sont joints à une fraction, on convertit le tout en une expression fractionnaire que l'on considérera comme un quotient; et en conséquence on retranchera le log. du dénominateur du log. du numérateur. On trouve ainsi,

$$\begin{aligned} \log \frac{47}{3} = &\ 1,67209786 \\ &-0,47712125 \\ \hline &\ 1,19497661. \end{aligned}$$

Quand il s'agit d'une fraction proprement dite, on retranche encore le log. du dénominateur de celui du numérateur; et alors il vient un logarithme négatif. Par exemple,

$$\begin{aligned} \log \frac{3}{47} = &\ 0,47712125 \\ &-1,67209786 \\ \hline &-1,19497661. \end{aligned}$$

Mais on peut facilement avoir, si on veut, un logarithme dont

la caractéristique soit seule négative. Pour cela, il suffit d'ajouter au premier logarithme assez d'unités pour que la soustraction puisse se faire, et de donner ensuite au reste, pour caractéristique, ce nombre d'unités pris négativement. En effet, si, dans l'exemple ci-dessus, on ajoute 2 au log. de 3, on a évidemment

$$\log\frac{3}{47} = -2 + 2,47712125$$
$$\underline{\qquad -1,6720978 6}$$
$$\bar{2},8050233 9.$$

Pour plus d'uniformité, on pourrait convenir d'augmenter toujours de 10 la caractéristique du numérateur. Alors il faudrait diminuer de 10 celle du reste, ce qui ramènerait à une caractéristique négative.

350. La seconde question que les tables doivent servir à résoudre est celle-ci : *Un logarithme* L *étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Ier cas. *On suppose que la partie décimale de* L *est positive, et qu'elle se trouve dans les tables.*

Soit $L = 5,5386617$. Dans la partie des tables qui s'étend au-delà de 10800, on cherche à la colonne marquée 0 le logarithme qui approche le plus de la partie décimale de L; puis on avance dans la ligne horizontale jusqu'à la colonne marquée 7, où l'on trouve les quatre dernières décimales 6617 de L. Alors on se transporte dans la colonne N, pour y prendre le nombre 3456, à la suite duquel on placera le chiffre 7; et on obtient ainsi le nombre 34567, lequel serait le nombre cherché, si la caractéristique donnée était 4. Mais la caractéristique étant 5, il faut multiplier 34567 par 10, et on aura le nombre cherché $= 345670$.

Soit $L = 2,5386617$. Après avoir trouvé, comme ci-dessus, le nombre 34567, on remarquera que la caractéristique donnée étant seulement 2, ce nombre doit être divisé par 100; donc le nombre cherché $= 345,67$.

Soit encore $L = \bar{2},5386617$. Le signe —, placé au-dessus de 2, indique que cette caractéristique est seule négative. Après avoir trouvé le nombre 34567, comme si la caractéristique était 4, on remarquera que, pour passer à la caractéristique $\bar{2}$, il faudrait re-

20*

trancher 6 de 4; donc le nombre 34567 doit être divisé par 10^6; donc le nombre cherché = 0,034567.

Il est assez commode d'observer, dans ces différens exemples, qu'il faut toujours, en ajoutant des zéros, ou en plaçant la virgule, avoir soin que le chiffre de l'ordre le plus élevé soit tel que la caractéristique donnée lui convienne.

II[e] cas. *On suppose que la partie décimale de* L *est positive, et qu'elle ne se trouve point dans les tables.*

Soit L = 2,4971499. En cherchant, comme précédemment, si la partie décimale se trouve dans les tables, on reconnaît qu'elle est comprise entre 0,4971371 et 0,4971509. Si cette partie décimale était exactement 0,4971371, le nombre correspondant, tel qu'il est donné par les tables, abstraction faite de l'ordre des unités, serait 31415.

Mais elle surpasse 0,4971371 de 128, ce qui doit produire une augmentation dans le nombre 31415. Or, la différence tabulaire la plus voisine est 138, et elle répond à une unité d'augmentation dans le nombre 31415; donc, en admettant toujours qu'il y ait proportion entre les accroissemens des nombres et ceux des logarithmes, l'augmentation cherchée se connaîtra en posant

$$138 : 128 :: 1 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{128}{138} = 0,93.$$

Par suite, le nombre cherché, abstraction faite de l'ordre des unités, serait composé des chiffres 3141593. Mais comme la caractéristique donnée est 2, ce nombre ne doit avoir que trois chiffres à sa partie entière; donc enfin le nombre cherché = 314,1593.

Les *parties proportionnelles* de la différence tabulaire peuvent épargner la division de 128 par 138. La partie moindre que 128 et qui en approche le plus est 124, cette partie répond à 0,9, et il y a 4 de reste. Si on met un zéro à droite de 4, on a 40 qui diffère très-peu de la partie 41, et comme le nombre 3 est à côté, on conclut que 40 répondrait à 0,3; donc 4 répond à 0,03. En conséquence le nombre cherché se compose des chiffres 3141593; donc, en tenant compte de la caractéristique 2, ce nombre = 314,1593.

On pourra disposer les calculs comme on le voit ci-dessous:

L =	2,4971499	
Pour	0,4971371.......	31415
1er reste	128.......	09
2e reste	4.......	003

Nombre cherché.........314,1593.

Quand la caractéristique est négative, il est évident que cela ne change rien aux calculs. On n'y fait d'abord aucune attention, mais on y a égard à la fin pour déterminer le rang des plus hautes unités.

IIIe CAS. *On suppose que le logarithme donné* L *est entièrement négatif.*

Soit L = —1,8753145. Prenons ce logarithme positivement, et cherchons le nombre correspondant N. En divisant l'unité par N, on aura le nombre cherché : car le log. de l'unité étant 0, il est évident que le log. de ce quotient sera égal à — log N ou L.

Mais il vaut mieux éviter la division de 1 par N, en ramenant le logarithme donné à un autre dont la caractéristique soit seule négative : or, c'est ce qu'on fera en ajoutant 2 à L, et en prenant ensuite $\bar{2}$ pour caractéristique. En effet, on a

$$L = -2 + (2 - 1,8753145) = \bar{2},1246855.$$

Alors on opère comme dans le second cas, et on trouve le nombre cherché = 0,01332556.

Complémens arithmétiques. Exemples de calculs effectués par logarithmes. Résolution des équations exponentielles.

351. Souvent dans les calculs on doit ajouter des logarithmes, et de leur somme retrancher d'autres logarithmes. Je vais expliquer comment on peut réduire toutes ces opérations à une seule addition, au moyen des *complémens arithmétiques*.

Soient p, q, r, s, plusieurs logarithmes, lesquels sont presque toujours moindres que 10, et supposons qu'on ait à effectuer les calculs indiqués dans l'expression

$$z = p + q - r - s.$$

Il est clair qu'on peut écrire

$$z=p+q+(10-r)+(10-s)-10-10,$$

ou bien, en faisant $10-r=r'$ et $10-s=s'$,

$$z=p+q+r'+s'-10-10.$$

Ainsi, z se calculera en ajoutant p, q, r', s', et en ôtant 2 dizaines de la somme. Or, cette soustraction ne coûte aucune peine; et quant à celles qui sont nécessaires pour évaluer r' et s', elles sont toujours très faciles : car, pour avoir r', par exemple, il n'y a qu'à *retrancher de* 10 *le premier chiffre significatif de* r, *sur la droite, et de* 9 *tous les autres chiffres, à gauche.* Le reste est ce qu'on nomme le *complément arithmétique de* r.

On peut donc poser en règle qu'*au lieu de soustraire des logarithmes, on peut ajouter leurs complémens arithmétiques, pourvu qu'on ait soin d'ôter à la somme autant de dizaines qu'on aura pris de ces complémens.*

352. Soit proposé d'évaluer à 0,01 près l'expression

$$x=\frac{7340\times 3549}{681,8\times 593,1}.$$

Par les propriétés des logarithmes, on a

$$\log x=\log 7340+\log 3549-\log 681,8-\log 593,1.$$

Si on opère sans complémens, on a les calculs suivans :

$$\begin{array}{ll} \log 7340 = 3,8656961 & \log 681,8 = 2,8336570 \\ \log 3549 = 3,5501060 & \log 593,1 = 2,7731279 \\ \hline \text{somme} = 7,4158021. & \text{somme} = 5,6067849. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1^{re}\ \text{somme} = & 7,4158021 \\ 2^{e}\ \text{somme} = & 5,6067849 \\ \hline \text{diff. ou } \log x = & 1,8090172. \end{array}$$

Mais il est plus simple d'employer les complémens, comme on le voit ci-après :

$$\begin{aligned}
\log\ 7340 &= 3,8656961\\
\log\ 3549 &= 3,5501060\\
\text{comp. }\log\ 681,8 &= 7,1663430\\
\text{comp. }\log\ 593,1 &= 7,2268721\\
\hline
\text{Som.} - 20 \text{ ou } \log x &= 1,8090172.\\
\log 100x &= 3,8090172\\
100x &= 6442\\
x &= 64,42.
\end{aligned}$$

On a retranché 20 à cause des deux complémens; et ensuite, comme on voulait connaître x à 0,01 près, on a ajouté 2 à la caractéristique de $\log x$. Alors on a eu le log. de $100x$, et par conséquent il a suffi de chercher le nombre entier le plus approchant auquel ce dernier logarithme correspond. On a trouvé ainsi, avec un léger excès, $x = 64,42$.

353. Soit proposé d'évaluer à 0,00001 près le quotient

$$x = \frac{\left(\sqrt[5]{146298}\right)^4}{\left(\sqrt[6]{988789}\right)^5}.$$

En prenant, d'après les règles, le log. du numérateur et celui du dénominateur, puis retranchant l'un de l'autre, il vient

$$\log x = \tfrac{4}{5}\log 146298 - \tfrac{5}{6}\log 988789.$$

Voici le tableau des calculs :

$\frac{4}{5}\log 146298$		$\frac{5}{6}\log 988789$	
log 14629	0,1652146	log 98878	0,9950997
pour 0,8.....	238	pour 0,9.....	40
log 146298.....	5,1652384	log 988789.....	5,9951037
produit par 4.....	20,6609536	produit par 5.....	29,9755185
quotient par 5.....	4,1321907	quotient par 6.....	4,9959197

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{5}\log 146298 &= 4,1321907\\
\text{comp. }\tfrac{5}{6}\log 988789 &= 5,0040803\\
\hline
\text{som.} - 1 \text{ ou } \log x &= \bar{1},1362710\\
\log 100000x &= 4,1362710\\
100000x &= 13686\\
x &= 0,13686.
\end{aligned}$$

354. Soit proposé de résoudre l'équation exponentielle

$$\left(\frac{117}{337}\right)^x = \frac{8493}{73}.$$

En prenant les log. des deux membres, il vient

$$x(\log 117 - \log 337) = \log 8493 - \log 73,$$

d'où

$$x = -\frac{\log 8493 - \log 73}{\log 337 - \log 117}.$$

log 8493 = 3,9290611	log 337 = 2,5276299
log 73 = 1,8633229	log 117 = 2,0681859
différence = 2,0657382	différence = 0,4594440

$$x = -\frac{20657382}{4594440}.$$

Je désignerai par x' la valeur de x, abstraction faite du signe −, et je vais chercher x' par le moyen des logarithmes.

log 20657	...0,3150672	log 45944	0,6622288
pour 0,3 ...	63	pour 0,40	38
pour 0,08 ...	168	log 4594440 =	6,6622326
pour 0,002...	42		
log 20657382 =	7,3150752		
log 4594440 =	6,6622326		
diff. ou log x' =	0,6528426.		

Arrivé à ce point, je dois chercher le nombre correspondant au logarithme trouvé, comme il a été expliqué n° 350 (IIe cas).

log x' = 0,6528426		
pour	0,6528360 ...	44961
1er reste	66 ...	06
2e reste	80 ...	008
3e reste	20...	0002
	x' =	4,4961682
	x =	−4,49616.

Je n'ai mis qu'un seul chiffre à la partie entière, parce que la caractéristique de $\log x'$ était zéro. Dans les calculs de cette espèce, quand on revient des logarithmes aux nombres, on ne peut guères compter sur l'exactitude du 7e chiffre. C'est pourquoi j'ai pris simplement $x = -4{,}49616$.

355. Les logarithmes sont d'un grand secours dans les questions relatives aux progressions géométriques. Par exemple, prenons dans le tableau du nº 306, la formule

$$S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

On commencera par l'écrire ainsi

$$S = a \times \frac{\sqrt[n-1]{\left(\frac{l}{a}\right)^n} - 1}{\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} - 1},$$

puis on calculera les deux racines par logarithmes. En nommant x et y ces deux racines, on aura

$$S = \frac{a(x-1)}{y-1},$$

expression qu'on pourra aussi calculer par logarithmes, si on le juge convenable.

Mais surtout c'est lorsque le nombre des termes de la progression géométrique est inconnu, que les logarithmes paraissent indispensables. Alors l'équation à résoudre est celle-ci :

$$aq^{n-1} = l,$$

dans laquelle l'inconnue n est en exposant. On prendra donc les log. des deux membres, ce qui donnera

$$\log a + (n-1)\log q = \log l;$$

et de là on tirera la valeur de n, telle qu'elle se trouve au nº 306

$$n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}.$$

Questions sur les intérêts composés.

356. L'homme industrieux qui conçoit un projet dont l'exécution serait profitable à sa fortune, manque souvent des *capitaux* nécessaires pour le réaliser, tandis qu'au contraire celui qui les possède ignore les moyens d'en tirer d'utiles résultats. Que celui-ci *prête* des capitaux au premier, et alors la difficulté disparaît. Toutefois, comme il renonce à s'en servir lui-même pendant un temps déterminé, il exigera non-seulement qu'ils lui soient remboursés au bout de ce temps, mais encore qu'un certain *profit* ou *intérêt* lui soit accordé, en proportion de ces mêmes capitaux et du temps pendant lequel il en aura cédé l'usage. Telle est en peu de mots l'origine et la nature du *prêt à intérêt*. Pour régler toutes les stipulations de ce genre, on convient ordinairement de l'intérêt qu'une somme fixe de 100 francs doit rapporter en un an, et c'est là ce qui s'appelle le *taux* de l'intérêt.

L'intérêt peut être *simple* ou *composé*. Il est *simple* quand on le reçoit à la fin de chaque année; il est *composé* lorsqu'on le laisse chaque année entre les mains de l'emprunteur pour augmenter le capital qui doit porter intérêt pendant l'année suivante. Les questions d'intérêt simple sont sans difficulté, et je ne m'occuperai ici que des questions d'intérêt composé.

357. *Une somme quelconque étant placée à intérêt composé, que doit devenir cette somme, par l'accumulation des intérêts, au bout d'un certain nombre d'années?*

Nommons a la somme placée, r l'intérêt que rapporte 1 fr. par an, et n le nombre des années.

Il est clair que la somme a doit rapporter $r\times a$ ou ar pendant un an; et, si on réunit cet intérêt au capital a, on aura $a+ar$ ou $a(1+r)$. Donc, pour obtenir ce que devient un capital pendant un an, il faut multiplier ce capital par $1+r$.

Au bout de la 1re année le capital étant $a(1+r)$, il sera donc $a(1+r)^2$ au bout de 2 ans; $a(1+r)^3$ au bout de 3 ans; et en général $a(1+r)^n$, au bout de n années. Ainsi, en nommant A cette valeur, on a

$$[1] \qquad A=a(1+r)^n.$$

Supposons, par exemple, qu'on demande la valeur de 1 fr. au bout de 10 ans, l'intérêt étant de 5 pour 100. On fera $a=1$, $n=10$, $r=0{,}05$, $1+r=1{,}05$, et par suite il viendra

$$A=(1{,}05)^{10}.$$

Si on fait le calcul par logarithmes, on trouve

$$\log A=10\log 1{,}05=0{,}2118930,$$

ce qui donne à peu près $A=1{,}6289$.

Si on veut savoir en combien d'années le capital se trouve doublé par l'accumulation des intérêts à 5 pour 100, on fera $A=2a$, $1+r=1{,}05$, et la formule [1] deviendra, en divisant par a,

$$(1{,}05)^n=2.$$

Ici c'est l'exposant n qui est inconnu, et en se servant des logarithmes on trouvera

$$n=\frac{\log 2}{\log 1{,}05}=\frac{0{,}30103000}{0{,}02118930}=14{,}2.$$

Ainsi, telle est la puissance de l'intérêt composé, qu'un capital placé à 5 p. 100 est doublé dans l'intervalle de 14 à 15 ans.

La formule [1], considérée d'une manière générale, exprime une relation au moyen de laquelle on peut trouver une quelconque des quatre quantités a, r, n, A, quand les trois autres sont données.

358. *Quelle valeur produira-t-on au bout d'un certain nombre d'années, si on ajoute chaque année au capital primitif un capital égal, et si on accumule avec toutes ces sommes leurs intérêts composés?*

Soit a le capital placé chaque année, n le nombre des années, et r l'intérêt de 1 fr. La première somme a s'ajoutera avec ses intérêts composés pendant n années, ce qui produira $a(1+r)^n$; la deuxième somme a à ses intérêts pendant $n-1$ années, ce qui produira $a(1+r)^{n-1}$; ainsi de suite jusqu'à la dernière somme a qui, n'étant placée que pendant un an, produira seulement $a(1+r)$. La valeur demandée n'est autre chose que la réunion de toutes

ces valeurs, ainsi accumulées avec leurs intérêts; de sorte qu'en désignant le total par S, on aura

$$S = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots + a(1+r),$$

ou, sous une autre forme,

$$S = a(1+r)[1+(1+r)+(1+r)^2 \ldots + (1+r)^{n-1}].$$

La somme $1+(1+r)+$ etc. est une progression géométrique; donc, par la règle connue (303), il viendra

$$[2] \qquad S = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Cette relation servira à déterminer une quelconque des quantités a, r, n, S, au moyen des trois autres.

Soit $a=1$, $r=0{,}05$, $n=10$: il viendra

$$S = \frac{1{,}05 \times [(1{,}05)^{10} - 1]}{0{,}05} = 21\,[(1{,}05)^{10} - 1] = 13{,}2069.$$

Ainsi, 1 fr. placé chaque année à 5 pour 100 produit au bout de 10 ans une valeur de plus de 13 fr.

Cet exemple suffit pour montrer combien s'accroît la puissance des intérêts composés, quand on y joint celle d'une économie soutenue.

359. *Un emprunt est fait sous la condition d'être remboursé au moyen d'un certain nombre d'*ANNUITÉS, *c'est-à-dire, par sommes égales qu'on paiera d'année en année. On demande la quotité de l'annuité, calculée d'après le taux d'un intérêt convenu.*

Cette quotité doit être telle qu'en tenant compte de chaque annuité et de ses intérêts composés jusqu'au moment du dernier paiement, on ait précisément la valeur que doit acquérir à cette époque le capital emprunté.

Appelons C ce capital, a la quotité de l'annuité, n le nombre des annuités, et r l'intérêt de 1 fr. par an. Le paiement de la 1re annuité devant se faire un an après le jour de l'emprunt, la valeur qu'elle acquerrait, si on reportait le paiement à la $n^{\text{ème}}$ année,

serait $a(1+r)^{n-1}$. A cette époque, la valeur de la 2[e] annuité serait $a(1+r)^{n-2}$, celle de la 3[e] serait $a(1+r)^{n-3}$, etc. Donc l'ensemble de toutes ces valeurs, y compris la dernière annuité a, serait

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}\ldots+a,$$

progression géométrique dont la somme est

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Mais à cette même époque, c'est-à-dire, au bout de n années, le capital emprunté C vaudrait $C(1+r)^n$; donc on doit avoir

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}=C(1+r)^n.$$

De cette équation l'on tire la valeur de l'annuité a,

$$[3] \qquad a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Ici encore il faut observer que cette relation peut servir à calculer une quelconque des quatre quantités a, r, C, n, quand les trois autres sont connues.

Soit fait $C=1$, $r=0,05$, $n=10$, la formule donnera

$$a=\frac{0,05\times(1,05)^{10}}{(1,05)^{10}-1}=\frac{81445}{628894}=0,1295.$$

Cette annuité est celle qu'il faut payer pour éteindre en 10 ans une dette égale à 1 fr. Pour une dette de 10,000 fr., l'annuité serait donc de 1295 fr.

Proposons-nous encore de calculer combien il faut d'années pour amortir une dette au moyen d'une annuité donnée. Alors l'inconnue est n, et l'équation [3] donne successivement

$$a(1+r)^n-a=Cr(1+r)^n,$$

$$(a-Cr)(1+r)^n=a,$$

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-Cr},$$

$$n=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)}.$$

Soit $a=1$, $C=10$, $r=0{,}05$: en observant que $\log a=0$, il viendra

$$n=\frac{-\log(1-0{,}5)}{\log(1+0{,}05)}=\frac{\log 2}{\log 1{,}05}=\frac{3010300}{211893}=14{,}21.$$

Ce résultat fractionnaire, compris entre 14 et 15, montre que 14 annuités ne suffisent pas pour éteindre entièrement une dette décuple de l'annuité, mais que 15 annuités amortiraient une dette plus que décuple.

360. *Plusieurs sommes sont payables à des échéances différentes, et l'on veut fondre toutes ces sommes en une seule, payable à une époque déterminée. Quel sera le montant de cette dernière ?*

L'objet principal de cette question est de bien faire remarquer que, pour comparer entre elles des sommes payables à des échéances différentes, il faut toujours les ramener à une même époque, laquelle peut d'ailleurs être choisie comme on voudra. C'est ainsi que dans le problème précédent elles ont toutes été rapportées au terme du dernier paiement.

Soit a une dette payable au bout de m années, b une autre dette payable dans n années, et c la somme inconnue, qu'on doit payer au bout de p années pour acquitter ces deux dettes. Prenons arbitrairement un nombre d'années s plus grand que chacun des nombres m, n, p, et rapportons les trois sommes a, b, c, à l'expiration de ce nombre d'années.

Pour arriver à ce terme, la somme a devrait rester placée pendant $s-m$ années, la somme b pendant $s-n$, et la somme c pendant $s-p$. Or, par là elles acquerraient les valeurs

$$a(1+r)^{s-m},\quad b(1+r)^{s-n},\quad c(1+r)^{s-p};$$

donc, d'après l'énoncé de la question, on doit avoir

$$c(1+r)^{s-p}=a(1+r)^{s-m}+b(1+r)^{s-n}.$$

En divisant par $(1+r)^s$, cette équation devient

$$c(1+r)^{-p}=a(1+r)^{-m}+b(1+r)^{-n},$$

et l'on en tire l'inconnue

$$c=a(1+r)^{p-m}+b(1+r)^{p-n}.$$

On aurait pu réduire les trois sommes a, b, c, à l'époque où l'on veut fondre les deux dettes en une seule. Alors on observera que la somme a n'étant payable qu'après m années, sa valeur actuelle doit être $\frac{a}{(1+r)^m}$; que semblablement la valeur actuelle de b est $\frac{b}{(1+r)^n}$, et que celle de c est $\frac{c}{(1+r)^p}$: donc on doit avoir l'équation

$$\frac{c}{(1+r)^p}=\frac{a}{(1+r)^m}+\frac{b}{(1+r)^n},$$

laquelle revient à celle qui a été trouvée plus haut avec des exposans négatifs.

CHAPITRE XIV.

Théorie du plus grand commun diviseur algébrique.

Théorèmes fondamentaux.

361. J'ai tardé jusqu'à présent à exposer la théorie du plus grand commun diviseur des quantités littérales, parce qu'elle ne rencontre guère d'application que dans les parties élevées de l'algèbre. Pendant long-temps elle est restée sujette à des difficultés qui ne laissaient pas que d'être assez graves. J'ai essayé de les résoudre en démontrant, sur la décomposition des polynômes en facteurs, deux théorêmes, qui sans doute étaient admis des analystes, mais que les auteurs avaient toujours éludés. Je vais les reproduire ici après avoir rappelé quelques définitions.

On a dit (14) que les *quantités rationnelles* sont celles dont l'expression ne renferme point de radical, et que les *quantités entières* sont celles qui réunissent la double condition d'être rationnelles et de ne contenir aucun dénominateur.

De plus, j'appellerai *quantité première* toute quantité entière qui n'est divisible que par elle-même et par l'unité : de sorte qu'en la divisant par toute autre quantité entière, le quotient ne sera point entier. Ainsi $a-b^2$ est une quantité première; mais a^2-b^2 n'en est point une, car en divisant a^2-b^2 par $a+b$ on trouve $a-b$ pour quotient.

362. Théorème. *Toute quantité première* P, *qui divise un produit* AB *de deux quantités entières, doit diviser l'une d'elles.*

Lorsque A, B, P sont des nombres, la proposition est connue (269). Considérons successivement les quatre cas où ces quantités ne contiennent pas plus d'une lettre.

Premier cas. *L'une des quantités* A *et* B *est fonction de* x, *l'autre est numérique, et* P *est aussi numérique.*

Soit un polynôme

$$A=ax^{\alpha}+bx^{\beta}+\text{etc.},$$

dans lequel les lettres a, b, ... représentent des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, et α, β,... des exposans entiers positifs. En multipliant A par le nombre B, on a

$$AB=Bax^{\alpha}+Bbx^{\beta}+\text{etc.}$$

Puisque ce produit est supposé divisible par le nombre P, il faut que les coefficiens des diverses puissances de x, dans ce produit, soient divisibles par P. Ainsi, P doit diviser les produits Ba, Bb,...; donc, en vertu du théorême connu (269), s'il ne divise point B, il devra diviser tous les nombres a, b,... Or, s'il divise ces nombres, il divise évidemment le polynôme A; donc P doit diviser ou B ou A.

Second cas. *Les deux quantités* A *et* B *sont fonctions de* x, *et* P *est encore numérique.*

Admettons pour un moment que le nombre P ne divise ni A ni B. Nommons A′ l'ensemble de tous les termes de A dont les coefficiens sont des multiples de P, et A″ l'ensemble de tous les autres; on aura A=A′+A″. Décomposons B de la même manière, et soit B=B′+B″. Il viendra

$$AB=(A'+A'')(B'+B'')=A'B'+A'B''+A''B'+A''B''.$$

Les trois premières parties sont divisibles par P, car dans A′ et B′ tous les coefficiens sont divisibles par P ; et pour que A″ B″ le fût aussi il faudrait que les coefficiens de tous les termes de ce produit le fussent eux-mêmes.

Soient ax^α et bx^β les termes de A″ et de B″, dans lesquels la lettre x a le plus haut exposant ; le terme $abx^{\alpha+\beta}$ fera partie du produit A″ B″ et ne se réduira avec aucun autre. Or, ni a ni b n'est divisible par P, puisque P est un nombre premier qui ne divise aucun des coefficiens de A″ et de B″ ; donc ab n'est point divisible par P, et par conséquent A″ B″ ne l'est pas. Ainsi, les trois premières parties du produit AB seraient divisibles par P et la quatrième ne le serait point ; donc AB ne pourrait pas l'être, ce qui serait contraire aux conditions de l'énoncé. Il est donc impossible d'admettre que ni A ni B ne soit divisible par P ; donc A ou B est divisible par P.

Troisième cas. *L'une des quantités* A *et* B *est numérique, l'autre est fonction de* x, *et* P *est aussi fonction de* x.

Soit A le facteur fonction de x, et Q le quotient entier de AB par P : on aura AB = PQ, ou, en représentant par F, F′, F″,... les facteurs premiers du nombre B,

$$AFF'F''\ldots = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, le produit PQ doit l'être aussi : or F est un nombre premier ; donc, en vertu des cas précédens, P ou Q sera divisible par F. Mais P est une quantité première qui contient x ; donc elle n'est divisible par aucun nombre ; donc Q est divisible par F ; donc, en désignant par Q′ le quotient de Q par F, et en divisant par F les deux membres de l'égalité ci-dessus, on aura

$$AF'F''\ldots = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que Q′ doit être divisible par F′ ; et en nommant Q″ le quotient, on aurait

$$AF''\ldots = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1,$$

dans laquelle Q serait encore une quantité entière; et de là on conclut sur-le-champ que A est divisible par P.

QUATRIÈME CAS. A, B *et* P *sont trois fonctions de* x.

Supposons la quantité A non divisible par P, et d'un degré plus élevé que P. Ordonnons A et P de manière que les exposans de x aillent en décroissant, et poussons la division de A par P jusqu'à ce qu'on trouve un reste de degré moindre que P.

Avant d'amener la division à ce point, on pourra rencontrer des restes dont le 1[er] terme ait un coefficient qui ne soit pas divisible par celui du 1[er] terme du diviseur. Alors, poursuivons l'opération en prenant des coefficiens fractionnaires, et concevons qu'à la fin tous les termes du quotient et du reste soient réduits au même dénominateur : on pourra représenter ce quotient et ce reste sous la forme $\frac{Q}{M}$ et $\frac{A'}{M}$, en désignant par Q et A' deux quantités entières, et par M le dénominateur commun. Or, on doit toujours avoir

$$A = P\frac{Q}{M} + \frac{A'}{M}; \quad \text{donc} \quad MA = PQ + A'.$$

On voit par là qu'en multipliant le dividende par M avant de faire la division, le calcul se ferait sans fractions. Et remarquez bien que A' ne peut pas être zéro, autrement le produit MA serait divisible par le polynôme premier P, et dès-lors P devrait diviser A (3[e] cas), ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, multiplions les deux membres de la dernière égalité par B et divisons-les ensuite par P, il vient

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P};$$

donc, puisque AB est divisible par P, le produit A'B l'est aussi.

Supposons que A' soit algébrique, et divisons P par A'. Soit M' le nombre par lequel il faut multiplier P pour arriver, sans fractions, à un reste de degré moindre que A'. En nommant Q' le quotient et A'' le reste, on aura

$$M'P = A'Q' + A'';$$

et A'' ne pourra pas non plus être zéro : car, pour que cela fût,

il faudrait que $M'P$ fût divisible par chaque facteur algébrique premier de A'. Donc, en vertu du 3e cas, P devrait l'être aussi, et dès-lors P ne serait plus une quantité première.

Si on multiplie et si on divise cette égalité par P, elle devient

$$M'B = \frac{A'B}{P} Q' + \frac{A''B}{P};$$

donc la divisibilité de $A'B$ par P entraîne celle de $A''B$.

Divisons encore P par A''. Soit M'' le nouveau nombre par lequel on multiplie P pour éviter les coefficiens fractionnaires, soit Q'' le quotient et A''' le reste, il viendra

$$M''P = A''Q'' + A''',$$

d'où l'on tire, comme plus haut,

$$M''B = \frac{A''B}{P} Q'' + \frac{A'''B}{P};$$

donc $A'''B$ est aussi divisible par P.

En continuant ainsi, on obtient des restes successifs $A', A'', A''', \ldots$ dont le degré va en décroissant, et comme aucun reste algébrique ne pourra diviser exactement P, on est sûr d'arriver à un reste numérique A_1. Or, les raisonnemens précédens prouvent que tous les produits $A'B$, $A''B$, $A'''B$, etc., sont divisibles par P; donc A_1B doit l'être; donc, par le 3e cas, B est divisible par P.

Les quatre cas qu'on vient d'examiner sont les seuls qui soient à considérer lorsque les quantités A, B, P ne sont pas numériques à la fois, et qu'elles ne contiennent pas plus d'une lettre. Passons aux cas où il y a deux lettres x et y dans l'une de ces quantités, ou dans deux d'entre elles, ou dans toutes les trois. Ces cas sont aussi au nombre de quatre, savoir :

1° *Lorqu'un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x *et que* P *ne la contient point.*

2° *Lorsque les deux facteurs* A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *ne la contient point.*

3° *Lorsqu'un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

4° *Enfin, lorsque les deux facteurs* A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées, et pour cette raison nous nous dispenserons de les rapporter. La seule différence consiste en ce que les quantités qui, précédemment, étaient supposées numériques, peuvent être ici des fonctions de y.

De même que les cas où A, B, P, ne renferment pas plus d'une seule lettre, servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres ; de même ceux-ci serviront à s'élever aux cas où ces quantités pourraient en contenir trois ; et ainsi de suite, quel que soit le nombre de lettres. Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

363. Théorème. *Il n'existe qu'un seul système de facteurs premiers dont le produit soit égal à une quantité donnée :* ou, ce qui est la même chose, *deux produits de facteurs premiers ne peuvent être égaux que lorsqu'ils sont composés de facteurs égaux chacun à chacun.*

Cette proposition, toute semblable à celle qu'on connaît sur les nombres (271), se démontre aussi de la même manière. Soient ABCD... et $abcd$... les deux produits égaux. Puisque tous les facteurs sont premiers, si a n'est point égal à quelqu'un des facteurs A, B, C, ... il ne pourra diviser aucun d'eux. Or a, ne divisant ni A ni B, ne divisera point AB : car, d'après le théorème précédent, si a divisait AB, il devrait diviser A ou B. Par la même raison, a ne divisant ni AB ni C, ne divisera pas ABC; et ainsi de suite. Donc a ne pourrait point diviser le produit ABCD,... ce qui serait absurde, puisque ABCD... = $abcd$... Il faut donc que a soit égal à l'un des facteurs A, B, C, D, etc. Supposons $a = \text{A}$, et divisons les deux produits par a. Les produits restans BCD... et bcd... seront encore égaux, et l'on pourra leur appliquer le raisonnement précédent. On conclura donc que b est égal à l'un des facteurs du produit BCD..., à B, par exemple. On fera voir semblablement que c est égal à l'un des facteurs du produit CD..., à C, par exemple; et ainsi de suite. Donc les deux produits ABCD... et $abcd$... sont composés des mêmes facteurs premiers.

Si plusieurs facteurs du premier produit sont égaux entre eux, le second produit doit les renfermer précisément en pareil nombre.

Définition du plus grand commun diviseur. Principes sur lesquels repose sa détermination. Cas les plus simples.

364. En Algèbre, la dénomination de plus grand commun diviseur n'indique point comme en arithmétique, un diviseur qui soit réellement plus grand qu'un autre. Une nouvelle définition est nécessaire, et j'adopterai celle-ci : *Le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités entières est le produit de tous leurs facteurs premiers communs, soit numériques, soit monômes, soit polynômes.*

On n'a besoin d'aucune méthode nouvelle pour déterminer ce produit lorsque les quantités dont il s'agit sont des monômes. Par exemple, soient les quantités

$$432a^4b^2x,\quad 270a^2b^3x^2,\quad 90a^3bx^3.$$

Je cherche, par les méthodes de l'arithmétique, le plus grand diviseur commun des coefficiens 432, 270, 90, et j'obtiens le nombre 18. A la suite de ce nombre je place chacune des lettres communes aux trois monômes, et je lui donne le plus petit exposant dont elle est affectée dans ces monômes. Je trouve ainsi $18a^2bx$ pour le plus grand commun diviseur.

365. Mais lorsque les quantités proposées sont des polynômes, leur plus grand diviseur commun ne s'obtient plus avec la même facilité. Sa détermination repose alors sur deux principes que nous allons exposer.

Premier principe. Le plus grand diviseur commun à deux quantités entières n'est point altéré si l'on multiplie ou si l'on divise l'une d'elles par telle quantité entière qu'on voudra, pourvu que celle-ci n'ait aucun facteur commun avec l'autre.

Il est évident, en effet, que les facteurs premiers, communs aux deux quantités proposées, sont toujours les mêmes. Or, c'est le produit de ces facteurs qui est le plus grand commun diviseur des deux quantités.

Deuxième principe. Si l'on a deux polynômes A et B, si l'on divise A par B, en ayant soin de ne prendre que des termes entiers au quotient, et si l'on désigne par R le reste de la division,

je dis que le plus grand commun diviseur de A et de B est le même que celui de B et de R.

On doit avoir, comme dans toute division,

$$A = BQ + R, \quad \text{d'où} \quad A - BQ = R.$$

Soit D le plus grand diviseur commun de A et de B : il devra diviser A — BQ ; donc il divisera aussi R. Représentons par A′, B′, R′, les quotiens de A, B, R, par D, et divisons par D les deux membres de la première égalité, il viendra

$$A' = B'Q + R'.$$

B′ et R′ n'ont plus de facteur commun : car, s'ils en avaient un, il devrait diviser B′Q + R′, et par conséquent aussi A′. Donc A′ et B′ auraient encore un facteur commun ; et D, qui est le plus grand diviseur commun de A et de B, ne renfermerait pas tous les facteurs communs à ces quantités, ce qui est contre la définition.

Puisque B′ et R′, qui sont les quotiens de B et de R par D, ne peuvent plus avoir de facteur commun, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur de B et de R est égal à D ; donc il est le même que celui des quantités A et B.

366. Maintenant, passons à la recherche du plus grand commun diviseur des polynômes. Par exemple, soient les quantités

$$P = 48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2,$$
$$Q = 48a^3bx^7 - 88a^4bx^6 - 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4.$$

Je cherche d'abord le plus grand commun diviseur des termes de P, ainsi que celui des termes de Q : je trouve $12a^2b^3x^2$, pour le premier, et $8a^3bx^4$ pour le second. Le plus grand commun diviseur de ces deux monômes est $4a^2bx^2$, et ce diviseur commun est le produit de tous les facteurs monômes communs à P et à Q.

Alors je divise P par $12a^2b^3x^2$, Q par $8a^3bx^4$, et j'ai pour quotiens les polynômes

$$A = 4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4,$$
$$B = 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3,$$

dans lesquels il n'y a plus que les facteurs polynômes des quantités P et Q. Par conséquent, si l'on connaissait le plus grand com-

mun diviseur de A et de B, il suffirait de le multiplier par le monôme $4a^2bx^2$, pour obtenir le plus grand commun diviseur de P et de Q. Ainsi, la question est simplifiée : car elle se réduit à déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynômes A et B, qui n'ont plus de facteurs monômes. C'est donc cette recherche qui doit nous occuper.

D'après la définition, ce diviseur est le produit des facteurs communs à A et à B; donc si la quantité B divise exactement A, elle sera elle-même ce diviseur : c'est pourquoi nous essaierons cette division. Or, une difficulté se présente dès le commencement, c'est que $4x^4$, premier terme du dividende, ne peut point se diviser par $6x^3$, premier terme du diviseur. Pour rendre la division possible, on pourrait multiplier A par 6, et le diviseur cherché ne serait point altéré (365) ; car 6 ne contient aucun facteur qui soit commun à B, et en effet il ne doit point en contenir, puisque B n'a plus de facteurs monômes. Mais il suffit de multiplier A par 3; car alors le premier terme du dividende devient $12x^4$, et il est divisible par $6x^3$. C'est donc la quantité $A\times 3$ ou

$$12x^4-30ax^3+3a^2x^2-3a^4,$$

qu'il faut prendre pour dividende. Après avoir placé le terme $2x$ au quotient, on trouve le reste

$$-8ax^3+19a^2x^2+2a^3x-3a^4,$$

lequel, en vertu du 2e principe (365), doit avoir avec B les mêmes facteurs communs que A.

La division est encore arrêtée; mais on la rend possible en multipliant aussi ce reste par 3. On trouve ainsi $-4a$ au quotient, et pour reste la quantité

$$13a^2x^2-26a^3x-13a^4,$$

qui a encore avec B les mêmes facteurs communs que A.

Ce reste contenant x à un degré moindre que le diviseur, c'est celui-ci qu'on prendra maintenant pour dividende, tandis que le reste servira de diviseur. Mais on supprimera préalablement dans ce reste les facteurs qui sont communs à tous ses termes, ce qui le réduit à $x^2-2ax-a^2$, et ce qui n'altère en rien le plus grand commun diviseur.

On a alors à diviser l'une par l'autre les deux quantités

$$B = 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3,$$
$$R = x^2 - 2ax - a^2.$$

La division se fait sans qu'il soit nécessaire d'introduire aucun facteur dans les dividendes partiels ; et comme on parvient à un reste nul, on en conclut que $x^2 - 2ax - a^2$ est le plus grand commun diviseur cherché.

On donne aux calculs la disposition suivante :

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4 & 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3 \\
\cline{2-2}
12x^4 - 30ax^3 + 3a^2x^2 - 3a^4 & 2x - 4a \\
-12x^4 + 22ax^3 + 16a^2x^2 + 2a^3x & \\
\hline
-8ax^3 + 19a^2x^2 + 2a^3x - 3a^4 & \\
-24ax^3 + 57a^2x^2 + 6a^3x - 9a^4 & \\
+24ax^3 - 44a^2x^2 - 32a^3x - 4a^4 & \\
\hline
13a^2x^2 - 26a^3x - 13a^4 & \\
x^2 - 2ax - a^2. &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3 & x^2 - 2ax - a^2 \\
\cline{2-2}
-6x^3 + 12ax^2 + 6a^2x & 6x + a \\
\hline
ax^2 - 2a^2x - a^3 & \\
-ax^2 + 2a^2x + a^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

367. Les raisonnemens précédens montrent comment des divisions successives conduisent au plus grand commun diviseur. Deux divisions ont suffi dans l'exemple ci-dessus ; mais si la seconde ne ne se fût point effectuée exactement, elle aurait mené à un autre reste, de degré moindre que le diviseur, et l'on serait passé à une troisième division comme on est passé de la première à la seconde. En continuant de cette manière, il est évident que si l'on parvient à un reste nul, le diviseur de la dernière opération est le plus grand commun diviseur cherché.

Voici un exemple dans lequel il y a trois divisions. Les quantités dont on demande le plus grand commun diviseur, sont

$$A=x^4-ax^3-a^2x^2-a^3x-2a^4,$$
$$B=3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3.$$

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
x^4-ax^3-a^2x^2-a^3x-2a^4 & 3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3 \\ \cline{2-2}
3x^4-3ax^3-3a^2x^2-3a^3x-6a^4 & x+4a \\
-3x^4+7ax^3-3a^2x^2+2a^3x & \\ \cline{1-1}
4ax^3-6a^2x^2-a^3x-6a^4 & \\
12ax^3-18a^2x^2-3a^3x-18a^4 & \\
-12ax^3+28a^2x^2-12a^3x+8a^4 & \\ \cline{1-1}
10a^2x^2-15a^3x-10a^4 & \\
2x^2-3ax-2a^2 &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3 & 2x^2-3ax-2a^2 \\ \cline{2-2}
6x^3-14ax^2+6a^2x-4a^3 & 3x-5a \\
-6x^3+9ax^2+6a^2x & \\ \cline{1-1}
-5ax^2+12a^2x-4a^3 & \\
-10ax^2+24a^2x-8a^3 & \\
+10ax^2-15a^2x-10a^3 & \\ \cline{1-1}
9a^2x-18a^3 & \\
x-2a &
\end{array}$$

Troisième division.

$$\begin{array}{r|l}
2x^2-3ax-2a^2 & x-2a \\ \cline{2-2}
-2x^2+4ax & 2x+a \\ \cline{1-1}
ax-2a^2 & \\
-ax+2a^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

C'est donc $x-2a$ qui est le plus grand commun diviseur.

Dans la première division, on a multiplié deux fois par 3; et dans la seconde, deux fois par 2. On pourrait abréger un peu en multipliant une seule fois par le carré de 3, et une seule fois par le carré de 2.

Continuation : on étend la théorie précédente à tous les cas.

368. Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que le succès du calcul est entièrement fondé sur ce que, les quantités étant ordonnées selon les puissances décroissantes d'une lettre, chaque division conduit à un reste de degré moindre que le diviseur. Lorsque les polynômes contiennent plusieurs termes de même degré, il y a une précaution à prendre, sans laquelle on ne serait point sûr d'obtenir toujours une pareille réduction, et qui consiste à réunir tous ces termes sous un seul multiplicateur.

Soient les polynômes

$$A = x^3 + 2yx^2 - x^2 + y^2x - 2yx - y^2,$$
$$B = yx^2 + x^2 + y^2x + yx + x + y.$$

Je les écrirai ainsi :

$$A = x^3 + (2y - 1)x^2 + (y^2 - 2y)x - y^2,$$
$$B = (y + 1)x^2 + (y^2 + y + 1)x + y.$$

La partie x^3 ne pouvant pas se diviser par $(y + 1)x^2$, à cause du facteur $y + 1$, je rappellerai qu'en général, si une quantité est ordonnée comme sont les précédentes, par rapport aux puissances de x, tout diviseur de cette quantité, indépendant de x, doit diviser séparément les multiplicateurs des diverses puissances de x. Dès lors, il est facile de voir que $y+1$ n'a aucun facteur commun avec B ; car, s'il y en avait un, il faudrait qu'il se trouvât dans les quantités $y^2 + y + 1$ et y : or, il est évident que le monôme y n'a aucun facteur commun avec $y + 1$. On pourra donc multiplier A par $y + 1$ sans altérer le commun diviseur cherché, et la première division devient possible. Mais comme il faudrait tout-à-l'heure multiplier encore par $y + 1$, on introduira tout d'abord dans A le facteur $(y + 1)^2$ ou $y^2 + 2y + 1$. On parvient de cette manière à un reste de degré moindre, en x, que B, savoir :

$$(-y^3 - 3y^2 - y + 2)x - y^4 - 3y^3 - y^2 + 2y.$$

Avant de passer à la seconde division, il faut supprimer dans ce reste tous les facteurs communs aux quantités qui multiplient les diverses puissances de x. Ici cette opération est facile, car on

aperçoit sur-le-champ que les deux parties du reste sont divisibles par $-y^3-3y^2-y+2$. En opérant cette division, on obtient $x+y$, quantité qui a encore avec B les mêmes facteurs communs que A.

Ainsi, ce sera $x+y$ qu'on prendra pour diviseur dans la seconde division ; et comme elle se fait exactement, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur cherché est $x+y$.

Première division.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+(2y-1)x^2+(y^2-2y)x-y^2 & (y+1)x^2+(y^2+y+1)r+y \\
\left\{\begin{array}{l}(y+1)^2x^3+\ y^3+3y^2-1)x^2 \\ +(y^4-3y^2-2y)x-y^4-2y^3-y^2\end{array}\right. & (y+1)x+(y^2-2) \\
\left\{\begin{array}{l}-(y+1)^2x^3+(-y^3-2y^2-2y-1)x^2 \\ +(-y^2-y)x\end{array}\right. & \\
\hline
\left\{\begin{array}{l}(y^3+y^2-2y-2)x^2 \\ +(y^4-4y^2-3y)x-y^4-2y^3-y^2\end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{l}(-y^3-y^2+2y+2)x^2 \\ +(-y^4-y^3+y^2+2y+2)x-y^3+2y\end{array}\right. & \\
\hline
(-y^3-3y^2-y+2)x-y^4-3y^3-y^2+2y & \\
x+y &
\end{array}
$$

Deuxième division.

$$
\begin{array}{l|l}
(y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y & x+y \\
-(y+1)x^2+(-y^2-y)x & (y+1)x+1 \\
\hline
x+y & \\
-x-y & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

369. L'exemple qu'on vient d'expliquer met à découvert certaines difficultés qu'il faut encore résoudre. Dans la première division, il a fallu, avant de multiplier par $y+1$, s'assurer que cette quantité n'avait point de facteur commun avec celles qui multiplient les diverses puissances de x dans le diviseur; et comme le monôme y était une de ces quantités, il a été facile de recon-

naître qu'il n'a en effet aucun facteur commun avec $y+1$. Mais, en général, il n'en est point ainsi : car il aurait pu se faire que toutes les puissances de x eussent été multipliées par des polynômes. Il y a plus : après la première division, nous avons supprimé, dans le reste, les facteurs communs aux quantités qui multiplient les diverses puissances de x ; et cela suppose qu'on sache déterminer le plus grand commun diviseur de ces quantités. Cette détermination a été facile dans l'exemple précédent, mais on comprend qu'il n'en sera pas toujours de même. Les développemens suivans font disparaître toutes ces difficultés.

1° Elles n'ont point lieu quand il s'agit de deux polynômes qui ne contiennent que la lettre x : les règles du n° 366 suffisent alors. Ainsi, on saura toujours trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes qui ne renferment qu'une seule lettre; par suite, je dis qu'on saura aussi trouver celui d'un plus grand nombre de quantités dans lesquelles il n'entre qu'une seule lettre. Supposons, par exemple, qu'on ait trois quantités A, B, C; soit D le plus grand commun diviseur de A et B, et D' celui de D et C. D'après la définition, D est le produit des facteurs communs à A et B, et D' est celui des facteurs communs à D et C; donc D' est le produit des facteurs communs aux trois quantités A, B, C; donc D' est leur plus grand commun diviseur.

2° Considérons des polynômes A et B qui contiennent deux lettres x et y. Prenons d'abord le plus grand commun diviseur des termes de A; soit α ce diviseur et A' le quotient de A par α: on aura $A=\alpha A'$. Ordonnons A' selon les puissances décroissantes de x, en ayant soin de réunir tous les termes qui renferment la même puissance de cette lettre; et supposons, par exemple, qu'on ait

$$A'=Lx^2+Mx+N.$$

Tous les facteurs de A', indépendans de x, doivent être facteurs des quantités L, M, N, qui multiplient les différentes puissances de x. Or, ces quantités ne contenant que la seule lettre y, il sera facile d'avoir leur plus grand commun diviseur. Nommons α' ce diviseur et A'' le quotient de A' par α' : on aura $A'=\alpha' A''$, et par conséquent

$$A=\alpha\alpha' A''.$$

α sera le produit des facteurs monômes de A, α' le produit des facteurs polynômes qui ne contiennent point x, et A″ le produit des facteurs polynômes qui contiennent x.

Faisons la même décomposition sur le polynôme B, et soit

$$B = \beta\beta'B''.$$

Alors, je détermine le plus grand commun diviseur des monômes α et β, ainsi que celui des polynônes α' et β', qui ne contiennent que la lettre y; et si je puis aussi trouver celui des polynômes A″ et B″, qui renferment y et x, j'aurai trois quantités dont le produit sera le plus grand commun diviseur de A et de B. En effet, la première contiendra les facteurs premiers monômes communs à A et à B; la seconde, les facteurs polynômes indépendans de x; et la troisième, les facteurs polynômes dépendans de x.

Or, je dis qu'on peut trouver le plus grand diviseur commun des quantités A″ et B″ en les soumettant aux calculs des divisions successives, comme dans l'exemple du n° 368. Il est clair, en effet, que ces quantités n'ayant plus ni facteurs monômes, ni facteurs polynômes indépendans de x, il sera permis de multiplier les dividendes partiels de la première division par le polynôme qui est placé devant la plus haute puissance de x, dans le diviseur, et qu'on arrivera ainsi à un reste de degré moindre, en x, que le diviseur. Il sera facile d'ôter de ce reste tous les facteurs monômes qu'il renferme, aussi bien que les facteurs polynômes indépendans de x; et alors on procédera à la seconde division, en prenant pour diviseur ce reste ainsi simplifié. On se conduira comme dans la première; puis on passera à une troisième; et, en continuant toujours de cette manière, on est sûr de parvenir enfin à un reste nul, ou à un reste indépendant de x.

Dans le premier cas, les quantités A″ et B″ ont pour plus grand diviseur commun le diviseur de la dernière division. Dans le second, elles n'en ont aucun, ou, pour parler plus exactement, elles n'en ont point d'autre que l'unité. En effet, le plus grand commun diviseur de ces quantités devant être le même que celui du dernier diviseur et du reste indépendant de x, serait lui-même indépendant de x: mais les polynômes A″ et B″, à cause des décompositions préliminaires, ne peuvent avoir aucun facteur commun indépendant

de x, autre que l'unité ; donc l'unité est leur seul facteur commun.

Ainsi, on pourra toujours trouver le plus grand diviseur commun de deux polynômes dans lesquels il y a deux lettres ; et par conséquent aussi celui de trois polynômes, ou davantage.

3° De même qu'on s'est élevé du cas où les polynômes ne contiennent qu'une lettre à celui où ils en contiennent deux, de même on s'élèvera de ce second cas à celui des polynômes qui en renferment trois, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Donc enfin il n'y a aucun cas où l'on ne puisse déterminer le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes.

De quelques modifications nécessaires, quand les polynômes sont tels qu'on les considère dans les équations.

370. Dans la théorie générale des équations, qui va bientôt nous occuper, on considère d'une manière spéciale des polynômes de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots Gx + H,$$

dans lesquels x représente une inconnue, m un nombre entier positif, et A, B, C,... des quantités quelconques, numériques ou littérales, qui ne contiennent point x. Or, quoique les coefficiens A, B, C, ... puissent renfermer des radicaux et des dénominateurs, comme l'inconnue x ne se trouve ni sous ces radicaux ni dans ces dénominateurs, le polynôme est dit *rationnel et entier* par rapport à x ; et l'on dit encore que deux polynômes de cette forme sont *divisibles* l'un par l'autre, lorsque la division donne un quotient exact, entier aussi relativement à x. Ainsi, $x^2 + \frac{3}{2}ax\sqrt{2} - 2a^2$ est divisible par $2x - a\sqrt{2}$: car on trouve le quotient exact $\frac{1}{2}x + a\sqrt{2}$. Cela posé, voici une proposition tout-à-fait semblable à celle du n° 362, et dont l'application se présentera dans la théorie des équations.

Si un binôme du premier degré, de la forme $\alpha x + \alpha'$, divise un produit AB *de deux polynômes rationnels et entiers par rapport à* x, *il devra diviser l'un deux.*

Divisons A et B par $\alpha x + \alpha'$, et supposons que les divisions ne se fassent pas exactement, on est sûr au moins d'arriver à des

restes qui ne contiendront plus x. Soient Q, Q', les deux quotiens, et R, R', les deux restes : on aura

$$A = Q(\alpha x + \alpha') + R, \quad B = Q'(\alpha x + \alpha') + R',$$

et par suite

$$AB = QQ'(\alpha x + \alpha')^2 + Q'R(\alpha x + \alpha') + QR'(\alpha x + \alpha') + RR'.$$

De là on tire, en divisant par $\alpha x + \alpha'$,

$$\frac{AB}{\alpha x + \alpha'} = QQ'(\alpha x + \alpha') + Q'R + QR' + \frac{RR'}{\alpha x + \alpha'},$$

Par hypothèse AB est divisible par $\alpha x + \alpha'$, il faut donc que le second membre se réduise à un polynôme entier, relativement à x : or, pour cela, il faudrait que RR' fût divisible par $\alpha x + \alpha'$, ce qui est impossible, puisque R et R' sont des restes qui ne contiennent point x. Donc la division de A par $\alpha x + \alpha'$, ou celle de B, doit se faire exactement.

Corollaire. Soit un produit ABCD de plusieurs polynômes entiers par rapport à x. S'il est divisible par $\alpha x + \alpha'$, il y aura au moins un des facteurs qui devra l'être. En effet, on peut considérer ABCD comme un produit de deux facteurs ABC×D; donc si le binôme $\alpha x + \alpha'$ ne divise pas D, il doit diviser ABC. Semblablement, on conclut que s'il ne divise point C, il doit diviser AB, et que s'il ne divise point AB, il doit diviser A. On continuerait de la même manière s'il y avait plus de facteurs.

371. Supposons que le polynôme $Ax^m +$ etc. soit formé par la multiplication de m facteurs du premier degré, et qu'on ait

$$Ax^m + \text{etc.} = (\alpha x + \alpha')(\beta x + \beta')(\gamma x + \gamma') \ldots :$$

on pourra écrire

$$Ax^m + \text{etc.} = \alpha\beta\gamma \ldots \times \left(x + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta'}{\beta}\right)\left(x + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) \ldots ;$$

puis, si on observe que le coefficient A doit être égal au produit $\alpha\beta\gamma\ldots$, et si on pose $\frac{\alpha'}{\alpha} = a$, $\frac{\beta'}{\beta} = b$, $\frac{\gamma'}{\gamma} = c, \ldots$, on aura

$$Ax^m + \text{etc.} = A(x + a)(x + b)(x + c) \ldots \ldots$$

On dit alors que le polynôme Ax^m+etc. est décomposé en *facteurs simples* ou *premiers ;* et, sous cette dénomination, on entend ici les binômes $x+a$, $x+b$, $x+c$,... abstraction faite de A.

On peut appliquer à cette décomposition un théorème tout-à-fait analogue à celui du n° 363, c'est-à-dire qu'*un polynôme* X *de la forme* $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$etc., *ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs simples.*

Admettons qu'on ait à la fois

$$X=A(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots,$$
$$X=A(x+a')(x+b')(x+c')(x+d')\ldots.$$

Le binôme $x+a'$ doit diviser le produit $A(x+a)(x+b)(x+c)\ldots$; donc il divise l'un de ses facteurs, et pour cela il faut évidemment qu'il soit égal à l'un d'eux. Supposons-le égal à $x+a$, et divisons les deux produits par $x+a$, il vient

$$A(x+b)(x+c)(x+d)\ldots=A(x+b')(x+c')(x+d')\ldots.$$

On prouvera de la même manière que $x+b'$ doit être égal à l'un des facteurs du premier membre. Soit $x+b$ ce facteur; en divisant par $x+b$, on aura

$$A(x+c)(x+d)\ldots=A(x+c')(x+d')\ldots;$$

et en poursuivant le raisonnement on arrivera à conclure que les m facteurs simples du second produit sont les mêmes que ceux du premier.

372. Dans la théorie des équations, quand il s'agira du *plus grand diviseur commun* à plusieurs polynômes, entiers relativement à x, il faudra toujours entendre que les facteurs simples de la forme $x+a$, $x+b$,..., qui sont communs à ces polynômes, ont été multipliés entre eux pour composer le plus grand commun diviseur, lequel pourra contenir en outre un multiplicateur quelconque indépendant de x. La présence de ce multiplicateur est d'ailleurs tout-à-fait indifférente : car ordinairement on ne considère ce commun diviseur que pour en déduire les valeurs de x qui le rendent égal à zéro, et un multiplicateur indépendant de x ne peut en aucune façon changer ces valeurs (69).

La détermination de ce commun diviseur pourrait être tout-à-fait assimilée à celle des nombres. Il sera inutile de tenir compte des facteurs communs indépendans de x, et on admettra, si on veut, des coefficiens fractionnaires dans le calcul. Cependant il sera en général plus simple de les éviter, en introduisant ou en supprimant des facteurs dans les divisions partielles. A la vérité, les résultats qu'on obtient par ces diverses manières de procéder différeront entre eux par des multiplicateurs ou des diviseurs indépendans de x ; mais on vient de dire que cette circonstance ne doit être ici d'aucune considération.

CHAPITRE XV.

Composition d'une équation algébrique quelconque à une seule inconnue.

Théorème fondamental dont l'objet est d'établir que toute équation algébrique a une racine.

373. Les équations algébriques à une seule inconnue sont celles qu'on peut réduire à la forme

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}\ldots+Gx+H=0,$$

x étant l'inconnue, m un nombre entier positif, et A, B, C,... des quantités connues quelconques. L'exposant m est le degré de l'équation. Pour la simplifier encore davantage, on la divise par le premier coefficient, et on l'écrit ainsi :

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

P, Q,... T, U, étant encore des quantités connues.

Il n'est pas évident *à priori* qu'il existe toujours une quantité *réelle* ou *imaginaire* qui, mise dans cette équation à la place de x, rende le premier membre identiquement nul. Ainsi, à parler rigoureusement, une démonstration est nécessaire pour établir que cette équation a toujours une racine; et j'ai pensé que le lecteur me saurait gré d'exposer ici celle qu'a donnée M. Cauchy dans ses *Exercices de Mathématiques*. Cependant, comme elle ne laisse pas que d'être assez épineuse, s'il jugeait à propos de la supprimer et d'admettre le théorème comme évident, alors il devrait passer immédiatement à la composition des équations p. 349.

374. Avant tout, il faut observer que le mot *imaginaire*, pour avoir ici quelque sens, doit désigner une expression algébrique sur laquelle on sache effectuer les opérations indiquées dans l'équation. Or, comme nous n'aurons à considérer dans la suite que des quantités réductibles à la forme $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles, je restreindrai désormais la dénomination de *quantité imaginaire* aux seules expressions de cette forme.

Avec les quantités a et b qui entrent dans l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, on peut former une quantité positive égale à $\sqrt{a^2+b^2}$: cette quantité est dite le *module* de l'expression imaginaire. Par exemple, le module de $3-4\sqrt{-1}$ serait égal à $\sqrt{9+16}$ ou 5.

Deux quantités, telles que $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$, qui ne diffèrent entre elles que par le signe de la partie imaginaire, sont dites *conjuguées* l'une de l'autre. Deux quantités conjuguées ont donc le même module.

Si on fait $b=0$, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ se réduit à a. Ainsi la formule

$$x=a+b\sqrt{-1}$$

est propre à représenter toutes les quantités, soit réelles, soit imaginaires. Lorsque la quantité est réelle, elle a pour conjuguée une quantité égale, et le module n'est autre chose que cette quantité elle-même, abstraction faite de son signe.

Je vais maintenant établir quelques lemmes dont nous aurons besoin.

375. Lemme I[er]. *La somme ou la différence de deux quantités quelconques a un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Soient les deux expressions

$$a+b\sqrt{-1}, \qquad a'+b'\sqrt{-1}.$$

En appelant r et r' leurs modules, on a

$$r^2=a^2+b^2, \qquad r'^2=a'^2+b'^2.$$

Nommons R le module de leur somme, on aura évidemment

$$\begin{aligned}R^2&=(a+a')^2+(b+b')^2\\&=a^2+a'^2+b^2+b'^2+2(aa'+bb')\\&=r^2+r'^2+2(aa'+bb').\end{aligned}$$

Mais, en multipliant r^2 par r'^2, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}r^2r'^2&=a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2\\&=(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2;\end{aligned}$$

donc la valeur numérique de $aa'+bb'$ est inférieure ou tout au plus égale à rr'; et par suite il est clair que R^2 est compris entre les deux quantités

$$r^2+r'^2+2rr', \qquad r^2+r'^2-2rr',$$

ou, ce qui est la même chose, entre

$$(r+r')^2 \quad \text{et} \quad (r-r')^2.$$

Donc le module R est compris entre la somme et la différence des modules r et r'. La démonstration est exactement semblable, lorsqu'au lieu de la somme des expressions imaginaires on considère leur différence.

376. Lemme II. *Le produit de deux quantités a pour module le produit de leurs modules.*

En effet, la multiplication donne

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1};$$

et si on prend le module de ce produit, on trouve

$$\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}=\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)},$$

résultat conforme à l'énoncé.

Corollaire 1[er]. Donc le produit d'un nombre quelconque de facteurs doit avoir pour module le produit des modules de tous les facteurs.

Corollaire 2[e]. De là, en supposant tous les facteurs égaux entre eux et leur nombre égal à n, on conclut que la $n^{\text{ème}}$ puissance d'une expression imaginaire a pour module la $n^{\text{ème}}$ puissance de son module.

377. LEMME III. *Pour qu'une quantité de la forme* $a+b\sqrt{-1}$ *soit nulle, il est nécessaire et il suffit que son module soit égal à zéro.*

En effet, a et b étant des quantités réelles, supposons qu'on ait

$$a+b\sqrt{-1}=0.$$

Comme la partie réelle a ne peut pas détruire la partie imaginaire $b\sqrt{-1}$, il faudra qu'on ait séparément $a=0$ et $b=0$; donc

$$\sqrt{a^2+b^2}=0,$$

c'est-à-dire que le module de la quantité $a+b\sqrt{-1}$ doit être zéro. Cette condition suffit évidemment, car a et b étant des quantités réelles, leurs carrés sont des quantités positives et la somme a^2+b^2 ne peut pas être zéro à moins qu'on ait $a=0$ et $b=0$.

Corollaire. Il est manifeste qu'un produit de plusieurs quantités réelles ne sera pas nul si aucune de ces quantités n'est égale à zéro. Mais quand il y a des facteurs imaginaires, il n'est pas évident qu'après la multiplication les termes du produit ne puissent pas s'entre-détruire sans que cela arrive dans l'un des fac-

teurs. Or voici comment on démontre que dans ce cas encore il faut qu'un facteur soit zéro.

Pour que le produit soit nul, il faut que le module de ce produit soit nul. Or, le module est le produit des modules des différens facteurs (376); et comme ces modules sont des quantités réelles, leur produit ne peut pas devenir zéro à moins qu'un d'eux ne le soit. Mais alors le facteur auquel correspond ce module doit lui-même être nul; donc en général le produit de plusieurs facteurs ne peut pas devenir nul à moins qu'un des facteurs ne soit nul.

378. Lemme IV. *Soit un polynôme* X *de la forme*

$$X = x^m - Px^{m-1} - Qx^{m-2} \ldots - U,$$

dans lequel tous les termes qui viennent après le premier ont des coefficiens essentiellement négatifs. Si on fait croître x *positivement au-delà d'une certaine limite, les valeurs du polynôme* X *seront continuellement positives et croissantes, et pourront devenir aussi grandes qu'on voudra.*

On peut écrire X comme il suit

$$X = x^m\left(1 - \frac{P}{x} - \frac{Q}{x^2} \ldots - \frac{U}{x^m}\right).$$

Alors, si on fait croître x positivement, on voit que les termes négatifs compris dans les parenthèses iront en décroissant et qu'on pourra rendre leur somme aussi petite qu'on voudra. Une fois que x aura atteint une valeur λ qui rendra cette somme moindre que 1, il est clair que la quantité renfermée entre les parenthèses sera positive et croissante. Elle ne pourra point surpasser l'unité, mais elle en pourra différer aussi peu qu'on voudra. D'un autre côté, le facteur x^m va aussi en augmentant et peut surpasser toute limite; donc, à partir de $x = \lambda$, on est sûr que X doit croître positivement jusqu'à l'infini.

Remarque. Le nombre des termes négatifs de la parenthèse est en général égal à m, mais il peut être moindre parce que quelques uns d'entre eux peuvent être nuls. Soit n le nombre des termes restans, et posons les égalités

$$\frac{P}{x}=\frac{1}{n},\quad \frac{Q}{x^2}=\frac{1}{n},\ldots\ \frac{U}{x^m}=\frac{1}{n}:$$

on en tirera ces valeurs de x,

$$x=nP,\quad x=\sqrt{nQ},\ldots\ x=\sqrt[m]{nU}$$

et il est clair qu'en faisant x égal à la plus grande de ces valeurs, le polynôme X sera positif. Ainsi, on pourra prendre λ égal à cette valeur.

379. Procédons maintenant à la démonstration du théorème fondamental que nous avons en vue.

THÉORÈME. *Une équation de degré quelconque, à coefficiens réels ou imaginaires, a toujours au moins une racine.*

PREMIÈRE PARTIE. La démonstration générale exige que l'on considère d'abord le cas particulier de l'équation binôme. Supposons cette équation ramenée à la forme

$$x^m=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

α et β désignant des quantités réelles qui peuvent être nulles, ensemble ou séparément. Il s'agit de prouver qu'il existe une valeur de x, de la forme $a+b\sqrt{-1}$, propre à vérifier l'équation ci-dessus.

Lorsque le degré m est égal à une puissance de 2, la détermination de x revient à extraire de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ plusieurs racines carrées successives. Or, on a vu (259) qu'on parvient toujours à exprimer ces racines sous la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Lorsque le degré m est un produit de facteurs égaux à 2 et d'un nombre impair quelconque, la détermination revient à extraire de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ plusieurs racines carrées successives, puis à la fin une racine de degré impair. Les racines carrées pouvant toutes s'exprimer sous la forme $a+b\sqrt{-1}$, il reste à examiner s'il est possible de représenter la racine de degré impair par une quantité de la même forme. Or, il est évident que cette question sera résolue, et que le théorème sera démontré à l'égard de l'équation binôme, si on prouve que m étant impair, il existe encore

une valeur de x propre à vérifier l'équation $x^m = \alpha + \beta\sqrt{-1}$: tel est l'objet des raisonnemens suivans.

La vérité de la proposition se reconnaît facilement quand l'une des quantités α et β est zéro. D'abord, si $\beta = 0$, l'équation binôme se réduit à

$$x^m = \alpha;$$

et, quel que soit le signe de α, le radical d'ordre impair $x = \sqrt[m]{\alpha}$ doit avoir une valeur réelle, laquelle est racine de l'équation.

Si $\alpha = 0$, l'équation binôme se réduit à

$$x^m = \beta\sqrt{-1}.$$

Alors, en posant $x = x'\sqrt{-1}$, on aura $x^m = \pm x'^m\sqrt{-1}$ (on doit prendre $+$ ou $-$ suivant que m est un multiple de 4 augmenté de 1 ou de 3). Par suite l'équation devient $x'^m = \pm\beta$. Or celle-ci a une racine réelle; donc l'équation $x^m = \beta\sqrt{-1}$ en aura une de la forme $x = b\sqrt{-1}$.

Considérons les cas où ni α ni β n'est égal à zéro. En mettant tous les termes dans le premier membre, l'équation sera

$$x^m - (\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0,$$

ou, plus simplement,

$$X = 0,$$

en posant

$$X = x^m - (\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

Si on remplace x par l'expression

$$x = a + b\sqrt{-1},$$

X se transformera en une expression semblable

$$X = A + B\sqrt{-1},$$

A et B étant des polynômes entiers en a et b, dans lesquels $\sqrt{-1}$ n'entre point. Or, je vais prouver qu'il existe des valeurs réelles de a et b qui font évanouir le module $\sqrt{A^2 + B^2}$ de X.

Représentons par ρ, ν, V, les modules des quantités

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad a+b\sqrt{-1},\quad A+B\sqrt{-1},$$

de telle sorte qu'on ait

$$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \nu=\sqrt{a^2+b^2},\quad V=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Par le lemme II (cor. 2ᵉ), on sait que le module de x^m sera ν^m; et, d'après le lemme Iᵉʳ, le module V de X ne peut être inférieur à la différence entre ν^m et ρ. Donc, en choisissant x de manière qu'on ait $\nu^m > 2\rho$ ou $\nu > \sqrt[m]{2\rho}$, on devra avoir $V > 2\rho - \rho$ ou $V > \rho$.

Au contraire, on aura $V < \rho$ si on prend $b = 0$ et $a^m = \alpha$: car alors la valeur de x^m se réduit à a^m ou α, et par conséquent

$$X=\alpha-(\alpha+\beta\sqrt{-1})=-\beta\sqrt{-1};$$

donc $V^2=\beta^2$; donc $V^2<\alpha^2+\beta^2$ ou $V<\rho$.

On apprend par là qu'en faisant varier a et b de toutes les manières possibles, la plus petite valeur que puisse prendre le module V sera moindre que ρ. Et il faut bien remarquer que cette valeur *minimum* ne doit correspondre ni à la valeur de x dans laquelle a et b seraient zéro, car alors on aurait $V=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\rho$; ni à une valeur de x dans laquelle a ou b serait infini, car alors on aurait $V=\infty$.

Soit $x = c$ une valeur quelconque réelle ou imaginaire de x, mais assujettie à ces dernières restrictions. Supposons que la valeur correspondante du module V ne soit pas zéro : désignons-la par V', et par C la valeur correspondante de X, laquelle doit aussi être différente de zéro. Si on pose

$$x=c+z,$$

et si on fait attention qu'on a

$$C=c^m-\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

le polynôme X deviendra

$$X=(c+z)^m-\alpha-\beta\sqrt{-1}$$
$$=C+mc^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}z^2\ldots+z^m.$$

Dans ce développement la somme des deux premiers termes s'évanouit en prenant

$$z = \frac{-C}{mc^{m-1}}.$$

Désignons par ι une quantité positive, qu'on pourra choisir aussi petite qu'on voudra, et faisons

$$z = \frac{-C}{mc^{m-1}}\iota :$$

les deux premiers termes du développement deviendront $C(1-\iota)$; et, en mettant C en facteur commun, on pourra écrire

$$X = C(1 - \iota + f\iota^2 + f'\iota^3 + \text{etc.}),$$

$f, f', \ldots$ étant des quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Si on appelle Φ le module de la quantité qui multiplie C, on aura pour celui de X, en vertu du lemme II,

$$V = V'\Phi.$$

D'un autre côté, puisque ι est une quantité réelle, si on nomme $\varphi, \varphi', \ldots$ les modules de $f, f', \ldots$ ceux des quantités $1-\iota$, $f\iota^2$, $f'\iota^3, \ldots$ seront $1-\iota$, $\varphi\iota^2$, $\varphi'\iota^3, \ldots$; et, en vertu du lemme Ier, le module Φ ne devra point surpasser

$$1 - \iota + \varphi\iota^2 + \varphi'\iota^3 + \text{etc.}$$

En mettant cette quantité sous la forme

$$1 - \iota(1 - \varphi\iota - \varphi'\iota^2 - \text{etc.}),$$

on voit que, pour de très-petites valeurs de ι, la quantité entre parenthèses est <1. Par suite la quantité ci-dessus, tout entière, est elle-même <1; donc alors on aurait $\Phi < 1$ et $V < V'$.

Ainsi, lorsque V' n'est point zéro, on peut choisir x de manière que le module V de X devienne inférieur à V'. Donc la plus petite valeur de ce module ne saurait différer de zéro. Or, la valeur de x qui donne $V=0$ est racine de l'équation $X=0$; donc enfin l'équation binôme admet toujours une racine de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

SECONDE PARTIE. Actuellement soit l'équation générale

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle P, Q, R, etc. sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires, de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Posons encore, pour abréger,

$$X = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.};$$

puis remplaçons x par la valeur

$$x = a + b\sqrt{-1}.$$

Il viendra un résultat de la forme

$$X = A + B\sqrt{-1},$$

A et B étant des polynômes en a et b où $\sqrt{-1}$ n'entre point; et pour que l'équation [A] soit vérifiée, il faut et il suffit que le module $\sqrt{A^2+B^2}$ de X soit zéro (377). Or, l'objet des explications suivantes est de prouver qu'il existe en effet des valeurs réelles de a et b qui doivent anéantir ce module.

Représentons par $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ les modules des coefficiens P, Q, R, etc., par ν le module de l'expression $x = a + b\sqrt{-1}$, et par V celui de X. En vertu du lemme II, quand on substitue $a+b\sqrt{-1}$ à la place de x, les puissances x^m, x^{m-1}, $x^{m-2}, \ldots$ ont pour modules ν^m, ν^{m-1}, $\nu^{m-2}, \ldots$; et les différens termes

$$x^m, \quad Px^{m-1}, \quad Qx^{m-2}, \quad Rx^{m-3}, \quad \text{etc.},$$

qui composent X, auront pour modules

$$\nu^m, \quad \rho\nu^{m-1}, \quad \rho'\nu^{m-2}, \quad \rho''\nu^{m-3}, \quad \text{etc.}$$

Donc, par le lemme Ier, on est sûr que le module du polynôme

$$Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{etc.}$$

ne devra point surpasser la somme

$$\rho\nu^{m-1} + \rho'\nu^{m-2} + \rho''\nu^{m-3} + \text{etc.};$$

et que, par suite, le module V du polynôme X ne devra point être inférieur à la différence

$$[1] \qquad v^m - \rho v^{m-1} - \rho' v^{m-2} - \rho'' v^{m-3} - \text{etc.}$$

On suppose cette différence positive, autrement il faudrait la prendre en signe contraire.

En donnant à v des valeurs de plus en plus grandes, à partir d'une certaine limite, on sait que l'expression [1] sera constamment positive et croissante jusqu'à l'infini (378). Par conséquent le module V, qui ne doit jamais être au-dessous de cette différence, peut lui-même acquérir des valeurs plus grandes que toute limite.

Si on attribuait une valeur infinie à a ou à b, le module v de x serait infini. D'après ce qui vient d'être dit, l'expression [1] le serait donc aussi, et par suite le module V. Mais tant que a et b n'auront point de valeurs infinies, il est évident, par la nature même des polynômes A et B, que ce module ne devra pas devenir infini. De là il suit que, s'il ne peut devenir zéro par aucune valeur de x, on est au moins assuré qu'il en existe une, formée avec des valeurs finies de a et b, qui donne pour V une quantité au-dessous de laquelle il ne pourra tomber aucune autre valeur de ce module. Toute la question se réduit donc à prouver que ce *minimum* n'est autre que zéro.

Soit $x = c$ une valeur particulière de x, laquelle peut être réelle ou imaginaire; soit C la valeur correspondante de X, laquelle est supposée différente de zéro; et soit V' le module de C. Si on prend pour x une valeur $x = c + z$, différente de c, il en résultera pour X un développement tel que

$$[2] \qquad X = C + C'z + \tfrac{1}{2}C''z^2 + \text{etc.},$$

Admettons d'abord que C' ne soit pas zéro, et prenons

$$z = -\frac{C}{C'}\,\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive qu'on peut choisir aussi petite qu'on veut. L'expression [2] pourra s'écrire ainsi

$$X = C\,(1 - \varepsilon + f\varepsilon^2 + f'\varepsilon^3 + \text{etc.}),$$

$f, f', \ldots$ étant encore des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$. On pourra donc reconnaître ici, comme à la page 345, que des valeurs très-petites de ε rendront le module $V < V'$.

Admettons à présent que, dans l'expression [2], C' soit zéro, et qu'à partir de ce coefficient le premier qui diffère de zéro soit celui de x^n. En le désignant par C_1, et les suivans par C_2, C_3, etc., l'expression [2] sera simplement

$$[3] \qquad X = C + C_1 z^n + C_2 z^{n+1} + \text{etc.}$$

Si on pose l'égalité

$$z^n = -\frac{C}{C_1},$$

la quantité $-\frac{C}{C_1}$ pourra se ramener à la forme $a + b\sqrt{-1}$, et l'on sait, par ce qui a été dit pour le cas de l'équation binôme, qu'il existe une valeur de z propre à vérifier cette égalité. Nommons z' cette valeur et prenons

$$z = z'\varepsilon,$$

ε étant encore une quantité positive aussi petite qu'on voudra. En remarquant que $z'^n = \frac{-C}{C_1}$, l'expression [3] se changera en celle-ci

$$X = C(1 - \varepsilon^n + f_1\varepsilon^{n+1} + f_2\varepsilon^{n+3} + \text{etc.}),$$

dans laquelle $f_1, f_2, \ldots$ désignent toujours des coefficiens de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

En raisonnant encore comme à la page 345 déjà citée, on voit évidemment que les très-petites valeurs de ε rendront le module de l'expression ci-dessus moindre que celui de C, c'est-à-dire qu'on aura $V < V'$.

Ainsi, lorsque V' n'est point zéro, on peut toujours choisir x de manière que le module V du polynôme X soit moindre que V'. Donc la plus petite valeur de V ne doit point différer de zéro; et par conséquent la valeur de x à laquelle correspond ce *minimum* est une racine de l'équation [A]. Sans assigner ici la valeur de cette racine, et sans examiner s'il existe plusieurs valeurs de x qui puissent donner $V = 0$, on n'en peut pas moins conclure avec

certitude qu'*une équation de degré quelconque, à coefficiens réels ou imaginaires, a toujours au moins une racine de la forme* $a+b\sqrt{-1}$.

Composition des équations.

380. Théorème. *Si une quantité* a *est racine d'une équation, le premier membre de cette équation est exactement divisible par le binôme* $x-a$.

Dans cet énoncé, on suppose que l'équation est de la forme

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0.$$

Pour abréger, je désignerai son premier membre par X, de sorte que l'équation sera elle-même désignée plus simplement par $X=0$.

Divisons X par $x-a$: comme le diviseur est du premier degré, on pourra pousser l'opération jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui ne contienne plus x. Nommons Y le quotient et Z le reste, on aura

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=(x-a)Y+Z.$$

Si on fait $x=a$, le produit $(x-a)Y$ sera nul : car $x-a$ devient zéro, et Y ne peut pas devenir infini attendu que x n'y entre pas en dénominateur. D'ailleurs Z ne change pas, puisque x n'y entre pas; donc l'égalité précédente se réduit à

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}+\text{etc.}=Z.$$

De là on tire cette conséquence remarquable que, quel que soit a, le reste Z de la division de X par $x-a$ s'obtient en changeant x en a dans X. Donc, lorsque a est racine de l'équation $X=0$, le reste Z sera nul; donc alors X est exactement divisible par $x-a$.

Autre démonstration. Quelle que soit la quantité a, le polynôme X peut s'écrire ainsi :

$$X=\begin{cases}(x^m-a^m)+P(x^{m-1}-a^{m-1})+Q(x^{m-2}-a^{m-2})\ldots+T(x-a)\\+a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots+Ta+U.\end{cases}$$

La première ligne contient les différences $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc., lesquelles sont toutes divisibles par $x - a$; donc la seconde ligne est le reste indépendant de x qu'on doit obtenir en divisant X par $x - a$. Or, il est évident que ce reste n'est autre chose que le résultat de la substitution de x au lieu de a dans le polynôme X; donc, lorsque a est racine de l'équation $X = 0$, le polynôme X est divisible par $x - a$.

Remarque. Par cette dernière démonstration, on voit aussi que pour avoir le quotient de X par $x - a$ il n'y a qu'à diviser $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc. par $x - a$, et à ajouter entre eux tous les quotiens, après avoir multiplié le 2[e] par P, le 3[e] par Q, etc. Ces divers quotiens sont faciles à former, et il vient

$$\frac{X}{x-a} = x^{m-1} \left.\begin{matrix} +a \\ +P \end{matrix}\right| x^{m-2} \left.\begin{matrix} +a^2 \\ +Pa \\ +Q \end{matrix}\right| x^{m-3} \ldots \begin{matrix} \ldots + a^{m-1} \\ \ldots + Pa^{m-2} \\ \ldots + Qa^{m-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T. \end{matrix}$$

Au reste, tout ce qu'on vient de démontrer dans ce n° était déjà connu (53).

381. Théorème. *Un polynôme* X *de la forme* $x^m + Px^{m-1} +$ etc., *est toujours le produit de* m *facteurs simples tels que* $x - a$, $x - b$, etc. *Par suite l'équation* $X = 0$ *peut avoir* m *racines, et jamais davantage.*

Ici on suppose admis que toute équation algébrique a au moins une racine réelle ou imaginaire. Soit donc a une racine de l'équation $X = 0$; le polynôme X doit être divisible par $x - a$ (380), le premier terme du quotient sera évidemment x^{m-1}, et en désignant ce quotient, d'une manière abrégée, par $x^{m-1} +$ etc., on aura

$$X = (x - a)(x^{m-1} + \text{etc}).$$

Puisque toute équation a une racine, il existe une valeur b qui, mise à la place de x, anéantit $x^{m-1} +$ etc.; donc ce facteur est divisible par $x - b$; donc, si on désigne le quotient par $x^{m-2} +$ etc., on aura $x^{m-1} + \text{etc.} = (x - b)(x^{m-2} + \text{etc.})$, et par suite

$$X=(x-a)(x-b)(x^{m-2}+\text{etc.}).$$

En répétant le même raisonnement, on décompose le polynôme $x^{m-2}+$ etc. comme on a décomposé le précédent $x^{m-1}+$etc.; et en continuant ainsi, chaque opération mettra en évidence un nouveau facteur du 1er degré en même temps qu'elle diminuera d'une unité le degré du dernier quotient. On arrivera donc enfin à un quotient qui lui-même sera du 1er degré, et dont le premier terme sera x. Par conséquent, si on désigne ce quotient par $x-l$, le polynôme X sera décomposé en m facteurs comme il suit :

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

A quoi il faut ajouter que les binômes $x-a$, $x-b$, etc. étant des facteurs premiers, dans le sens expliqué n° 371, il n'y a aucun autre système de facteurs premiers qui puisse reproduire X. Ainsi, on est sûr qu'aucun binôme nouveau $x-\alpha$ ne peut être un diviseur de X.

Corollaire. La possibilité de la décomposition précédente étant établie, on reconnaît sur-le-champ que l'équation $X=0$ doit avoir m racines; car son premier membre devient nul par chacune des valeurs $x=a$, $x=b$, $x=c$,... $x=l$. De plus, elle ne peut pas avoir d'autres racines; car s'il en existait une nouvelle, α, le binôme $x-\alpha$ serait un nouveau diviseur de X, ce qui est impossible (*).

(*) On peut éviter la considération des facteurs premiers en observant que si on remplace x par une quantité α différente de a, de b,... de l, il n'est pas pas possible que X devienne zéro, puisqu'aucun de ses facteurs ne s'anéantit; donc l'équation $X=0$ n'a point d'autres racines que a, b,... l.

Donc aussi, X ne saurait être divisible par un binôme $x-\alpha$, différent de $x-a$, de $x-b$, etc. Car si cela était, X deviendrait zéro en faisant $x=\alpha$, et par conséquent α serait une nouvelle racine de l'équation $X=0$.

Ce raisonnement est fondé sur ce qu'un produit ne peut pas être nul lorsqu'aucun de ses facteurs ne l'est. Cette assertion, ainsi qu'on l'a déjà remarqué dans le coroll. du n° 377, est évidente d'elle-même quand les facteurs sont réels. Mais ici les lettres x, a, b, c, ... peuvent représenter des quantités imaginaires, et il n'est plus évident que les termes du produit ne puissent point se détruire entre eux sans que cela arrive dans l'un des facteurs. Par cette raison, la démonstration du texte doit être préférée, à moins qu'on ne veuille s'appuyer sur le corollaire qu'on vient de citer.

Remarque. Si quelques unes des quantités a, b, c,... sont égales entre elles, il n'y a plus alors m valeurs différentes de x qui vérifient l'équation. Cependant on est convenu de considérer toujours le degré de l'équation comme indiquant le nombre des racines; mais alors on sous-entend que plusieurs de ces racines peuvent devenir égales. Ainsi, en supposant qu'il y ait dans l'équation α facteurs égaux à $x-a$, on dira que parmi les racines il y en a α qui sont égales à a.

382. THÉORÈME. *Dans toute équation ramenée à la forme ordinaire, les coefficiens sont composés avec les racines* a, b, c,... *ainsi qu'il suit :*

Le coefficient du 2e terme, pris avec un signe contraire, est la somme des racines ;

Le coefficient du 3e terme est la somme des produits des racines multipliées deux à deux ;

Le coefficient du 4e terme, pris avec un signe contraire, est la somme des produits des racines multipliées trois à trois ;

Ainsi de suite, en ayant soin de changer les signes des coefficiens de termes de rang pair ;

Enfin, le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair, est le produit de toutes les racines.

On sait (212) que dans le produit de plusieurs binômes tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$,... le coefficent du 2e terme est égal à la somme des seconds termes des binômes, que le coefficient du 3e terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux, etc. Or, on a vu tout à l'heure que dans une équation de la forme $x^m+Px^{m-1}+\text{etc.}=0$ le premier membre est composé de m facteurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., et que les quantités a, b, c, etc. sont les racines de cette équation. On pourra donc appliquer ici les règles qu'on vient de rappeler, pourvu qu'on ait soin d'y remplacer a, b, c,... par $-a$, $-b$, $-c$,... c'est-à-dire, par les racines elles-mêmes, prises avec des signes contraires. De là résulte le théorème énoncé.

383. *Remarque.* Il semble, au premier coup-d'œil, que ces relations pourront faire connaître les racines. En effet, elles donnent sur-le-champ des équations, dans lesquelles entrent ces

acines, et qui sont en nombre égal aux coefficiens de l'équation ıbstraction faite du premier terme dont le coefficient est l'unité). Or le nombre de ces coefficiens est égal au degré de l'équation; insi on aura autant d'équations que de racines inconnues. Mais nalheureusement, quand on cherche à les résoudre, on est oujours ramené à l'équation proposée elle-même, de sorte que a question ne fait aucun progrès.

Pour plus de simplicité, je prendrai l'équation du 3ᵉ degré

$$[1] \qquad x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

En désignant les trois racines par a, b, c, on aurait, pour déterminer ces racines, les trois relations

$$P = -a - b - c,$$
$$Q = ab + ac + bc,$$
$$R = -abc.$$

Pour en déduire une équation qui ne contienne plus que la seule nconnue a, le procédé le plus simple consiste à multiplier la 1ʳᵉ par a^2, la 2ᵉ par a, et à les ajouter ensuite avec la 3ᵉ, membre à nembre. Il vient d'abord

$$\begin{aligned} Pa^2 + Qa + R = &- a^3 - a^2b - a^2c \\ &+ a^2b + a^2c + abc \\ &- abc; \end{aligned}$$

ɔuis, en effectuant les réductions et transposant a^3,

$$a^3 + Pa^2 + Qa + R = 0.$$

Les inconnues b et c sont ainsi éliminées, mais on arrive à une équation tout-à-fait semblable à la proposée, et dont la résolution doit par conséquent offrir les mêmes difficultés.

Il en serait encore de même de l'équation qui ne renferme que b ou c. En effet, si au lieu de multiplier les deux premières équations par a^2 et a, on les multipliait respectivement par b^2 et par b, ou bien par c^2 et par c, et si ensuite on les ajoutait avec la 3ᵉ, on obtiendrait ces équations,

$$b^3 + Pb^2 + Qb + R = 0, \quad c^3 + Pc^2 + Qc + R = 0;$$

et l'on voit qu'on est toujours ramené à des équations entièrement semblables à la proposée.

On pourrait croire qu'en cherchant quelqu'autre procédé d'élimination, il serait possible de parvenir à une équation d'une résolution plus facile. Mais voici un raisonnement qui doit convaincre du contraire. Les trois inconnues a, b, c, entrent de la même manière dans les trois équations, de telle sorte que ces équations ne changent point quand on fait entre a, b, c, telle permutation qu'on voudra. De là il suit que les mêmes calculs qui conduisent à l'équation finale en a doivent se répéter pour avoir l'équation finale en b ou en c, avec cette seule différence qu'on remplacera partout a par b ou par c. Chacune de ces trois équations finales doit donc à elle seule déterminer les valeurs des trois racines de l'équation proposée [1], et par conséquent aucune d'elles ne saurait être différente de cette équation elle-même.

On arrive encore plus rapidement à cette conclusion en observant que chacune des lettres a, b, c, représente indifféremment telle racine qu'on voudra. Donc, lorsqu'on aura trouvé par un moyen quelconque une équation qui ne renfermera plus que a, ou b, ou c, elle devra déterminer pour valeurs de cette inconnue les racines mêmes de l'équation proposée, et par conséquent être toute semblable à cette équation.

Observations auxquelles donnent lieu les racines imaginaires.

384. On suppose ordinairement que les coefficiens des équations algébriques sont réels; mais on atteindra une plus grande généralité en les considérant comme représentant des expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles : car cette hypothèse comprend la première en faisant $b=0$. Dans le n° 379, c'est en donnant aux coefficiens ce degré d'étendue, qu'il a été reconnu qu'une équation algébrique a toujours au moins une racine de la forme $a+b\sqrt{-1}$, réelle ou imaginaire; et maintenant je veux faire remarquer qu'en admettant cette proposition comme démontrée, les m racines de l'équation $X=0$ ou

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0$$

doivent toutes avoir la même forme $a+b\sqrt{-1}$.

En effet, soit $x=a+b\sqrt{-1}$ la racine dont l'existence est démontrée. On sait que le polynôme x^m+etc. est divisible par $x-(a+b\sqrt{-1})$. Or, quand on effectue cette division, les quantités $a+b\sqrt{-1}$, P, Q, etc. ne peuvent se combiner que par addition, par soustraction, et par multiplication; donc le quotient $x^{m-1}+$ etc. aura encore tous ses coefficiens de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Par suite, l'équation $x^{m-1}+$ etc. $=0$ aura aussi au moins une racine $a'+b'\sqrt{-1}$ de cette forme, et en divisant le polynôme $x^{m-1}+$etc. par $x-(a'+b'\sqrt{-1})$, les coefficiens du quotient $x^{m-2}+$etc. seront encore de la même forme. En continuant de raisonner ainsi, il est clair que le polynôme primitif X se trouvera décomposé en m facteurs tels que $x-(a+b\sqrt{-1})$, et que par conséquent les racines de l'équation seront toutes de cette forme.

385. Si on considère deux équations conjuguées,

$$[1] \quad Y+Z\sqrt{-1}=0, \qquad [2] \quad Y-Z\sqrt{-1}=0,$$

qui ne diffèrent que par le signe de $Z\sqrt{-1}$, et dans lesquelles Y et Z sont des polynômes en x dont tous les coefficiens sont des nombres réels; les racines de l'une seront les quantités conjuguées des racines de l'autre. En effet, soit $x=a+b\sqrt{-1}$ une racine de l'équation [1], et soit $Y'+Z'\sqrt{-1}$ le quotient de son premier membre par $x-a-b\sqrt{-1}$; on aura identiquement

$$[3] \quad (Y'+Z'\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})=Y+Z\sqrt{-1}.$$

En effectuant la multiplication indiquée dans le premier membre, on trouve le produit

$$(x-a)Y'+bZ'+[(x-a)Z'-bY']\sqrt{-1}=Y+Z\sqrt{-1}.$$

Or, en changeant dans les deux facteurs Z en $-Z$ et b en $-b$,

on voit que, dans le produit, la partie qui ne contient pas $\sqrt{-1}$ reste la même, et que celle qui contient $\sqrt{-1}$ change seulement de signe; donc, par cela seul qu'on a l'égalité identique [3], on doit aussi avoir

$$[4] \quad (Y'-Z'\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})=Y-Z\sqrt{-1}.$$

De là on conclut que $x=a-b\sqrt{-1}$ est racine de l'équation [2] : c'est-à-dire qu'on obtiendra toutes les racines de cette équation [2], en changeant le signe de $\sqrt{-1}$ dans celles de l'équation [1].

Si on ne fait attention qu'aux racines réelles, cette conclusion montre qu'elles sont les mêmes dans les deux équations.

386. Une particularité remarquable se présente lorsque les coefficiens P, Q, R,... sont réels : c'est qu'alors l'équation ne peut pas avoir une racine imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ sans en avoir une seconde égale à $a-b\sqrt{-1}$. En effet, supposons qu'après avoir divisé X par $x-a-b\sqrt{-1}$ on réunisse tous les termes du quotient qui contiennent $\sqrt{-1}$, et que ce quotient soit représenté par $Y+Z\sqrt{-1}$, de telle sorte qu'on ait

$$[5] \quad X=(Y+Z\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}).$$

En effectuant la multiplication, le produit pourra s'écrire ainsi :

$$[6] \quad X=(x-a)Y+bZ+[(x-a)Z-bY]\sqrt{-1}.$$

Mais puisque X est un polynôme qui ne contient pas $\sqrt{-1}$, la partie qui, dans ce produit, multiplie $\sqrt{-1}$, doit s'anéantir d'elle-même; donc on doit avoir simplement

$$X=(x-a)Y+bZ.$$

Maintenant, dans les deux facteurs de l'expression [5] changeons Z en $-Z$ et b en $-b$. Pour avoir le nouveau produit, il suffira de faire les mêmes changemens dans l'expression [6], et par

là elle ne subit pas d'autre altération que celle du signe de la partie affectée de $\sqrt{-1}$. Or, on vient de voir que cette partie est nulle d'elle-même ; donc, on retrouve encore pour produit le polynôme X. Ainsi l'on doit avoir

$$X=(Y-Z\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1});$$

donc la valeur $x=a-b\sqrt{-1}$ est racine de l'équation $X=0$.

Il suit de là que les racines imaginaires de cette équation sont en nombre pair et peuvent se grouper par couples de la forme $x=a\pm b\sqrt{-1}$. En multipliant entre eux les deux facteurs du 1[er] degré, correspondant à un tel couple, il vient

$$(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})=(x-a)^2+b^2.$$
$$=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

Ce produit est un trinôme réel du 2[e] degré, c'est-à-dire, que ses coefficiens sont réels.

On peut donc regarder comme démontrée cette belle proposition : *Qu'une équation algébrique à coefficiens réels est toujours composée d'autant de facteurs réels du 1[er] degré qu'elle a de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du 2[e], qu'elle a de couples de racines imaginaires.*

CHAPITRE XVI.

Transformation des équations. Recherche des diviseurs. Théorie des racines égales.

Transformation des équations.

387. Considérée d'une manière générale, la transformation des équations a pour objet de déduire d'une équation donnée une nouvelle équation dont les racines aient avec celles de la première une relation connue. Les questions suivantes, quoique fort simples, suffiront pour comprendre le but de cette théorie et les procédés qu'elle emploie.

Question I. *Une équation étant donnée, changer les signes de ses racines.*

Par là on veut dire qu'il faut trouver une équation dont les racines soient celles qu'on obtiendrait en changeant les signes des racines de l'équation donnée; donc, si on appelle x l'inconnue de l'équation donnée, et y celle de l'équation transformée, on devra avoir $x = -y$. Ainsi il faut remplacer x par $-y$ dans l'équation donnée. Il est clair, en effet, que si une quantité a est racine de l'une des deux équations, la quantité $-a$ sera racine de l'autre.

Soit l'équation donnée

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Après la substitution, les coefficiens seront évidemment les mêmes, avec cette seule différence, que ceux des puissances impaires de l'inconnue auront des signes contraires. Si m est pair, le premier terme de la nouvelle équation sera donc y^m, et si m est impair, il sera $-y^m$. Mais comme il est permis de changer tous les signes

de l'équation, on peut dans ce dernier cas rendre le premier terme égal à y^m, et alors ce seront les coefficiens des puissances paires qui prendront des signes contraires.

Par exemple, si l'équation est

$$x^3-5x^2-5x+1=0,$$

la transformée qui aura les mêmes racines, mais de signes contraires, sera

$$x^3+5x^2-5x-1=0.$$

388. Question II. *Former l'équation dont les racines soit réciproques de celles d'une équation donnée*

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0.$$

Deux quantités dont le produit est 1 sont dites *réciproques* l'une de l'autre. Ainsi les racines de l'équation [A] étant $a, b, c,\ldots$ celles de la transformée doivent être $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, ...; par conséquent il suffira de changer dans [A] x en $\frac{1}{x}$. Par là il vient

$$\frac{1}{x^m}+\frac{P}{x^{m-1}}+\frac{Q}{x^{m-2}}\ldots+\frac{T}{x}+U=0,$$

ou bien, en multipliant par x^m, divisant par U, et renversant l'ordre des termes,

$$x^m+\frac{T}{U}x^{m-1}\ldots\frac{Q}{U}x^2+\frac{P}{U}x+\frac{1}{U}=0.$$

389. Question III. *Multiplier par une quantité quelconque* k *les racines d'une équation donnée*

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0.$$

L'énoncé exige que les racines de la transformée soient les produits qu'on obtiendrait en multipliant par k toutes les racines de l'équation [A]. Ainsi, y étant la nouvelle inconnue, on aura

$$y=kx \quad \text{ou} \quad x=\frac{y}{k};$$

et par suite l'équation [A] se change en celle-ci :

$$\frac{y^m}{k^m}+\frac{Py^{m-1}}{k^{m-1}}+\frac{Qy^{m-2}}{k^{m-2}}\ldots+\frac{Ty}{k}+U=0.$$

Il est bien évident que la substitution de ka au lieu de y dans cette équation donne le même résultat que la substitution de a au lieu de x dans l'équation [A]; de sorte que a ne peut pas être une racine de l'équation en x sans que le produit ka en soit une de l'équation en y.

On multiplie par k^m tous les termes de cette transformée et on l'écrit ainsi :

$$[B] \quad y^m+Pky^{m-1}+Qk^2y^{m-2}\ldots+Tk^{m-1}y+Uk^m=0.$$

Alors on voit que ses coefficiens peuvent se déduire immédiatement de ceux de la proposée [A], en multipliant ces derniers respectivement par k^0, k^1, k^2,... k^m, de telle sorte que dans chaque terme de la nouvelle équation la somme des exposans de k et y soit égale à m.

La transformation précédente comprend celle qui se proposerait de diviser les racines par un nombre k : car celle-ci revient à multiplier les racines par $\frac{1}{k}$, et par conséquent à diviser les coefficiens de l'équation donnée par k^0, k^1, k^2,...

390. QUESTION IV. *Transformer une équation, qui a des coefficiens fractionnaires, en une autre qui n'ait plus de dénominateurs, et dont le premier terme ait toujours l'unité pour coefficient.*

Laissant la quantité k tout-à-fait indéterminée, faisons $x=ky$ et effectuons la transformation du n° précédent. Les coefficiens P, Q,... étant fractionnaires, formons un nombre N qui soit divisible par chaque dénominateur, et prenons $k=N$. Il est clair que dans l'équation [B] les coefficiens Pk, Qk^2,... deviendront entiers. Ainsi, on résout la question *en substituant à la place de l'inconnue* x, *une nouvelle inconnue* y, *multipliée par un nombre* N *qui soit divisible par chacun des dénominateurs.*

Quelquefois on peut prendre pour multiplicateur de y un nombre moindre. Par exemple, soit l'équation

$$x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{4} - \frac{2}{9} = 0.$$

En multipliant ses racines par k, la transformée sera

$$y^3 - \frac{3ky^2}{2} + \frac{5k^2y}{4} - \frac{2k^3}{9} = 0,$$

et les dénominateurs disparaîtront si on prend $k = 4 \times 9$; mais il suffira de prendre $k = 2 \times 3$. En effet, il vient

$$y^3 - 9y^2 + 45y - 48 = 0.$$

391 QUESTION V. *Augmenter ou diminuer d'une quantité k les racines d'une équation donnée*

$$\text{[A]} \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0.$$

Posons $x = y + k$, on aura $y = x - k$; et, par conséquent, en substituant $y + k$ au lieu de x dans [A], on aura une transformée dont les racines sont celles de cette équation diminuées de k. Pour qu'elles fussent augmentées de k il faudrait changer partout k en $-k$.

En opérant la substitution de $y + k$, on a d'abord

$$(y+k)^m + P(y+k)^{m-1} + Q(y+k)^{m-2} \ldots + T(y+k) + U = 0;$$

puis, en développant les puissances,

$$\text{[C]} \quad \left.\begin{array}{r|l|l} y^m + mk & y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}k^2 & y^{m-2} \ldots\ldots + k^m \\ + P & \quad + (m-1)Pk & \qquad\qquad + Pk^{m-1} \\ & \quad + \qquad\qquad Q & \qquad\qquad + Qk^{m-2} \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \qquad\qquad + Tk \\ & & \qquad\qquad + U \end{array}\right\} = 0.$$

Si on voulait présenter cette équation dans un ordre inverse, c'est-à-dire, de manière que les exposans de y fussent croissans, on substituerait dans [A] $k + v$ au lieu de $y + k$. Alors il vient

$$K + K'y + \tfrac{1}{2}K''y^2 + \tfrac{1}{2.3}K'''y^3 \ldots + y^m = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$K = k^m + Pk^{m-1} + Qk^{m-2} \ldots + Tk + U,$$
$$K' = mk^{m-1} + (m-1)Pk^{m-2} + (m-2)Qk^{m-3} \ldots + T,$$
$$K'' = m(m-1)k^{m-2} + (m-1)(m-2)Pk^{m-3} + (m-2)(m-3)Qk^{m-4} + \ldots,$$
$$K''' = m(m-1)(m-2)k^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)Pk^{m-4} + \ldots,$$
etc.

Remarques. Ces quantités K, K', K'', etc. sont liées avec l'équation proposée [A] suivant une loi très-simple sur laquelle il importe de fixer l'attention.

La première K se forme en écrivant k au lieu de x dans le premier membre X.

K' se déduit de K en multipliant chaque terme de K par l'exposant qui affecte k dans ce terme, et en diminuant ensuite cet exposant d'une unité. Comme le terme U équivaut à Uk^0, il doit s'anéantir dans cette opération, puisqu'il est multiplié par zéro.

K'' se déduit semblablement de K'; K''' de K''; et ainsi de suite.

Les quantités K', K'', K''',... portent le nom de *polynômes dérivés*. K' est le polynôme dérivé de K, K'' est le polynôme dérivé de K', etc. On dit encore que K' est le premier polynôme dérivé de K, que K'' est le second, et ainsi des autres.

Les lois précédentes donnent le moyen d'effectuer avec facilité la substitution de $k+y$ à la place de x dans une équation quelconque. Par exemple, soit celle-ci

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0:$$

on aura

$$K = k^3 - 2k^2 - 4k + 5,$$
$$K' = 3k^2 - 4k - 4,$$
$$K'' = 6k - 4,$$
$$K''' = 6;$$

et, par suite, en ayant soin de diviser K'' par 2, et K''' par 2.3, la transformée sera

$$(k^3 - 2k^2 - 4k + 5) + (3k^2 - 4k - 4)y + (3k - 2)y^2 + y^3 = 0.$$

392. QUESTION VI. *Transformer une équation en une autre qui manque d'un certain terme.*

Soit toujours l'équation

$$[A] \quad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0:$$

faisons $x = y + k$, y étant une nouvelle inconnue, et k une indéterminée dont on peut disposer à volonté. Par cette substitution, on obtient l'équation désignée plus haut par [C].

Si on veut que le second terme disparaisse, il faut déterminer k par l'équation

$$mk + P = 0, \quad \text{d'où} \quad k = -\frac{P}{m};$$

et alors la valeur $x = y + k$ devient $x = y - \frac{P}{m}$. Donc *on fait évanouir le second terme d'une équation en substituant, à l'inconnue de cette équation, une nouvelle inconnue, à laquelle on ajoute le coefficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire et divisé par le degré de l'équation.*

Le troisième terme disparaît en posant

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)k^2 + (m-1)Pk + Q = 0.$$

De là on tire en général deux valeurs pour k; par conséquent il existe deux substitutions différentes pour transformer une équation en une autre qui n'ait plus de troisième terme.

L'évanouissement du quatrième terme dépend d'une équation du troisième degré; et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui ne disparaît qu'en déterminant k par une équation toute semblable à la proposée, savoir :

$$k^m + Pk^{m-1} + Qk^{m-2} \ldots + Tk + U = 0.$$

La raison de cette ressemblance est facile à trouver. Égaler à zéro le dernier terme de l'équation en y, c'est supposer qu'une des valeurs de y est nulle : car lorsque cette équation n'a plus de dernier terme, elle se vérifie évidemment en faisant $y = 0$. Par suite la relation $x = y + k$ devient $x = k$; donc, on doit prendre pour k une quelconque des valeurs de x; donc k doit être déterminé par la même équation que x.

393. *Remarques.* Lorsqu'on fait évanouir un terme, il se peut

qu'un ou plusieurs autres disparaissent en même temps; mais il faut pour cela qu'il y ait entre les coefficiens de l'équation donnée quelques relations particulières. Supposons, par exemple, qu'on demande celle qui doit exister pour que le second terme et le troisième disparaissent ensemble. Il faudra qu'on ait à la fois

$$mk+P=0,\quad \tfrac{1}{2}m(m-1)k^2+(m-1)Pk+Q=0.$$

Or, la première équation donne $k=-\frac{P}{m}$; il faut donc que cette valeur satisfasse à la seconde, ce qui donne

$$\frac{m(m-1)P^2}{2m^2}-\frac{(m-1)P^2}{m}+Q=0,$$

ou, réductions faites,

$$Q-\frac{(m-1)P^2}{2m}=0:$$

telle serait la condition cherchée. Si de là on tire la valeur de Q pour la porter dans l'équation [A], on aura la forme générale des équations dont le second et le troisième termes doivent disparaître en même temps.

394. Il ne faut pas croire qu'on puisse, par des transformations successives, faire évanouir d'abord un terme, puis un second, puis un troisième, etc. : car chaque opération ferait reparaître le terme anéanti par la précédente. Soit en effet une équation

$$x^m+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0,$$

qui manque déjà de second terme. La substitution de $y+k$ au lieu de x donne

$$(y+k)^m+Q(y+k)^{m-2}+\text{etc.}=0,$$

ou, en développant,

$$y^m+mky^{m-1}+[\tfrac{1}{2}m(m-1)k^2+Q]y^{m-2}+\text{etc.}=0:$$

or, on voit que la valeur de k qui anéantirait le terme en y^{m-2} serait différente de zéro, et que par conséquent le terme en y^{m-1} reparaîtrait.

395. Souvent la composition des équations montre avec une

grande facilité comment la transformation qu'on effectue, atteint le but proposé. Supposons que l'équation [A] décomposée en facteurs soit

$$[1] \qquad (x-a)(x-b)(x-c)\ldots=0.$$

Si on remplace x par $-x$, et si ensuite on change les signes de tous les facteurs, ce qui est permis, il vient

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots=0,$$

et il est évident, à la seule inspection de cette équation, que ses racines sont égales à celles de la proposée, mais de signes contraires; c'est la transformation du n° 387.

Le changement de x en $\frac{1}{x}$ dans [1] donne

$$\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)\ldots=0.$$

On peut multiplier les facteurs respectivement par $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, \ldots$ et changer le signe de chacun. De cette manière il vient

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\ldots=0,$$

équation qui a évidemment pour racines $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ ainsi que l'exige la question II.

Faisons $x=\frac{y}{k}$, et multiplions chaque facteur par k, ce qui revient à multiplier toute l'équation par k^m, on trouve

$$(y-ka)(y-kb)(y-kc)\ldots=0,$$

équation, dont les racines sont $ka, kb, kc\ldots$ Cette transformation en celle du n° 389.

Faisons comme dans le n° 391, $x=y+k$: l'équation [1] devient

$$(y+k-a)(y+k-b)(y+k-c)\ldots=0;$$

et celle-ci a évidemment pour racines $a-k$, $b-k$, $c-k,\ldots$, c'est-à-dire, les racines de la proposée, chacune diminuée de k.

Lorsque, pour faire évanouir le deuxième terme de l'équation [A], on fait $x = y - \frac{P}{m}$, les racines de la transformée sont

$$a + \frac{P}{m},\quad b + \frac{P}{m},\quad c + \frac{P}{m}, \ldots;$$

donc, en se souvenant que $a + b + c \ldots = -P$ (n° 382), la somme sera

$$a + b + c \ldots + \frac{mP}{m} = -P + P = 0:$$

c'est-à-dire que l'équation en y n'aura point de second terme, ce qui est en effet le but de la transformation.

396. Dans les questions que nous avons traitées, il y avait entre l'inconnue primitive x et la nouvelle inconnue y une relation fort simple : mais quelle que soit cette relation, la marche à suivre sera toujours la même. Ainsi, on exprimera d'abord cette relation par une équation, puis on en tirera la valeur de x en y, puis enfin on substituera cette valeur dans l'équation proposée.

Il pourrait se faire que l'équation de relation entre x en y fût trop compliquée pour être résolue par rapport à x. Alors il faudrait éliminer x entre cette équation et la proposée, par les méthodes qui seront exposées plus tard.

Recherche des diviseurs des équations.

397. La résolution des équations serait complète si l'on pouvait toujours, une équation étant donnée, déterminer un diviseur de cette équation : car alors on descendrait par des réductions successives jusqu'à des équations du 1er degré. En effet, soit

$$X = 0,$$

l'équation proposée, Y un diviseur de X, et Z le quotient; cette équation se changera en

$$YZ = 0.$$

Or, pour satisfaire à celle-ci, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit zéro; ainsi on aurait à résoudre séparément les deux équations

$$Y = 0,\quad Z = 0,$$

qui sont de degré moindre que X. Semblablement chacune d'elles se décomposerait encore en deux autres, et ainsi de suite : de sorte que la résolution de l'équation $X=0$ finirait par s'abaisser à des équations du 1[er] degré. Mais malheureusement nous verrons tout à l'heure qu'en général la recherche des diviseurs est un problème au moins aussi difficile que la résolution de l'équation proposée elle-même.

Quand on parle des diviseurs d'une équation $X=0$, il faut toujours, pour donner plus de précision au langage, entendre que cette équation est ramenée à la forme ordinaire

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0,$$

et que les diviseurs sont aussi des polynômes en x, ayant tous comme X l'unité pour coefficient du 1[er] terme. Alors, tout diviseur d'un degré supérieur au premier ne pourra être qu'un produit de quelques uns des facteurs simples de l'équation : autrement il y aurait plusieurs manières de la décomposer en facteurs premiers, ce qui est impossible.

De là il suit que l'équation doit avoir autant de diviseurs du 2[e] degré, du 3[e], etc., qu'on peut former de produits en multipliant 2 à 2, 3 à 3, etc., ses m facteurs simples. Ainsi, d'après le n° 209,

$$\text{le nombre des diviseurs du 2}^e\text{ degré}=\frac{m(m-1)}{2},$$

$$\text{le nombre des diviseurs du 3}^e=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3},$$

etc.

398. Expliquons maintenant comment on procède à la recherche de ces diviseurs, et supposons qu'on veuille trouver ceux du 2[e] degré.

Ils doivent tous être de la forme x^2+px+q, et les coefficiens p et q doivent être tels qu'on puisse diviser exactement le polynôme X par x^2+px+q. En conséquence, on effectuera cette division jusqu'à ce qu'on ait un reste de degré moindre que ce diviseur, c'est-à-dire, du 1[er] degré; et alors on remarquera que si p et q avaient des valeurs convenables, les termes en x dans ce

reste devraient se détruire entre eux, et les termes sans x s
truire aussi entre eux. Or ce reste sera de la forme Ax
A et B étant des quantités dans lesquelles entrent les inco
p et q combinées avec les coefficiens de l'équation propos
faudra donc poser

$$A=0, \quad B=0;$$

et la résolution de ces équations, si elle était possible, ferai
naître p et q.

Tous les procédés imaginés pour opérer une telle réso
ramènent toujours à résoudre une équation unique qui ne co
plus qu'une seule inconnue, et qu'on nomme *équation final*
méthodes d'élimination seront expliquées plus loin ; mais on
reconnaître dès à présent à quel degré doit s'élever l'éq
finale de laquelle dépend séparément p ou q. En effet, il
avoir autant de valeurs pour p ou q que l'équation a de div
du 2e degré, et par conséquent chacune de ces quantités, co
rée séparément, doit être déterminée par une équation du

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Lorsque $m=3$, ce degré $=3$; mais lorsque m surpasse
est plus grand que m. Ainsi, au-delà du 3e degré, pour con
p ou q, on est conduit à une équation de degré plus élevé
proposée, et par conséquent elle est plus difficile à résoudre
les cas particuliers.

En général, si on cherche un diviseur du degré n, l'équ
finale, de laquelle dépend un coefficient quelconque de ce
seur, doit s'élever au degré

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots n}.$$

Quand on suppose $n=1$ ou $n=m-1$, cette formule de
égale à m. Mais si on fait successivement $n=2, 3, 4\ldots$, elle d
des nombres croissans tant qu'on a

$$n<m-n+1, \quad \text{d'où } n<\frac{m+1}{2};$$

et, passé cette limite, elle donnera des nombres décroissan

seront, dans un ordre inverse, les mêmes que les précédens. Ainsi, la détermination d'un diviseur de degré supérieur à 1, et inférieur à $m-1$, dépend toujours d'une équation plus élevée que la proposée.

399. La recherche des diviseurs d'une équation peut encore se faire par un procédé qui en général est plus commode, et qui consiste à introduire dans le calcul, comme autant d'inconnues distinctes, les coefficiens du quotient aussi bien que ceux du diviseur. Tous ces coefficiens sont en nombre m, et on les déterminera d'après la condition que la multiplication du diviseur par le quotient reproduise l'équation proposée, terme pour terme.

400. Pour première application, je chercherai les diviseurs du 2e degré de l'équation du 3e; et comme on peut toujours faire disparaître le second terme de cette équation, je supposerai qu'elle soit

$$x^3+Qx+R=0.$$

Conformément à la première méthode (398), je diviserai x^3+Qx+R par x^2+px+q.

$$\begin{array}{l|l} x^3+Qx+R & x^2+px+q \\ \hline -x^3-px^2-qx & x-p \\ \hline -px^2+(Q-q)x+R & \\ +px^2+p^2x+pq & \\ \hline (Q-q+p^2)x+R+pq. & \end{array}$$

Parvenu au reste du 1er degré, je dois égaler à zéro le multiplicateur de x dans ce reste, ainsi que la partie indépendante de x: l'on a ainsi ces deux équations

$$p^2-q+Q=0,\quad pq+R=0.$$

De la seconde on tire $q=-\frac{R}{p}$, et par suite la première devient

$$p^3+Qp+R=0.$$

C'est de celle-ci qu'il faudrait tirer les valeurs de p; et ensuite la formule $q=-\frac{R}{p}$ donnerait les valeurs correspondantes de q.

Il est remarquable que cette équation soit toute pareille à la pro-

posée, et c'est ce qu'il était facile de prévoir. En effet, cha(diviseur du 2e degré devant être le produit de deux diviseurs 1er, le coefficient du deuxième terme de ce diviseur est la som de deux racines de l'équation proposée, chacune prise avec signe contraire. Or, cette équation manquant de deuxième ter la somme de ses trois racines est zéro; donc la somme de d quelconques d'entre elles, prises avec des signes contraires, égale à la troisième; donc les valeurs du coefficient p ne s autres que les racines mêmes de l'équation proposée.

401. Pour seconde application, considérons l'équation du degré

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

et cherchons ses diviseurs du 2e degré par le procédé du n° 39 On posera

$$(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q') = x^4 + Qx^2 + Rx + S;$$

et, après avoir effectué la multiplication, on égalera entre eux l multiplicateurs des puissances semblables de x. On a ainsi, pou déterminer les inconnues p, q, p', q', ces quatre équations

$$p + p' = 0,$$
$$q + q' + pp' = Q,$$
$$p'q + pq' = R,$$
$$qq' = S.$$

Les trois premières donnent

$$p' = -p,\ q = \frac{p^3 + Qp - R}{2p},\ q' = \frac{p^3 + Qp + R}{2p};$$

et par suite la quatrième équation devient

$$\frac{(p^3 + Qp - R)(p^3 + Qp + R)}{4p^2} = S,$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$p^6 + 2Qp^4 + (Q^2 - 4S)p^2 - R^2 = 0.$$

Cette équation est du 6e degré; mais comme elle ne contient q des puissances paires de p, on peut prendre p^2 pour inconnue, elle ne sera plus que du 3e. Si on pouvait en tirer les trois vale

de p^2, elles feraient connaître pour p six valeurs, égales deux à deux et de signes contraires, et ensuite on calculerait facilement les valeurs correspondantes de p', q et q'.

Il suffit de connaître une seule valeur de p pour qu'on puisse résoudre l'équation du 4ᵉ degré : car alors elle se décomposera en deux équations du 2ᵉ degré, dont les racines seront celles de la proposée. C'est ainsi que DESCARTES a ramené la résolution du 4ᵉ degré au 3ᵉ ; mais ce procédé reste sans succès pour les degrés supérieurs.

La seule inspection de l'équation en p a suffi pour juger qu'elle doit s'abaisser au 3ᵉ degré, et il semble que ce ne soit là qu'un résultat heureux et tout-à-fait inattendu du calcul. Cependant rien n'était plus facile à prévoir. En effet, si on désigne par a, b, c, d, les quatre racines de l'équation proposée, les valeurs de p devront être

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,$$
$$-b-c,\quad -b-d,\quad -c-d.$$

Or, cette équation n'ayant plus de 2ᵉ terme, on a $a+b+c+d=0$, donc les trois dernières valeurs de p sont égales et de signes contraires aux trois précédentes ; donc l'équation en p ne doit contenir que des puissances paires de p.

402. Je ne quitterai point ce sujet sans donner un dernier exemple de la facilité avec laquelle la composition des équations fait prévoir certaines particularités du calcul.

Soit l'équation complète du 4ᵉ degré

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0;$$

et soit toujours x^2+px+q un quelconque de ses diviseurs du 2ᵉ degré. Ici la somme des racines $a+b+c+d=-P$, et les six valeurs de p ne seront plus égales deux à deux et de signes contraires ; mais ce qu'il y a de très-remarquable, c'est que si on cherche l'équation en p et si on en fait évanouir le 2ᵉ terme au moyen de la règle connue (392), les autres puissances impaires de l'inconnue devront aussi disparaître.

Pour le démontrer, remarquons encore qu'en appelant a, b, c, d, les quatre racines de l'équation en x, les six valeurs de p sont

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,$$
$$-b-c,\quad -b-d,\quad -c-d;$$

par conséquent, si on représente l'équation en p par

$$p^6+P'p^5+\text{etc.}=0,$$

le coefficient P′ sera la somme de ces six quantités prises avec des signes contraires, et l'on aura

$$P'=3(a+b+c+d).$$

Mais pour faire disparaître le second terme de l'équation en p, il faut prendre une nouvelle inconnue p' et poser $p=p'-\frac{1}{6}P'$: or, de cette relation on tire

$$p'=p+\tfrac{1}{6}P';$$

donc en remplaçant, dans cette expression, p par ses diverses valeurs, et P′ par $3(a+b+c+d)$, on aura les six valeurs de p', savoir :

$$p'=-a-b+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-b+c+d),$$
$$p'=-a-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-c+b+d),$$
$$p'=-a-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-d+b+c),$$
$$p'=-b-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-c+a+d),$$
$$p'=-b-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-d+a+c),$$
$$p'=-c-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-c-d+a+b).$$

Or, on voit clairement que les trois dernières sont égales et de signes contraires aux trois premières ; donc l'équation en p' ne devra renfermer que les puissances paires de p'.

Théorie des racines égales.

403. Quand une équation est divisible par une puissance de $x-a$, elle a autant de racines égales à a qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance, et alors cette racine est dite double, triple, quadruple, etc., selon que l'exposant est 2, 3, 4, etc. La recherche des racines égales revient donc à celle des diviseurs tels que $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, etc. ; et sous ce rapport on pourrait la

regarder comme comprise dans celle des diviseurs en général. Mais comme elle constitue à elle seule un point essentiel de la théorie des équations, je dois ici la traiter d'une manière spéciale.

404. Soit l'équation $X=0$ ou

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0.$$

Quand elle a des racines égales à a, il est clair qu'après l'avoir divisée par $x-a$, l'équation résultante doit se vérifier encore en y faisant $x=a$. Or, en introduisant cette hypothèse dans le quotient rapporté n° 380, il devient

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots+T,$$

et ce résultat est le même qu'on obtiendrait en substituant a au lieu de x dans le polynôme

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T;$$

donc ce polynôme, que j'appellerai X', doit s'évanouir par cette substitution ; donc il est divisible par $x-a$: donc $x-a$ est facteur commun à X et à X'.

Réciproquement, si $x-a$ est facteur commun à ces deux polynômes, on sera sûr que l'équation $X=0$ a des racines égales à a : car alors il est évident que la substitution de a au lieu de x fait évanouir à la fois et X et le quotient de X par $x-a$.

On remarquera sans doute que le polynôme X' se déduit de X d'après une loi très-simple, qui a déjà été remarquée (391), et qui lui a fait donner le nom de polynôme dérivé.

Ce qui précède montre bien que le plus grand diviseur commun de X avec X' ne doit contenir que les facteurs égaux de X, mais on ne voit point à quels degrés ils s'y trouvent. Quoiqu'il soit très-facile d'y parvenir par les considérations dont je viens de faire usage, je préfère reprendre en entier la théorie des racines égales par un procédé qu'a indiqué M. Lacroix dans son *Complément des élémens d'algèbre,* et qui me paraît le plus simple.

405. Considérons d'une manière générale les polynômes dérivés de X, et montrons comment ils sont composés avec les facteurs de X. D'abord, par ce qui a été dit dans le n° 391, on sait qu'en changeant x en $x+y$ dans le polynôme X, le résultat de

cette substitution sera un polynôme Y qu'on peut écrire ainsi :

$$Y=X+\frac{X'}{1}y+\frac{X''}{1.2}y^2+\frac{X'''}{1.2.3}y^3\ldots+y^m,$$

en nommant $X', X'', X''', \ldots$ les polynômes dérivés successifs de X.

Maintenant soit

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$$

En changeant x en $x+y$ ou en $y+x$, on aura

$$Y=(y+\overline{x-a})(y+\overline{x-b})(y+\overline{x-c})\ldots.$$

On peut donc regarder Y comme un produit de m binômes, qui ont y pour premier terme, et dont les seconds termes sont $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. Par suite, les règles connues (212) détermineront la composition des multiplicateurs des diverses puissances de y. Ainsi, la partie indépendante de y sera égale au produit des m facteurs $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$; la quantité qui multiplie y sera égale à la somme des produits de ces facteurs multipliés $m-1$ à $m-1$; etc. Tout à l'heure on vient de voir que ces mêmes quantités sont représentées par X, $\frac{X}{1}$, $\frac{X''}{1.2}$, etc. de sorte que la composition des polynômes dérivés se trouve mise en évidence.

Si l'on se borne au seul polynôme X', on pourra donc dire qu'un polynôme du degré m étant donné, son polynôme dérivé est égal à la somme des produits de ses facteurs simples, combinés $m-1$ à $m-1$; et, comme ces produits peuvent s'obtenir en divisant successivement X par chacun des m facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots$ on aura encore

$$X'=\frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\frac{X}{x-c}+\text{ etc.}$$

Cela posé, admettons que l'équation $X=0$ ait des racines égales, ou, ce qui est la même chose, que X renferme des facteurs élevés à des puissances ; et soit

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots$$

On ne prend ici que deux facteurs élevés à des puissances, mais

s'il y en avait davantage, les raisonnemens seraient tout-à-fait les mêmes.

On vient de démontrer que le polynôme X est égal à la somme des quotiens qu'on obtiendra en divisant X successivement par chacun de ses m facteurs simples; donc, puisque n facteurs sont égaux à $x-a$, et n' égaux à $x-b$, on aura

$$X'=\begin{cases} \quad n(x-a)^{n-1}(x-b)^{n}(x-c)(x-d)\ldots \\ +n'(x-a)^{n}(x-b)^{n'-1}(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)^{n}(x-b)^{n'}(x-d)\ldots \\ +(x-a)^{n}(x-b)^{n'}(x-c)\ldots \\ +\text{etc.} \end{cases}$$

Mettons en évidence les facteurs communs aux différentes parties du second membre, et, pour abréger, posons

$$H=\begin{cases} \quad n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots+\text{etc.} \end{cases}$$

on aura

$$X'=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}H.$$

Par là, on voit que le produit $(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}$ divise à la fois les deux polynômes X et X'; et je dis de plus qu'il est leur plus grand diviseur commun. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait au moins qu'un des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., qui sont dans X, pût diviser H : or, $x-a$ manque dans la première partie de H et se trouve dans toutes les autres, $x-b$ manque dans la seconde et se trouve dans toutes les autres, ainsi du reste; donc aucun des facteurs de X n'appartient à H.

Si les exposans n et n' étaient égaux à 1, l'équation X=0 n'aurait que des racines inégales. Alors X' se réduirait à H, et le raisonnement précédent prouverait qu'il n'existe aucun facteur commun entre X et X'.

Donc, *pour qu'une équation* X=0 *ait des racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynôme dérivé aient un diviseur commun; et, si on cherche leur plus grand diviseur commun, on aura le produit de tous les facteurs égaux de* X, *élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.*

par là on est déjà certain que l'équation donnée a des racines égales

On cherche de même le plus grand diviseur commun E entre le polynôme D et son dérivé $D'=3x^2-2x-1$, et l'on trouve

$$E=x-1.$$

On est donc sûr que l'équation a des racines triples; et puisque E est du 1er degré, elle n'en admet point d'un degré de multiplicité supérieur au 3e.

En conservant à X_1, X_2, X_3, le même sens que tout à l'heure, on aura donc

$$\begin{aligned} X_1 X_2^2 X_3^3 &= X = x^7-x^6-4x^5+\text{etc.},\\ X_2 X_3^2 &= D = x^3-x^2-x+1,\\ X_3 &= E = x-1. \end{aligned}$$

En divisant la 1re égalité par la 2e, et la 2e par la 3e, il vient

$$\begin{aligned} X_1 X_2 X_3 &= x^4-3x^2+2,\\ X_2 X_3 &= x^2-1,\\ X_3 &= x-1. \end{aligned}$$

Puis, en traitant encore ces égalités de la même manière, on a

$$X_1=x^2-2,\quad X_2=x+1,\quad X_3=x-1.$$

L'équation, décomposée en facteurs, sera donc

$$(x^2-2)(x+1)^2(x-1)^3=0;$$

et par suite elle se partage en celles-ci

$$x^2-2=0,\quad x+1=0,\quad x-1=0,$$

lesquelles sont faciles à résoudre et donnent

$$x=\pm\sqrt{2},\quad x=-1,\quad x=1;$$

donc enfin l'équation proposée est complètement résolue. $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines simples, -1 est une racine double, $+1$ est une racine triple.

407. Quelquefois on veut décomposer une équation $X=0$ q a des racines égales en deux équations, dont l'une renferme l

racines inégales, et dont l'autre renferme les racines égales, mais chacune une fois seulement. Voici la manière la plus simple d'y parvenir. Après avoir trouvé le plus grand commun diviseur Y entre X et X', on cherchera le quotient de X par Y; et ce quotient, que je nommerai Z, sera le produit de tous les facteurs égaux ou inégaux de X, mais pris chacun une seule fois. On cherchera donc le plus grand commun diviseur V entre Z et Y; et V sera le produit de tous les facteurs simples de X. Puis, on divisera Z par V; et le quotient V_1 sera le produit des facteurs égaux abaissés au 1[er] degré. En conséquence les deux équations demandées seraient

$$V=0,\quad V_1=0.$$

CHAPITRE XVII.

De l'élimination et de quelques unes de ses applications.

Forme générale d'une équation à deux inconnues. Comment on reconnaît que la valeur d'une inconnue convient à deux équations.

408. Lorsqu'une équation algébrique ne contient que des termes entiers et rationnels par rapport aux inconnues, on a déjà dit (66) que le degré de cette équation est la somme des exposans des inconnues, dans le terme où cette somme est la plus forte.

L'équation générale du degré m, entre deux inconnues x et y, doit donc renfermer tous les termes où la somme des exposans de x et de y ne surpasse point m. Or, on peut toujours réunir dans le premier membre, sous un seul multiplicateur, tous les termes où l'une des inconnues, x par exemple, se trouve affectée du même exposant, et ordonner ensuite par rapport aux expo-

sans décroissans de x; par conséquent l'équation générale du degré m peut se mettre sous la forme

$$[A] \quad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Gx + H = 0.$$

Ici A est une quantité qui ne contient point y, autrement le degré de l'équation surpasserait m; B représente un polynôme du premier degré en y de la forme $b + b_1 y$, dans lequel b et b_1 sont des quantités connues ; C est un polynôme de la forme $c + c_1 y + c_2 y^2$; ainsi de suite jusqu'à H, qui représente en général un polynôme du degré m de la forme $h + h_1 y + h_2 y^2 \ldots + h_m y^m$.

Lorsqu'une équation est *incomplète*, c'est-à-dire, lorsqu'elle ne renferme point tous les termes que comporte son degré, il faut supposer, dans l'équation générale, que les coefficiens des termes manquans sont égaux à zéro.

Comme il est toujours permis de diviser une équation par l'un de ses coefficiens, il semble que l'on peut, sans diminuer la généralité de l'équation [A], supposer $A = 1$: mais alors elle ne comprendrait plus celles qui manquent de premier terme. Par exemple, l'équation du second degré

$$x^2 + (b + b_1 y)x + c + c_1 y + c_2 y^2 = 0$$

ne pourrait pas donner l'équation particulière

$$(5 + 2y)x + 3 + 2y - 3y^2 = 0.$$

409. Après avoir divisé l'équation [A] par l'un de ses coefficiens, il en reste autant d'indéterminés qu'il y a de termes, moins un, dans l'équation. Ce nombre est donc égal à $2 + 3 + 4 \ldots + (m+1)$, c'est-à-dire, à

$$\tfrac{1}{2}m[2 + (m + 1)], \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}m(m + 3).$$

Cette formule indique à combien de conditions données une équation du degré m peut satisfaire au moyen d'une détermination convenable de ses coefficiens. Par exemple, on pourra en général faire en sorte qu'elle admette des solutions données en nombre égal à ces coefficiens.

410. C'est ici le lieu d'expliquer comment on reconnaît qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues convient à deux équations.

Soient deux équations

$$M=o, \quad N=o,$$

entre deux inconnues x et y; et soit β une valeur donnée de y. Si on substitue β au lieu de y dans M et N, les résultats, que je désignerai par M' et N', seront en général des fonctions de x. Or, il est évident que la valeur β de y ne convient aux équations proposées qu'autant qu'il existe au moins une valeur de x propre à rendre nulles en même temps les deux quantités M' et N'; donc ces quantités doivent avoir un commun diviseur fonction de x.

Il est clair, d'ailleurs, que cette condition est suffisante : car, si on désigne le commun diviseur par D et si on pose $D=o$, chaque valeur $x=\alpha$, déduite de cette équation, étant substituée dans M' et N', rendra ces polynômes égaux à zéro; et par conséquent, en faisant à la fois $x=\alpha$ et $y=\beta$ dans M et N, ces quantités s'évanouiront, c'est-à-dire que les équations proposées seront satisfaites.

Donc, en général, *deux équations à deux inconnues étant données, pour qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues convienne à ces équations, il est nécessaire et il suffit qu'en la substituant dans ces équations, elle leur fasse acquérir un commun diviseur fonction de l'autre inconnue; et, si l'on égale ce commun diviseur à zéro, on a une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.*

411. Ce principe montre aussi comment il faut s'y prendre pour achever la résolution de deux équations à deux inconnues, lorsqu'on est arrivé, par un moyen quelconque, à une équation $Y=o$, dont les racines sont les valeurs de y, et qu'on a déterminé toutes ces racines.

Si l'équation $Y=o$ renferme, outre les vraies valeurs de y, d'autres valeurs, étrangères aux équations proposées, on les connaîtra à ce qu'elles ne feront point acquérir à ces équations de commun diviseur fonction de x, et l'on doit les rejeter. Et au contraire, si une valeur de y vérifie les proposées, indépendam-

ment de toute valeur de x, il est évident qu'en lui adjoignant telle valeur de x qu'on voudra, les équations seront toujours satisfaites.

412. En général, la résolution de deux équations à deux inconnues consiste à trouver tous les systèmes de valeurs qui, substituées à la place des inconnues, peuvent satisfaire aux deux équations; et l'on ramène toujours cette détermination à la résolution des équations à une seule inconnue. Pour réduire ainsi la question, il faut donc chercher à déduire des équations données une équation qui ne renferme plus qu'une inconnue; et tel est en effet l'objet des méthodes d'élimination. On regarde comme parfaites celles qui conduisent à une *équation finale* ayant pour racines toutes les valeurs de cette inconnue, sans complication de valeurs étrangères. A cet égard, la méthode que nous exposerons bientôt (416), et qui fait l'objet principal de ce chapitre, est défectueuse; mais il n'en existe point dont l'usage soit plus commode lorsque les deux équations sont numériques, c'est-à-dire, lorsque leurs coefficiens sont des nombres donnés : or c'est ce cas que nous avons principalement en vue.

Elimination dans quelques cas fort simples.

413. Avant d'expliquer la méthode dont il s'agit, je veux rappeler ici le procédé déjà connu qui peut être employé toutes les fois qu'on saura résoudre l'une des deux équations par rapport à l'une des inconnues.

Les deux équations étant représentées par

$$M=0, \quad N=0,$$

supposons qu'on sache tirer de $N=0$ la valeur de x en fonction de y, et qu'on ait

$$x=f(y).$$

On est assuré que cette fonction, substituée au lieu de x dans l'équation $N=0$, rendra N identiquement nul, sans qu'il soit besoin d'attribuer de valeur particulière à y. Mais cette inconnue y doit être telle qu'en mettant $f(y)$ à la place de x dans la pre-

mière équation, M devienne aussi identiquement nul; donc il faut prendre pour valeurs de y les racines de l'équation qui résulte de cette substitution.

L'équation ainsi obtenue sera donc l'équation finale en y; et, si on peut la résoudre, il n'y aura plus, pour avoir les valeurs correspondantes de x, qu'à transporter successivement chaque valeur de y dans la formule $x=f(y)$. Quoique ce procédé soit fort simple, cependant le calcul exige, dans certains cas, des précautions que l'exemple suivant apprendra à ne point négliger.

Soient les équations

$$[1] \qquad 24x^2+20xy+5y^2-84=0,$$
$$[2] \qquad 32x^2-15y^2+28=0.$$

La seconde donne

$$x=\pm\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)};$$

et en substituant ces valeurs dans la première, on trouve

$$65y^2\pm10y\sqrt{2(15y^2-28)}-420=0.$$

On ne peut pas résoudre cette équation sans la ramener à une forme rationnelle, et c'est à quoi l'on parviendra en isolant le radical dans un membre et en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par l'indice du radical. Ce procédé doit être remarqué, parce qu'il est d'un usage presque continuel.

On isole donc le radical, et l'équation devient

$$[\alpha] \qquad \pm10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2;$$

puis on élève un carré, et l'on trouve, toutes réductions faites,

$$[\beta] \qquad y^4-40y^2+144=0.$$

Cette équation se résout à la manière du 2[e] degré et donne

$$y=+2,\quad y=-2,\quad y=+6,\quad y=-6.$$

Pour avoir les valeurs correspondantes de x, il y a une attention à avoir, sans laquelle elles seraient fautives. A cause du si-

gne $\pm$ qui était devant le radical, l'équation [β] équivaut à ces deux-ci :

$$[\alpha'] \qquad +10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2,$$
$$[\alpha''] \qquad -10y\sqrt{2(15y^2-28)}=420-65y^2.$$

Or, si on pouvait résoudre séparément chacune d'elles, les valeurs de y tirées de [α′] devraient être substituées dans la formule

$$x=+\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)};$$

et les valeurs de y tirées de [α″], dans la formule

$$x=-\tfrac{1}{8}\sqrt{2(15y^2-28)}:$$

Il est donc nécessaire de distinguer parmi les quatre valeurs de y celles qui appartiennent à chacune des équations [α′] et [α″]. Le moyen le plus simple consiste à les substituer dans ces équations; et l'on reconnaît ainsi que les valeurs $y=+2$, $y=-6$, vérifient [α′], tandis que les deux autres, $y=-2$, $y=+6$, vérifient [α″]. En conséquence, on a pour les équations proposées quatre solutions, savoir :

$$\begin{cases} x=+1 \\ y=+2, \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=-2, \end{cases} \begin{cases} x=+4 \\ y=-6, \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=+6. \end{cases}$$

414. Lorsque les deux équations sont du même degré par rapport à l'inconnue qu'on élimine, il convient d'abaisser préalablement l'une d'elles au degré inférieur, au moyen de la soustraction, ainsi qu'on l'a déjà fait (n° 194, Ex. III) pour les équations $x^2+Px+Q=0$, $x^2+P'x+Q'=0$.

Les deux équations [1] et [2] seraient donc mieux traitées en leur appliquant cette observation, puisque l'une d'elles sera remplacée par une équation du 1er degré en x. Toutefois, il faut auparavant rendre le coefficient de x^2 égal dans les deux équations, ce qui se fera en multipliant l'équation [1] par 4, et l'équation [2] par 3. Alors, en les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$80xy+65y^2-420=0, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{84-13y^2}{16y}.$$

Cette valeur étant portée dans l'équation [2], on obtient, toutes réductions faites, l'équation finale déjà trouvée

$$y^4-40y^2+144=0.$$

Les valeurs de y qu'elle détermine sont

$$y=+2,\quad -2,\quad +6,\quad -6;$$

et par suite la formule qui exprime x en y donnera, pour valeurs correspondantes,

$$x=+1,\quad -1,\quad -4,\quad +4.$$

415. Souvent la résolution des équations s'obtient immédiatement en remarquant qu'elles sont décomposables en facteurs. Supposons, par exemple, que deux équations aient été ramenées à celles-ci

$$(x-y)(y^3-x^2-1)=0,$$
$$(x^2+y^3)(y^3+x^2-y)=0.$$

Pour les résoudre, il faut chercher toutes les valeurs de x et de y qui peuvent rendre nuls à la fois un facteur de la première et un facteur de la seconde. On a donc à résoudre séparément ces quatre systèmes d'équations :

$$\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^3=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=0\\y^3+x^2-y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y^3-x^2-1=0\\x^2+y^3=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y^3-x^2-1=0\\y^3+x^2-y=0.\end{cases}$$

Je laisse au lecteur le soin d'effectuer les calculs, et je passe à des considérations plus générales.

Élimination par la méthode du plus grand commun diviseur.

416. Soient les équations à résoudre,

$$M=0,\quad N=0:$$

je vais faire connaître les simplifications qu'on doit d'abord leur faire subir.

Ordonnons le polynôme M par rapport à y, cherchons le plus grand commun diviseur des multiplicateurs des diverses puissances

de y, et divisons M par ce diviseur. Ensuite ordonnons le quotient par rapport à x, cherchons le plus grand commun diviseur des coefficiens des diverses puissances de x, et divisons encore le quotient par ce diviseur. Alors nous pourrons décomposer M en trois facteurs, l'un fonction de x, le second fonction de y, le dernier fonction de x et de y. Désignons-les par U, U', U'', et l'on aura $M=UU'U''$.

Nous pourrons décomposer d'une manière semblable le polynôme N; et, en nommant V, V', V'', les trois facteurs, on aura $N=VV'V''$.

Maintenant, il est possible que les facteurs U et V fonctions de x aient un diviseur commun; qu'il en soit de même des facteurs U' et V' fonctions de y; et encore de même des facteurs U'' et V'' fonctions de x et y. Désignons ces trois sortes de diviseurs communs par d, d', d'', et l'on pourra décomposer M et N comme il suit :

$$M=d\,d'd''\times uu'u'',$$
$$N=d\,d'd''\times v\,v'\,v''.$$

Examinons présentement les diverses manières dont on peut satisfaire aux équations proposées $M=0$, $N=0$. D'abord, il est évident qu'on y satisfait en égalant à zéro l'un des facteurs communs d, d', d''. Or, si on pose $d=0$, cette équation ne contiendra qu'une seule inconnue x; et quand on l'aura résolue, on aura un nombre limité de valeurs de x, mais on pourra joindre à chacune d'elles une valeur quelconque de y. Si on pose $d'=0$, on aura un nombre limité de valeurs de y, mais on pourra joindre à chacune d'elles une infinité de valeurs de x. Enfin, si on pose l'équation $d''=0$, comme d'' contient x et y, on pourra donner une valeur arbitraire à l'une de ces inconnues, à x, par exemple, et alors cette équation fera connaître les valeurs correspondantes de y. Ainsi, chacun des facteurs communs d, d', d'', détermine une infinité de solutions.

Les autres manières de satisfaire aux équations proposées consistent à égaler à zéro, en même temps, l'un des facteurs u, u', u'', de la première, et l'un des facteurs v, v', v'', de la seconde. On ne peut pas avoir à la fois $u=0$ et $v=0$; car ces facteurs ne con-

tiennent que x et n'ont plus de facteur commun, de sorte qu'aucune valeur de x ne peut les rendre nuls tous deux ensemble. Par une raison semblable, on ne peut pas avoir en même temps $u' = o$, $v' = o$. De plus, il est clair que si on égale à zéro deux facteurs, dont l'un ne soit fonction que d'une inconnue, il n'y aura, pour résoudre ces deux équations, d'autres difficultés que celles des équations à une seule inconnue.

Mais il n'en sera plus de même si on pose

$$u'' = o, \quad v'' = o:$$

car chacune de ces équations contient x et y. Il faut une méthode nouvelle pour les ramener à la résolution des équations à une seule inconnue, et c'est cette méthode qu'on va exposer. On doit bien faire attention qu'elles ne renferment plus de facteurs dépendans de x seul ou de y seul; et, en outre, qu'il n'existe entre elles aucun facteur commun fonction de x et y : c'est en cela que consistent les simplifications que j'avais en vue.

417. Pour éviter les accens, supposons que les dernières équations dont on vient de parler, et qu'il s'agit de résoudre, soient représentées par

$$[1] \qquad A = o, \quad B = o.$$

Ayant ordonné ces équations par rapport à x, supposons que cette inconnue soit à un plus haut degré dans A que dans B, ou à un degré égal; divisons A par B, et ayons soin d'arrêter l'opération dès qu'on est arrivé à un reste qui ne pourrait plus se diviser sans mettre dans le quotient des dénominateurs fonctions de y. Représentons par R ce reste, et par Q le quotient trouvé; on aura

$$A = BQ + R.$$

De cette égalité on conclut que si certaines valeurs de x et de y rendent nuls A et B, elles doivent donner aussi $R = o$; donc ces valeurs doivent se trouver parmi les solutions des deux équations

$$[2] \qquad B = o, \quad R = o.$$

Réciproquement les valeurs de x et de y qui vérifient ces équations doivent donner $A = o$, et satisfont par conséquent aux

proposées ; donc on peut remplacer le système des équations [1] par celui des équations [2].

Pour plus de simplicité, supposons, ce qui n'arrive que dans des cas particuliers, que la division ait conduit, sans placer y dans aucun dénominateur, à un reste de degré moindre, par rapport à x, que le diviseur B. Divisons maintenant B par R, et supposons encore que, sans mettre y en dénominateur, on ait trouvé le reste R'. Les équations [2] pourront être remplacées par deux autres plus simples encore, savoir :

$$[3] \qquad R = 0, \quad R' = 0.$$

Si R' est de degré moindre que R, on divisera à son tour R par R' ; et l'on continuera de diviser ainsi chaque reste par le suivant.

En supposant que chaque division nouvelle conduise d'elle-même à un reste de degré moindre en x que le diviseur, sans qu'on soit obligé de mettre au quotient des dénominateurs fonctions de y, on arrivera nécessairement à un reste indépendant de x. Soit R' ce reste : alors les équations [3] tiendront lieu des proposées; et comme la seconde, $R'=0$, ne contient qu'une seule inconnue, elle fera connaître les valeurs de cette inconnue, et ensuite la première, $R=0$, fera trouver les valeurs correspondantes de x.

418. Il n'y aurait rien à ajouter sur la résolution des équations [1], si les divisions pouvaient toujours se faire avec les conditions énoncées; mais il n'en est ainsi que dans des cas très-particuliers. Cependant, pour que les conséquences trouvées précédemment ne soient pas infirmées, il faut que les quotiens ne contiennent y dans aucun dénominateur.

En effet, reprenons les équations $A=0$, $B=0$, et supposons que la division de A par B ne puisse point conduire à un reste de degré inférieur à B sans placer y en dénominateur dans le quotient. En désignant ce quotient par $\frac{H}{K}$, K étant une fonction de y, on aurait

$$A = \frac{BH}{K} + R.$$

Si l'on met pour x et pour y des valeurs qui rendent A et B égaux à zéro, il peut se faire que K devienne aussi égal à zéro :

alors $\frac{BH}{K}$ devient $\frac{o}{o}$ et peut avoir une valeur finie ou infinie, et par conséquent R peut lui-même prendre une semblable valeur. Donc on ne peut plus affirmer que toutes les solutions des équations $A=o$, $B=o$, se trouvent parmi celles du système $B=o$, $R=o$. La réciproque ne serait pas plus vraie, car B et R étant réduits à zéro, K pourrait être aussi réduit à zéro, et dès-lors le second membre pourrait n'être point nul; donc A lui-même pourrait n'être pas nul.

Pour éviter les fractions, on aura recours au même moyen que dans la recherche du plus grand commun diviseur. Remarquons d'abord qu'il n'y a plus de facteur commun fonction de y dans les différens termes de B; en sorte que si l'on multiplie le dividende A par le coefficient du premier terme de B, ou bien, lorsque cela suffit, par quelques facteurs de ce coefficient, la division deviendra possible, et aucun facteur commun n'aura été introduit dans A et B. Mais cette multiplication peut ajouter aux équations proposées des solutions étrangères : en effet, si C représente ce multiplicateur fonction de y, Q le quotient, et R le reste, on aura

$$CA=BQ+R;$$

et cette égalité prouve que les solutions des équations $B=o$, $R=o$, sont les mêmes que celles des équations $CA=o$, $B=o$. Or, ces dernières équations se partagent en deux systèmes, savoir;

$$[A=o, B=o] \quad \text{et} \quad [C=o, B=o]:$$

donc, outre les solutions des équations proposées, les équations $B=o$, $R=o$, feront encore trouver celles des équations $C=o$, $B=o$. Il faudra donc résoudre ces dernières, dont l'une $C=o$ ne contient que y, puis substituer les valeurs correspondantes de x et de y dans l'équation $A=o$; et les couples de valeurs qui ne satisferont point à cette équation devront être de trop parmi les solutions des équations $B=o$, $R=o$. Par conséquent, ces couples devront être supprimées.

La question est ainsi ramenée à résoudre les deux équations

$$B=o, \quad R=o.$$

On examine d'abord s'il y a dans R des facteurs fonctions de y ou de x. Supposons qu'il en existe, désignons-les par f et f', et soit r le quotient de R par ff'; on pourra décomposer R en $ff'r$, et par suite remplacer les équations précédentes par les trois systèmes suivans :

$$[B=o, f=o], \quad [B=o, f'=o], \quad [B=o, r=o].$$

Les deux premiers systèmes n'offrent point de difficulté, car f ne contient que y, et f' ne contient que x : il suffit donc de s'occuper du troisième.

B et r n'ont aucun facteur commun : car, s'il y en avait un, il devrait se trouver dans A et B, ce qui est contraire à la supposition. De plus, ni B ni r ne renferment de facteur fonction de y seul ou de x seul; donc les équations

$$B=o, \quad r=o,$$

peuvent être traitées tout-à-fait comme les équations primitives $A=o$, $B=o$. Ainsi, on les remplacera elles-mêmes par deux autres

$$r=o, \quad r'=o,$$

qui seront dans le même cas que les précédentes, mais dont la seconde, $r'=o$, est de degré moindre en x que la première, $r=o$.

Celles-ci à leur tour peuvent se remplacer par deux autres, dont la seconde sera encore de degré moindre que $r'=o$.

En continuant ces opérations, qui sont en tout semblables à celles qu'on ferait sur A et B pour chercher le plus grand commun diviseur de ces polynômes, on arrivera toujours à un dernier reste qui ne contiendra plus l'inconnue x. Supposons que ce reste soit r' : alors les équations proposées dépendent des équations $r=o$, $r'=o$, lesquelles ne peuvent offrir aucune difficulté, puisque la deuxième ne contient plus que la seule inconnue y.

Il ne faut pas oublier qu'en remontant des équations $r=o$, $r'=o$, aux précédentes $B=o$, $r=o$, il peut se faire qu'il y ait quelques solutions à ajouter et d'autres à supprimer; qu'il peut encore en être de même en remontant des équations $B=o$, $r=o$, aux équations $A=o$, $B=o$; et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de divisions successives.

La méthode qui vient d'être développée ne conduit point toujours à une équation unique en y, mais bien à plusieurs, dont quelques unes peuvent donner pour cette inconnue des valeurs fausses. Quand on aura reconnu toutes celles qui entrent véritablement dans des solutions communes aux deux équations, il sera facile, si cela est nécessaire, de les réunir dans une seule équation, qu'on prendra alors pour l'équation finale; mais cette réunion est rarement utile.

Application à des exemples.

419. EXEMPLE I. Soient

$$M=(-2x^2+2)y^3+(x^4-2x^3-2x^2+2x+1)y^2+(x^5-2x^3+x)y,$$
$$N=(-x+1)y^5+(-x^2+x)y^4+(x^3-x^2)y^3+(x^4-x^3)y^2;$$

on propose de résoudre les équations $M=0$, $N=0$.

Il y a de nombreuses simplifications, car on trouve

$$M=y(x-1)(x+y)\times(x+1)(x^2-2y-1),$$
$$N=y(x-1)(x+y)\times y(x^2-y^2).$$

En égalant d'abord à zéro chacun des facteurs communs à son tour, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} y=0, \\ x \text{ indét.}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y \text{ indét.} \\ x=1.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y \text{ indét.} \\ x=-y.\end{array}\right.$$

Et, en égalant ensuite les autres facteurs à zéro, on a quatre systèmes d'équations, savoir :

$$1^{\text{er}}\text{ syst.}\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x+1=0\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=-1;\end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\text{ syst.}\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-2y-1=0\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=1,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=-1;\end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\text{ syst.}\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ x+1=0\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1;\end{array}\right.$$

$$4^{\text{e}}\text{ syst.}\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ x^2-2y-1=0\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=1+\sqrt{2} \\ x=\pm(1+\sqrt{2}),\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y=1-\sqrt{2} \\ x=\pm(1-\sqrt{2}).\end{array}\right.$$

Dans les trois premiers systèmes, toutes les solutions ; excepté $x=-1$ et $y=-1$, sont déjà connues, et, dans le 4°, celles où l'on a $x=-y$, le sont aussi ; de sorte qu'on ne trouve véritablement que trois solutions nouvelles, savoir :

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1+\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

420. Exemple II. On propose de résoudre les deux équations

$$x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-y^3+y^2-2y=0,$$
$$x^2-2yx+y^2-y=0.$$

Ces équations ne se décomposent point en facteurs ; c'est pourquoi l'on passe immédiatement aux divisions successives. Il en sera de même des exemples III et IV.

Première division.

$$\begin{array}{l|l} x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-y^3+y^2-2y & x^2-2yx+y^2-y \\ \underline{-x^3+2yx^2+(-y^2+y)x} & x-y \\ \quad -yx^2+(2y^2+1)x-y^3+y^2-2y & \\ \quad \underline{+yx^2-2y^2x+y^3-y^2} & \\ \qquad x-2y & \end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l} x^2-2yx+y^2-y & x-2y \\ \underline{-x^2+2yx} & x \\ \qquad y^2-y & \end{array}$$

Donc les équations finales sont

$$x-2y=0, \quad y^2-y=0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=2. \end{cases}$$

Comme on n'a introduit ni supprimé aucun facteur, ces deux solutions sont celles des proposées elles-mêmes.

421. Exemple III. On propose à résoudre les deux équations

$$(y-1)x^2+2x-5y+3=0,$$
$$yx^2+9x-10y=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l} (y-1)x^2+2x-5y+3 & yx^2+9x-10y \\ (y-1)yx^2+2yx-5y^2+3y & y-1 \\ -(y-1)yx^2+(-9y+9)x+10y^2-10y & \\ \hline (-7y+9)x+5y^2-7y & \end{array}$$

Puisqu'on a multiplié par y, il faut résoudre les équations $y=0$, $yx^2+9x-10y=0$, lesquelles donnent $x=0$, $y=0$; et examiner si ces valeurs rendent le dividende égal à zéro. Comme cela n'arrive point, il s'ensuit qu'elles forment une solution étrangère qu'il faudra supprimer.

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l} yx^2+9x-10y & (-7y+9)x+5y^2-7y \\ \left\{\begin{array}{l}(-7y+9)yx^2+(-63y+81)x \\ \qquad +70y^2-90y\end{array}\right. & yx+(-5y^3+7y^2-63y+81) \\ -\ldots\ldots\ldots+(-5y^3+7y^2)x & \\ \hline (-5y^3+7y^2-63y+81)x+70y^2-90y & \\ (-5y^3+\ldots\ldots)(-7y+9)x-490y^3+1260y^2-810y & \\ -\ldots\ldots\ldots+25y^5-70y^4+364y^3-846y^2+567y & \\ \hline 25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y & \end{array}$$

Les équations finales qu'il faut résoudre sont donc

$$(-7y+9)x+5y^2-7y=0,$$
$$25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y=0.$$

La seconde donne, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

$$y=0,\quad y=1,\quad y=3,\quad y=\frac{-3\pm3\sqrt{10}}{5};$$

et, en substituant ces valeurs dans la première équation, on obtient pour x les valeurs correspondantes

$$x=0,\quad x=1,\quad x=2,\quad x=-5\mp\sqrt{10}.$$

Dans la deuxième division, on a été obligé de multiplier par $-7y+9$, mais il est facile de voir qu'aucune solution étrangère n'a été introduite. Il y a donc seulement à supprimer, dans les cinq solutions ci-dessus, celle qui a été introduite par la première division. Il reste ainsi, pour les équations proposées, les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases} y=1 \\ x=1, \end{cases} \begin{cases} y=3 \\ x=2, \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{-3+3\sqrt{10}}{5} \\ x=-5-\sqrt{10}, \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{-3-3\sqrt{10}}{5} \\ x=-5+\sqrt{10}. \end{cases}$$

422. EXEMPLE IV. Soient encore les équations

$$x^2+(8y-13)x+y^2-7y+12=0,$$
$$x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l} x^2+(8y-13)x+y^2-7y+12 & x^2-(4y+1)x+y^2+5y \\ \hline -x^2+(4y+1)x-y^2-5y & 1 \\ \hline (12y-12)x-12y+12 & \end{array}$$

Ce reste se décomposant en facteurs $12(y-1)(x-1)$, les calculs se simplifient, et l'on a ces deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-(4y+1)x+y^2+5y=0. \end{cases}$$

Chacun d'eux se résout sans qu'il soit nécessaire de continuer les divisions, et l'on trouve

$$\begin{cases} y=1 \\ x=3, \end{cases} \begin{cases} y=1 \\ x=2, \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=1, \end{cases} \begin{cases} y=-1 \\ x=1. \end{cases}$$

Remarques sur la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur.

423. Les remarques suivantes ont par elles-mêmes peu d'importance; elles prouveront seulement que si l'on a bien compris la méthode, on ne pourra rencontrer aucune particularité dont il ne soit facile de se rendre compte.

I. Quand on a fait toutes les simplifications préliminaires (416), les polynômes que l'on soumet aux divisions successives ne peuvent plus avoir de facteurs communs. Or, ces opérations sont absolument les mêmes qu'on ferait pour déterminer le plus grand commun diviseur des deux polynômes : ainsi, on est sûr de ne point arriver à un reste nul.

II. Il peut se faire que les termes en y se détruisent dans le dernier reste et que ce reste se réduise à un nombre. Alors ce reste ne peut pas être rendu égal à zéro, et les deux équations finales sont absurdes. On en conclut que les équations proposées sont *impossibles* ou *incompatibles*, à moins qu'il n'y ait eu des solutions supprimées dans le cours du calcul, et dont la méthode a appris à tenir compte.

Il est facile de composer des équations incompatibles : par exemple, on aura des équations qui offriront cette particularité, si l'on pose

$$P=0, \quad PQ+\varrho=0,$$

P et Q désignant des fonctions entières quelconques de x et de y, et ϱ étant un nombre déterminé. Il est évident en effet que ces équations sont incompatibles; car la première réduit la seconde à $\varrho=0$: résultat absurde, puisque ϱ est un nombre.

III. En supposant toujours que les simplifications préliminaires aient été effectuées, et qu'on suive exactement la méthode exposée n° 418, il est impossible que l'équation finale donne pour y une valeur qui rende nul le dernier diviseur. En effet, supposons que les équations finales soient

$$Gx^2+Hx+K=0, \quad Y=0,$$

G, H, K, Y, étant des fonctions de y seulement. Admettons que β soit une racine de $Y=0$ qui vérifie la première équation, sans aucune détermination de x. Cela ne peut arriver que parce que G, H, K, deviennent zéro séparément : donc $y-\beta$ serait facteur de ces quantités, et aussi de Gx^2+Hx+K. Or cela ne doit pas arriver; car, avant de prendre un reste pour diviseur, on le dépouille de tous les facteurs fonctions de x seul, ou de y seul, qu'il peut contenir (418).

IV. Comme les valeurs de y, tirées de la dernière équation, doivent être substituées tour à tour dans une même équation, qui peut contenir x à un degré supérieur au premier, on pourrait penser qu'à chaque valeur de y, il correspondra toujours le même nombre de valeurs de x. Mais une pareille conclusion serait trop précipitée ; car il est possible que quelques unes des valeurs de y fassent évanouir plusieurs termes de l'équation en x, et que par suite cette équation soit réduite à un degré moindre.

Pour développer cette remarque, supposons, comme ci-dessus, que les équations finales soient

$$Gx^2+Hx+K=0, \quad Y=0.$$

Si la valeur de y, qu'on substitue dans la première équation, ne fait évanouir aucune des quantités G, H, K, il est clair qu'on aura deux valeurs correspondantes de x. Mais il peut se faire qu'une autre valeur de y réduise G à zéro, sans y réduire H, et alors il n'y aura qu'une valeur de x. Il peut même se faire qu'une valeur de y anéantisse G et H en même temps, sans anéantir K; et dans ce cas cette valeur ne conviendrait pas à la première équation.

Toutefois il est à observer que si l'on résout l'équation $Gx^2+Hx+K=0$, avant d'y remplacer y par sa valeur, on obtient toujours pour x deux valeurs; mais que l'une d'elles devient infinie lorsqu'on a $G=0$, et que toutes deux sont infinies quand on a à la fois $G=0$, $H=0$.

V. Supposons maintenant qu'on n'ait fait aux équations aucune simplification préliminaire, et qu'on ait également négligé celles qui peuvent se présenter dans le cours du calcul ; supposons même qu'on ait introduit, pour rendre les divisions possibles, des facteurs inutiles : on pourrait encore arriver alors à la résolution des équations proposées.

Soient

$$A=0, \quad B=0,$$

les équations données. Supposons que, pour faire la division de A par B, on multiplie A par C, et qu'on arrive au reste R ; supposons que dans la division de B par R on multiplie B par C', et

qu'on ait le reste R'; enfin supposons, pour fixer les idées, que R' ne contienne plus x. Nommons Q et Q' les deux quotiens : on aura

$$AC = BQ + R,$$
$$BC' = RQ' + R'.$$

Il est évident que les équations finales

$$R = o, \quad R' = o,$$

tiennent lieu des systèmes

$$[B = o, \ R = o], \quad [C' = o, \ R = o].$$

Pour n'avoir que les solutions du premier, on résoudra le second, et on substituera les solutions qu'il fournit dans l'équation $B = o$, ce qui fera connaître les solutions qui ne conviennent point au premier système. En conséquence, on supprimera ces solutions parmi celles que donnent les deux équations finales, et alors il ne restera plus que celles du système

$$B = o, \ R = o.$$

Maintenant, il est évident aussi que ces dernières équations admettent toutes les solutions des deux systèmes

$$[A = o, \ B = o], \quad [C = o, \ B = o].$$

Il faut donc résoudre le second et substituer dans $A = o$ les solutions qu'il fournit, afin de connaître celles qui ne conviennent pas aux proposées. En les supprimant parmi les solutions qui nous sont restées tout à l'heure pour les deux équations $B = o$, $R = o$, on n'aura plus que celles qui conviennent aux équations proposées $A = o$, $B = o$.

VI. Si aucune simplification n'a été opérée sur les équations proposées, il peut se faire qu'elles aient des facteurs communs; et si en outre, loin de supprimer aucun facteur dans le cours du calcul, on ne prend point de précautions pour éviter d'en introduire d'inutiles, il est clair qu'on peut trouver à la fin un reste nul.

Quand cela arrive, le plus grand commun diviseur des équa-

tions est égal au dernier diviseur, si les multiplications n'ont pas introduit de nouveau facteur commun. S'il en est autrement, il est facile de rechercher, en revenant sur les calculs, quels facteurs communs ont été introduits; et en les supprimant dans le dernier diviseur, on aura le plus grand commun diviseur des premiers membres des deux équations. Désignons-le par D, et écrivons les équations sous cette forme

$$A' \times D = o, \quad B' \times D = o.$$

On voit qu'on satisfait à toutes deux en posant D=o, équation qui admet une infinité de solutions. On y satisfait encore en posant en même temps $A'=o$, $B'=o$; et, pour avoir les solutions que ces dernières équations déterminent, on peut leur appliquer le même procédé qu'aux proposées : on est sûr alors de ne plus trouver de reste nul.

Mais on peut aussi s'épargner ce nouveau calcul, et se servir du premier ainsi qu'on va l'expliquer. Supposons que R et R' soient les deux restes, fonctions de x, qui précèdent le reste nul. La théorie du commun diviseur prouve que R et R' contiennent tous les facteurs de D, et en outre les facteurs communs qui ont pu être introduits sans que cela fût nécessaire. Divisons d'abord R et R' par ces derniers facteurs, et ensuite les deux quotiens par D, puis désignons par r et r' les nouveaux quotiens. Il est clair que les équations

$$r \times D = o, \quad r' \times D = o,$$

contiendront toutes les solutions des équations proposées, plus celles qu'on a été obligé d'introduire pour rendre les divisions possibles. Mais déjà il est prouvé que les solutions données par l'équation unique D=o conviennent aux proposées; donc en posant à la fois

$$r = o, \quad r' = o,$$

on aura les équations qui déterminent toutes les autres solutions. Sans plus de détails, on voit qu'on peut se dispenser d'effectuer sur A' et B' de nouvelles opérations, et comment on peut se servir de celles qui auraient été faites sur A et B.

VII. Quand on omet les simplifications prescrites, rien n'empêche qu'une valeur de y ne satisfasse en même temps aux deux équations finales.

Supposons que Y soit le dernier reste, et $Gx+H$ l'avant-dernier; de sorte que les équations finales soient

$$Gx+H=0,\quad Y=0.$$

Désignons par β la valeur de y qui rend nuls Y, G et H. Il ne faut pas en conclure pour cela que x reste indéterminé, car il est possible que $y-\beta$ soit un facteur introduit. C'est ce qui sera arrivé en effet si on suppose que le reste qui a précédé $Gx+H$ soit $G'x^2+H'x+K$, et que G' ne contienne point le facteur $y-\beta$. Or, les équations

$$G'x^2+H'x+K=0,\quad Gx+H=0,$$

contiennent, parmi leurs solutions, toutes celles des proposées; et, d'un autre côté, le facteur $y-\beta$, qui se trouve dans la seconde, ne se trouve pas dans G' : donc, en mettant β à la place de y dans la première, on trouvera deux valeurs correspondantes pour x. Cette inconnue n'est donc point indéterminée comme on aurait pu le penser.

Le facteur $y-\beta$ aura encore dû être introduit, s'il se trouve au carré dans G, et au premier degré dans G'. Alors, la première équation ne donne plus qu'une seule valeur de x correspondante à $y=\beta$: à moins qu'on ne tienne compte de la valeur infinie, qui correspond ordinairement au cas où le terme en x^2 disparaît d'une équation du second degré.

Ainsi, on voit que c'est la multiplication par $y-\beta$, faite à la dernière division, qui a amené l'indétermination de x dans les équations finales; et l'on voit en même temps qu'il faut recourir au reste qui précède l'avant-dernier pour avoir cette inconnue. Si ce reste devenait nul aussi par la valeur $y=\beta$, on remonterait au reste précédent; et ainsi de suite. Si on est obligé de remonter jusqu'aux équations $A=0$, $B=0$, et qu'elles soient elles-mêmes vérifiées en y faisant $y=\beta$, c'est une preuve que x doit en effet rester indéterminé.

Sur l'élimination entre un nombre quelconque d'équations.

424. Jusqu'ici les équations à résoudre étaient au nombre de deux seulement. Supposons qu'on en ait trois entre les inconnues x, y, z : pour parvenir à une équation finale en z, on pourra éliminer d'abord x entre la première et chacune des autres; puis, y entre les deux équations résultantes. Mais alors il est presque impossible de se rendre compte des solutions qui sont introduites ou supprimées, et l'on arrive presque toujours à une équation finale trop compliquée. Ce qu'on dit ici de trois équations s'applique à plus forte raison aux cas où il y en aurait davantage.

Bezout a considérablement perfectionné cette branche épineuse de l'analyse, dans son grand ouvrage intitulé : *Théorie générale des équations algébriques.* Mais malheureusement les méthodes qu'il propose, outre quelques difficultés théoriques dont elles ne sont pas exemptes, exigent encore des calculs si compliqués qu'on doit les regarder comme impraticables. L'exposition de ces méthodes ne saurait faire partie d'un livre élémentaire, et je me bornerai à indiquer ici le beau théorème dû à ce savant, et dont voici l'énoncé :

Si, entre des équations en nombre pareil à celui des inconnues, on élimine toutes les inconnues hors une, le degré de l'équation finale devra être tout au plus égal au produit des degrés de ces équations.

425. Sans entrer ici dans aucun détail sur la résolution des équations, il est facile de reconnaître que si elles sont en même nombre que les inconnues, elles n'admettront en général qu'un nombre déterminé de solutions.

Supposons qu'on ait n équations entre n inconnues x, y, z,... si on considère l'une quelconque d'entre elles, on doit accorder, lors même qu'on ne saurait pas la résoudre par rapport à x, qu'elle détermine pour cette inconnue un certain nombre de valeurs α, α', α'', α''',... qui généralement seront des fonctions des autres inconnues y, z... En substituant α dans les équations restantes, on aurait $n-1$ équations qui ne contiendraient plus que $n-1$ inconnues; de même en substituant α', on aurait un autre groupe

de $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues; et ainsi de suite pour chacune des autres valeurs, α'', α''',...

Si on prend chacun de ces groupes séparément, on conçoit qu'en tirant de l'une des $n-1$ équations les valeurs d'une inconnue, pour les substituer dans les $n-2$ équations restantes, on pourra aussi remplacer ce groupe par d'autres groupes, composés chacun de $n-2$ équations entre $n-2$ inconnues.

En continuant de cette manière, on arriverait à une équation qui ne renfermerait plus qu'une inconnue, et qui déterminerait pour cette inconnue un certain nombre de valeurs.

Si ces valeurs étaient trouvées, on pourrait, en remontant successivement jusqu'à la première inconnue, obtenir les valeurs correspondantes de toutes les autres inconnues.

Par cette explication il est manifeste que les n équations données ne peuvent avoir qu'un nombre limité de solutions.

426. Maintenant supposons qu'il y ait plus d'équations que d'inconnues. Soit n le nombre des inconnues, $n+k$ celui des équations; et, parmi ces équations, prenons en à volonté un nombre égal à n. D'après ce qui vient d'être dit, ces n équations détermineront en général un nombre limité de solutions; et comme ces solutions doivent aussi satisfaire aux k équations restantes, leur substitution donnerait k *équations de condition*. On les nomme ainsi parce qu'elles ne contiendraient plus que des quantités connues et qu'elles devraient se vérifier d'elles-mêmes pour que les équations proposées ne fussent pas incompatibles.

Lorsqu'on a plus d'inconnues que d'équations, il y a *indétermination*. En effet, si $n+k$ désigne le nombre des inconnues, et n celui des équations, il est évident qu'on pourra attribuer des valeurs arbitraires à k inconnues, et déterminer ensuite les n autres inconnues au moyen des n équations données.

Au reste, ce qui vient d'être dit, dans ce n° et dans le précédent, souffre quelquefois exception. Par exemple, dans des cas particuliers, il peut se faire que les équations soient en nombre égal aux inconnues, et que cependant elles soient incompatibles ou qu'il y ait indétermination. Les équations du 1er degré en offrent une preuve.

Usage de l'élimination dans la transformation des équations. Équation aux carrés des différences.

427. Nous avons déjà dit (396) que les méthodes générales d'élimination pouvaient être nécessaires pour opérer la transformation des équations. Elles le sont surtout dans les cas où chaque racine de la nouvelle équation doit être composée avec plusieurs racines de l'équation donnée. Un seul exemple suffira, et je choisis la question suivante, qui doit se présenter plus tard dans une recherche importante.

Étant donnée une équation quelconque à une seule inconnue, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre celles de la première, combinées deux à deux.

Soit l'équation proposée

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Nommons x et x' deux quelconques de ses racines et y leur différence, de sorte qu'on ait $x' = x + y$: l'équation [A] devra être satisfaite en y mettant cette valeur au lieu de x, et par conséquent on a

$$(x+y)^m + P(x+y)^{m-1} + Q(x+y)^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Développons les puissances : en représentant par X, X', X'', etc. le polynôme $x^m + Px^{m-1} + \text{etc.}$ et ses dérivés successifs, il viendra

$$X + X'y + \tfrac{1}{2}X''y^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}X'''y^3 \ldots + y^m = 0.$$

Mais x est ici une racine de [A], donc on a $X=0$, et par suite l'équation ci-dessus étant divisée par y devient

$$[B] \qquad X' + \tfrac{1}{2}X''y + \tfrac{1}{2\cdot 3}X'''y^2 + \ldots + y^{m-1} = 0.$$

Avant la suppression du facteur y, x et x' étaient deux racines quelconques de l'équation [A], et rien n'empêchait de supposer $x'=x$. Or, la différence $x-x$ étant zéro, il faut que l'équation en y, avant la suppression du facteur y, ait pour racine $y=0$. C'est en effet ce qui arrive puisqu'elle est divisible par y, et en

opérant la division cette racine se trouve supprimée : de sorte que les $m-1$ valeurs de y dans l'équation [B] ne sont plus que les différences qu'on obtiendrait en retranchant la racine désignée par x de toutes les autres racines de l'équation [A].

Maintenant, afin de distinguer entre elles les m racines de l'équation [A], représentons-les par a, b, c, d,...; puis imaginons qu'on remplace successivement, dans [B], x par chacune de ces racines. Il résulterait de ces substitutions m équations, dont la première aurait pour racines les différences entre a et toutes les autres racines b, c, d,...; la seconde, les différences entre b et les autres racines a, c, d,...; et ainsi de suite. Par conséquent, en éliminant x entre [A] et [B], l'équation finale en y aura pour racines les différences entre chacune des racines de l'équation [A] et toutes les autres racines de la même équation : elle sera donc l'équation cherchée. On la désigne d'une manière abrégée par la dénomination d'*équation aux différences*.

428. *Remarques*. Pour qu'elle soit en effet l'équation aux différences, il faut que l'élimination n'ait point supprimé de vraies racines ni amené de racines fausses. C'est dans cette supposition que je continuerai de raisonner. S'il en est autrement, on sait comment on doit tenir compte des unes et des autres.

Sans effectuer l'élimination, il est facile de reconnaître quel sera le degré de cette équation. En effet, ses racines sont

$$\begin{array}{l} a-b,\ a-c,\ a-d,\ \ldots, \\ b-a,\ b-c,\ b-d,\ \ldots, \\ c-a,\ c-b,\ c-d,\ \ldots, \\ \text{etc.}; \end{array}$$

et il est évident que ces différences sont en même nombre que les arrangemens deux à deux des m lettres a, b, c, etc.; donc l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$.

De plus, on voit que s'il existe dans cette équation une racine α égale à $a-b$, il y en a une autre $-\alpha$ égale à $b-a$; donc le premier membre est composé de facteurs qui peuvent se grouper deux par deux en produits tels que $(y-\alpha)(y+\alpha)=y^2-\alpha^2$, et par conséquent l'équation ne contiendra que des puissances paires de y. Donc, en posant $m(m-1)=2n$, elle sera de la forme

$$[C] \qquad y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}\ldots+ty^2+u=0.$$

Enfin, on peut faire $y^2=z$, et elle devient

$$[D] \qquad z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots+uz+t=0.$$

Celle-ci est appelée *équation aux carrés des différences*, qu'en effet, z étant le carré de y, elle a pour racines les carr différences des racines de la proposée [A].

429. Comme application, proposons-nous de trouver l'équ aux carrés des différences de l'équation du 3ᵉ degré.

Avant tout je remarquerai d'une manière générale qu équations [C] et [D] ne doivent point changer quand on mente ou quand on diminue d'une même quantité tout racines de l'équation [A]. Par conséquent, si une équation de a son second terme, on pourra le faire disparaître (392) et cher ensuite l'équation aux différences de la transformée trouvera ainsi la même équation que si on n'eût point fait nouir le second terme, mais les calculs seront moins compli D'après cette observation, je supposerai que l'équation du 3ᵉ d n'ait plus de second terme, et qu'elle soit

$$[1] \qquad x^3+Qx+R=0.$$

Lorsqu'on désigne par $X=0$ l'équation donnée, et par X'', X''', etc. les polynômes dérivés de X, la règle pour tro l'équation aux différences est d'éliminer x entre les deux é tions

$$X=0, \quad X'+\tfrac{1}{2}X''y+\tfrac{1}{2.3}X'''y^2+\text{etc.}=0.$$

Or, dans le cas actuel, on a

$$X=x^3+Qx+R,\ X'=3x^2+Q,\ X''=6x,\ X'''=6;$$

donc l'élimination de x doit se faire entre l'équation [1] celle-ci

$$[2] \qquad 3x^2+Q+3xy+y^2=0.$$

En conséquence, on ordonnera cette équation par rapport à puis on opèrera comme s'il s'agissait de trouver le plus gr commun diviseur des premiers membres de [1] et [2].

Première division.

$$\begin{array}{l|l} x^3+Qx+R & 3x^2+3yx+y^2+Q \\ 3x^3+3Qx+3R & x-y \\ -3x^3-3yx^2-(y^2+Q)x & \\ \hline -3yx^2-(y^2-2Q)x+3R & \\ +3yx^2+3y^2x+y^3+Qy & \\ \hline 2(y^2+Q)x+y^3+Qy+3R & \end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2+3yx+y^2+Q & 2(y^2+Q)x+y^3+Qy+3R \\ 6(y^2+Q)x^2+6(y^2+Q)yx & 3x+3(y^3+Qy-3R) \\ \quad +2(y^2+Q)^2 & \\ -6(y^2+Q)x^2-3(y^3+Qy+3R)x & \\ \hline 3(y^3+Qy-3R)x+2(y^2+Q)^2 & \\ 6(y^2+Q)(y^3+Qy-3R)x+4(y^2+Q)^3 & \\ -6(y^2+Q)(y^3+Qy-3R)x-3(y^3+Qy+3R)(y^3+Qy-3R) & \\ \hline 4(y^2+Q)^3-3(y^3+Qy+3R)(y^3+Qy-3R) & \end{array}$$

Dans la dernière division, on a multiplié deux fois par y^2+Q pour rendre les divisions possibles; mais si on pose $y^2+Q=0$, le diviseur se réduit au coefficient R, lequel en général est différent de zéro. Ainsi, en égalant à zéro le dernier reste et effectuant les opérations indiquées, l'équation aux différences sera

$$y^6+6Qy^4+9Q^2y^2+4Q^3+27R^2=0;$$

puis, en posant $y^2=z$, on aura l'équation aux carrés des différences

$$z^3+6Qz^2+9Q^2z+4Q^3+27R^2=0.$$

Dans le cas particulier de l'équation numérique

$$x^3-7x+7=0,$$

on a $Q=-7$, $R=+7$, et l'équation en z devient

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

Usage de l'élimination pour l'évanouissement des radicaux.

430. Les procédés qui servent à calculer les racines d'une équation supposent que l'inconnue ne se trouve sous aucun radical; par conséquent, il est très-important de savoir changer une équation compliquée de radicaux en une autre qui ne renferme que des termes rationnels. Or, l'évanouissement des radicaux, en le considérant sous un point de vue général, n'est qu'une question d'élimination. Un exemple suffira pour le faire comprendre.

Soit l'équation

$$x-\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=0,$$

dans laquelle chaque radical est censé représenter indifféremment toutes les déterminations dont il susceptible. En posant

$$y^2=x-1, \qquad z^3=x+1,$$

elle devient

$$x-y+z=0;$$

et alors on voit qu'en éliminant y et z entre cette dernière équation et les deux précédentes, on pourra obtenir une équation en x, qui sera entièrement dégagée de radicaux : car les méthodes générales d'élimination n'en introduisent aucun dans les résultats.

Dans notre exemple les calculs sont faciles. La dernière équation donnant $y=z+x$, l'équation $y^2=x-1$ devient

$$z^2+2xz+x^2-x+1=0;$$

et ensuite, pour éliminer z entre celle-ci et l'équation $z^3=x+1$, le procédé du plus grand commun diviseur suffira. On trouvera que l'équation finale est, sans aucune complication de racines étrangères,

$$x^6-3x^5+8x^4+x^3+7x^2-7x+2=0.$$

431. Les méthodes générales d'élimination sont si compliquées qu'on doit toujours chercher quelque moyen de les éluder. Le

cas où l'équation ne contient qu'un seul radical s'est déjà présentée (413), et nous avons vu qu'on le fait disparaître en l'*isolant dans un membre de l'équation*, et *en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par l'indice du radical.*

Cette règle, quoique très-simple, a néanmoins besoin de quelques explications. Le plus ordinairement, quand on élève les deux membres d'une équation à une puissance, elle acquiert de nouvelles racines. Par exemple, si on a $ax^2+b=cx$ et qu'on élève au carré, il est clair que la nouvelle équation $(ax^2+b)^2=c^2x^2$ aura non-seulement les racines de la proposée, mais encore celles de l'équation $ax^2+b=-cx$. Ainsi, il y a lieu d'examiner si la règle donnée ci-dessus, pour l'évanouissement d'un radical, ne fait pas acquérir trop d'étendue à l'équation.

Supposons qu'après avoir transposé le radical, l'équation soit

$$[1] \qquad X=\sqrt[n]{Y},$$

X et Y étant des fonctions des inconnues : par l'évanouissement du radical, elle devient

$$[2] \qquad X^n=Y \quad \text{ou} \quad X^n-Y=0.$$

Le radical $\sqrt[n]{Y}$ est censé avoir toute la généralité possible, c'est-à-dire qu'il représente indifféremment chacune des déterminations dont il est susceptible. Quelle que soit celle que l'on considère, toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'équation [1] ne sauraient manquer de satisfaire à l'équation [2]; et ce qu'il faut prouver, c'est que la réciproque est également vraie.

Si on avait l'équation $x^n-A=0$, et qu'on désignât par $A', A'',$ $A''', \ldots$ les n valeurs de $\sqrt[n]{A}$, on sait (381) qu'on devrait avoir

$$x^n-A=(x-A')(x-A'')(x-A''')\ldots$$

Or, on peut remplacer ici x et A par telles quantités qu'on voudra: en conséquence, je désignerai par Y', Y'', Y''', etc., les n déterminations de $\sqrt[n]{Y}$, et je mettrai $X, Y, Y', Y'', \ldots$ au lieu de x, A, $A', A'', \ldots$ Il vient ainsi

$$X^n-Y=(X-Y')(X-Y'')(X-Y''')\ldots;$$

donc on ne peut satisfaire à l'équation [2] qu'en posant

$$X=Y', \quad \text{ou} \quad X=Y'', \quad \text{ou} \quad X=Y''', \quad \text{etc.}$$

Ces dernières équations ne sont autres que la proposée [1] dans laquelle on aurait mis successivement chacune des déterminations de $\sqrt[n]{Y}$; donc enfin les solutions de cette équation sont les seules que contienne l'équation [2].

L'explication précédente montre en même temps comment il se fait que cette dernière équation devienne trop étendue quand le radical $\sqrt[n]{Y}$ représente spécialement une des n déterminations dont il est susceptible, comme cela arriverait, par exemple, s'il devait avoir une valeur réelle.

432. Quand une équation renferme plusieurs radicaux, il ne faut pas croire qu'on puisse en général faire évanouir successivement chacun d'eux par la règle précédente: car, dans le cas où il n'y en a que deux, il y a déjà lieu de remarquer que l'opération, qui fait disparaître un des radicaux, amène dans l'équation plusieurs quantités radicales qui ne s'y trouvaient pas auparavant. Par exemple, si on a

$$X+\sqrt[5]{Y}=\sqrt[4]{Z},$$

et qu'on élève à la 4e puissance, il vient

$$X^4+4X^3\sqrt[5]{Y}+6X^2(\sqrt[5]{Y})^2+4X(\sqrt[5]{Y})^3+(\sqrt[5]{Y})^4=Z,$$

équation qui renferme les puissances de $\sqrt[5]{Y}$ jusqu'à la 4e.

433. Cependant, lorsqu'une équation ne renferme que deux radicaux, et que l'un des deux est du 2e degré, on peut, par cette règle, les faire disparaître l'un après l'autre, pourvu qu'on ait soin de commencer par celui du plus haut degré. Alors, le succès du calcul tient à ce que les puissances d'un radical carré ne reproduisent point de nouvelles quantités radicales. Ainsi, par exemple, l'équation étant

$$X+\sqrt{Y}=\sqrt[3]{Z},$$

on aura successivement

$$(X+\sqrt{Y})^3=Z$$
$$X^3+3X^2\sqrt{Y}\ +3XY+Y\sqrt{Y}=Z,$$
$$X^3+3XY-Z\ =-(3X^2+Y)\sqrt{Y},$$
$$(X^3+3XY-Z)^2=\ (3X^2+Y)^2Y.$$

434. Si on avait une équation de la forme

$$X=\sqrt{Y}+\sqrt{Z},$$

au lieu d'isoler d'abord un radical, on pourra, si on le préfère, élever immédiatement l'équation au carré; et de cette manière il vient

$$X^2=Y+Z+2\sqrt{YZ},$$
$$X^2-Y-Z=2\sqrt{YZ},$$
$$(X^2-Y-Z)^2=4YZ.$$

435. Enfin, je placerai encore ici un cas particulier dans lequel il y a deux radicaux cubiques qu'on fait évanouir très-simplement. Soit

$$X=\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}.$$

En élevant au cube, il vient

$$X^3=Y+Z+3(\sqrt[3]{Y})^2\sqrt[3]{Z}+3\sqrt[3]{Y}(\sqrt[3]{Z})^2$$

ou $$X^3-Y-Z=3\sqrt[3]{Y}\sqrt[3]{Z}(\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}).$$

Or, on peut remplacer $\sqrt[3]{Y}+\sqrt[3]{Z}$ par X, et alors en élevant encore au cube, on aura une équation sans radicaux, savoir :

$$(X^3-Y-Z)^3=27X^3YZ.$$



CHAPITRE XVIII.

Résolution des équations numériques.

Racines commensurables.

436. A défaut de méthodes pour résoudre l'équation générale de chaque degré, le but vers lequel je dois tendre maintenant est de faire connaître les procédés à l'aide desquels on détermine, d'une manière exacte ou approchée, les racines des équations *numériques*. On nomme ainsi celles dont les coefficiens sont des nombres donnés.

Les racines peuvent être réelles ou imaginaires, et, parmi les racines réelles, il peut y en avoir de commensurables. Il existe pour trouver ces dernières des procédés fort simples que je vais exposer d'abord.

437. Je commencerai par chercher les racines commensurables entières. Soit l'équation

$$[1] \qquad Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0,$$

dans laquelle je suppose que tous les coefficiens soient entiers. Représentons par a une racine entière de cette équation, on devra avoir

$$[2] \qquad Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=0,$$

d'où, en transposant et divisant par a,

$$\frac{E}{a}=-Aa^3-Ba^2-Ca-D.$$

Le second membre étant entier, on conclut que a est un diviseur

de E. Ainsi, on voit déjà qu'on pourrait découvrir les racines commensurables entières en substituant successivement dans l'équation tous les diviseurs du dernier terme, tant positifs que négatifs. Mais, quand le dernier terme a beaucoup de diviseurs, ce procédé exigerait un grand nombre de substitutions; et alors on abrège le calcul au moyen de nouvelles conditions, qui se déduisent de la dernière égalité.

Faisons $\frac{E}{a}=E'$, passons D dans le premier nombre, et divisons par a, on aura

$$\frac{E'+D}{a}=-Aa^2-Ba-C;$$

donc la somme $E'+D$ doit être divisible par a.

Faisons $\frac{E'+D}{a}=D'$, transposons C, et divisons encore par a, il vient

$$\frac{D'+C}{a}=-Aa-B;$$

donc la somme $D'+C$ doit être divisible par a.

Faisons encore $\frac{D'+C}{a}=C'$, transposons B, et divisons par a, on obtiendra

$$\frac{C'+B}{a}=-A.$$

Enfin, faisons $\frac{C'+B}{a}=B'$ et transposons A, on aura

$$B'+A=0;$$

donc la somme $B'+A$ doit être nulle.

Si une seule des conditions précédentes vient à manquer, le nombre a n'est point une racine. Mais il en sera une si elles sont toutes remplies; car alors, en remplaçant successivement les lettres B', C',... par les quantités qu'elles représentent, on pourra remonter de l'égalité $B'+A=0$ jusqu'à l'égalité [a].

Ainsi, en résumé, après avoir préparé une équation de manière que tous ses coefficiens soient entiers (et alors celui du premier

terme peut être différent de l'unité), les conditions auxquelles on reconnaîtra qu'un nombre entier est racine de l'équation seront celles-ci :

Qu'il soit un diviseur du dernier terme ;

Qu'il divise exactement la somme qu'on obtient en ajoutant le quotient avec le coefficient du terme affecté de x ;

Qu'il divise exactement la somme du nouveau quotient ajouté au coefficient du terme affecté de x^2 ;

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à ajouter le coefficient du premier terme de l'équation avec le dernier quotient, ce qui devra donner une somme égale à zéro.

On pourrait encore assigner d'autres conditions, mais je m'en tiendrai à celles-là. Toutefois je ferai remarquer dès à présent que si on connaissait deux nombres entre lesquels fussent comprises toutes les racines réelles de l'équation, il faudrait rejeter tous les diviseurs qui excèdent ces limites. La détermination de ces limites va bientôt nous occuper.

438. Dans les exemples, il sera toujours plus simple d'essayer les diviseurs $+1$ et -1 en les substituant immédiatement dans l'équation. Quant aux autres diviseurs, on leur applique, à tous simultanément, les règles ci-dessus, ainsi qu'on va l'expliquer sur l'équation

$$2x^3-12x^2+13x-15=0.$$

Après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont point racines, j'effectue les calculs suivans :

	+3,	+5,	+15,	−3,	−5,	−15,
Quotiens	−5,	−3,	−1,	+5,	+3,	+1,
	+8,	+10,	+12,	+18,	+16,	+14,
Quotiens	*	+2,	*	−6,	*	*
		−10,		−18,		
Quotiens		−2,		+6,		
		0.		*		

La première ligne renferme les diviseurs, tant positifs que négatifs, du dernier terme —18 ; et la deuxième contient les quotiens de ce dernier terme par chacun de ses diviseurs.

La troisième est formée en ajoutant aux quotiens qu'on vient de trouver le coefficient $+13$ du terme $+13x$; et la quatrième, en divisant ces différentes sommes par les diviseurs correspondans. Les divisions qui ne se font pas exactement indiquent que les diviseurs $+3$, $+15$, -5, -15, ne sont pas racines de l'équation.

La cinquième ligne se forme en ajoutant aux derniers quotiens le coefficient -12 du terme $-12x^2$; et la sixième, en divisant les nouvelles sommes par les diviseurs correspondans. Cette épreuve ne fait rejeter ici aucun nouveau diviseur.

Enfin, la dernière ligne est formée en ajoutant le coefficient 2 du premier terme $2x^4$ aux derniers quotiens; et comme on ne trouve zéro que dans la colonne du diviseur 5, on conclut qu'il est la seule racine entière de l'équation.

Remarques. Cette racine étant connue, on peut diviser l'équation par le facteur $x-5$, et on aura pour quotient

$$2x^2-2x+3=0,$$

d'où l'on tire $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-5}$. Alors l'équation proposée est complètement résolue, et ses trois racines sont

$$x=5,\quad x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-5},\quad x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-5}.$$

Lorsque l'équation est privée de quelques termes, il ne faut pas oublier d'y avoir égard dans le calcul, en comptant leurs coefficiens comme égaux à zéro; par conséquent, les quotiens auxquels on doit les ajouter pourront être soumis immédiatement à de nouvelles divisions. On verra plus loin un exemple de ce cas (442).

439. La méthode qu'on vient d'expliquer ne montre pas combien de fois chacune des racines qu'elle détermine entre de fois dans l'équation. Pour le reconnaître, le moyen qui s'offre le premier est de diviser l'équation par les facteurs correspondans à ces racines, prises chacune une seule fois, et d'examiner ensuite, soit par la substitution immédiate, soit par les règles du n° 437, si ces racines appartiennent encore à l'équation restante. S'il s'en trouve quelques unes qui la vérifient, on est sûr qu'elles entrent au moins deux fois dans la proposée. Au moyen d'une nouvelle division, on connaîtra celles qui peuvent y entrer trois fois, et ainsi de suite.

On pourrait commencer par chercher les racines entières ; mais comme les coefficiens ne sont pas considérables, il sera mieux de transformer tout de suite cette équation en une autre dont le premier coefficient soit l'unité, sans que les autres cessent d'être entiers. Suivant la règle générale, il faudrait faire $x=\frac{y}{4}$; mais si on fait $x=\frac{y}{z}$, on verra qu'on peut prendre $z=2$, ce qui revient à poser $x=\frac{y}{2}$. En effet, par là on trouve cette transformée

$$y^4-11y^2+14y-24=0.$$

Elle ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers; par conséqnent, après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne peuvent point la vérifier, je lui applique les règles connues (437).

	+ 2,	+3,	+4,	+ 6,	+ 8,	+12,	+24,	− 2,	− 3,	− 4,	− 6,	− 8,	−12,	−24
Quot.	−12,	−8,	−6,	− 4,	− 3,	− 2,	− 1;	+12,	+ 8,	+ 6,	+ 4,	+ 3,	+ 2,	+ 1,
	+ 2,	+6,	+8,	+10,	+11,	+12,	+13,	+26,	+22,	+20,	+18,	+17,	+16,	+15,
Quot.	+ 1,	+2,	+2,	*	*	+ 1,	*	−13,	*	− 5,	− 3,	*	*	*
	−10,	−9,	−9,			−10,		−24,		−16,	−14,			
Quot.	− 5,	−3	*			*		+12,		+ 4,	*			
Quot.	*	−1,						− 6,		− 1,				
		0,						*		0.				

Aux quotiens de la 6ᵉ ligne il fallait ajouter le coefficient de y^3; mais comme ce coefficient est 0, on a divisé immédiatement ces quotiens par les diviseurs correspondans.

On reconnaît à la fin que $+3$ et -4 sont racines de l'équation en y. En divisant cette équation par le produit $(y-3)(y+4)$, il vient

$$y^2-y+2=0, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Les quatre valeurs de y étant connues, la relation $x=\frac{y}{2}$ donnent celles de x, savoir :

$$x=\frac{3}{2}, \quad x=-2, \quad x=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-7}.$$

Limites des racines des équations.

443. La méthode qui sert à trouver les racines commensurables n'est à proprement parler qu'une suite de tâtonnemens, tellement coordonnés qu'on est sûr de trouver toutes les racines de cette espèce qui peuvent exister dans une équation. C'est encore par des tâtonnemens qu'on obtiendra les valeurs approchées des racines incommensurables ; et, pour établir les règles qui doivent les diriger, la première question qui va nous occuper sera d'assigner des *limites* aux racines, c'est-à-dire, de déterminer deux nombres entre lesquels soient comprises toutes les racines positives de l'équation, et deux nombres entre lesquels soient comprises toutes les racines négatives.

444. D'abord *proposons-nous de déterminer une limite supérieure des racines positives.*

Soit x^m le premier terme et N le plus grand coefficient d'une équation donnée $X=0$. Si on considère la quantité

$$X_1 = x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1),$$

on est sûr que la partie positive n'y est pas plus grande que dans X, et que la partie négative n'y est pas moindre. Or, il est facile d'assigner à x une valeur $x=l$, à partir de laquelle toutes les valeurs plus grandes rendront X_1 positif ; donc aussi, à plus forte raison, toutes ces valeurs rendront-elles X positif. Ainsi, à partir de $x=l$ aucune valeur ne devra anéantir X, et par conséquent on pourra prendre l pour la limite cherchée.

Pour déterminer l rappelons (53) que

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1);$$

et en conséquence on aura

$$X_1 = x^m - \frac{N(x^m-1)}{x-1} = \frac{x^m(x-1-N)+N}{x-1}.$$

Or, sous cette forme, on voit sur le champ que X_1 sera positif en

prenant $x=N+1$ ou $x>N+1$; donc *on peut prendre pour limite supérieure des racines positives d'une équation le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité.*

Par cette règle on trouve $l=101$ pour limite des racines de l'équation

$$[1] \quad x^7+8x^6+2x^5-10x^4-40x^3+10x^2-14x-100=0.$$

445. En suivant la même voie, on peut aussi parvenir à une autre règle, dans laquelle on aura égard au rang du premier terme négatif de l'équation. Supposons que ce terme renferme x^{m-r}, représentons encore par N le plus grand coefficient négatif, et posons

$$X_2=x^m-N(x^{m-r}+x^{m-r-1}\ldots+x+1):$$

on pourra raisonner sur X_2 comme sur X_1. D'abord on a

$$X_2=x^m-\frac{N(x^{m-r+1}-1)}{x-1}=\frac{x^{m-r+1}[x^{r-1}(x-1)-N]+N}{x-1};$$

donc X_2 sera positif si on substitue au lieu de x une valeur plus grande que 1, et telle qu'on ait

$$x^{r-1}(x-1)>N.$$

Ces conditions seront évidemment remplies si on trouve pour x une valeur >1, qui satisfasse à l'équation

$$(x-1)^{r-1}(x-1)=N,$$

ou, ce qui est la même chose, à celle-ci :

$$(x-1)^r=N.$$

Or, de là on tire en effet une valeur >1, savoir :

$$x=1+\sqrt[r]{N}.$$

Ainsi on peut établir cette règle : *Du plus grand coefficient négatif de l'équation extrayez la racine dont l'ordre est marqué par la différence entre le degré de l'équation et le degré du premier terme négatif, puis à cette racine ajoutez l'unité ; la somme sera une limite supérieure des racines positives.*

Lorsque le premier terme négatif vient immédiatement après le premier terme de l'équation, cette limite coïncide avec celle du n° précédent; mais lorsqu'il est à un rang plus éloigné, et que le coefficient N surpasse l'unité, elle sera toujours plus approchée. Par exemple, dans l'équation [1] elle est $1+\sqrt[5]{100}$ ou 6, nombre beaucoup moindre que 101 qui était donné par la première règle.

446. Ces deux règles sont d'une application prompte et facile; mais comme elles donnent presque toujours une limite trop éloignée, la marche suivante doit être préférée.

Supposons d'abord que l'équation donnée $X=0$ se compose d'une suite de termes positifs, après lesquels il n'y ait plus que des termes négatifs, tous de degré moindre que les premiers. Soit Y l'assemblage des termes positifs, $-Y'$ celui des termes négatifs, et x^r la plus petite puissance de x contenue dans Y; on aura

$$X=Y-Y'=x^r\left(\frac{Y}{x^r}-\frac{Y'}{x^r}\right).$$

Dans le quotient de Y par x^r aucun terme ne doit renfermer x en dénominateur, et le contraire doit arriver à tous ceux du quotient de Y' par x^r; donc, en faisant croître x à partir d'une valeur positive quelconque, le premier quotient doit augmenter, ou au moins rester constant si Y est un monôme, tandis que le second quotient diminue nécessairement. Ainsi, dès qu'on aura une valeur positive $x=l$ qui rendra positif le polynôme X ou $Y-Y'$, on sera certain qu'en y substituant au lieu de x des valeurs plus grandes, les résultats seront toujours positifs, et même qu'ils iront en augmentant jusqu'à l'infini. Au-delà de l il n'y aura donc aucun nombre qui puisse anéantir $Y-Y'$, et par conséquent l sera une limite supérieure des racines positives. De là on conclut que si on substitue dans X successivement, au lieu de x, des nombres positifs croissans, jusqu'à ce qu'on ait un résultat positif, le nombre qui donnera ce résultat sera la limite cherchée.

Maintenant, supposons que l'équation renferme des termes positifs entremêlés avec des termes négatifs, ce qui est le cas le plus ordinaire. Il est toujours permis de considérer le premier terme de l'équation comme positif. Réunissons-y les termes positifs qui

peuvent se trouver avant le premier terme négatif, et, faisant abstraction de tous les autres termes positifs, comparons cette somme avec celle des termes négatifs de l'équation. Le raisonnement ci-dessus prouve qu'on obtiendra une limite supérieure des racines positives en déterminant une valeur positive de x qui rende la première somme supérieure à la seconde; et c'est à quoi l'on réussira facilement en substituant au lieu de x des nombres croissans à partir de zéro.

Dans le cas qui nous occupe, où les termes positifs et négatifs sont entremêlés, on pourra souvent partager le premier membre de l'équation en plusieurs parties, dans chacune desquelles on aura soin de mettre un ou plusieurs termes positifs, suivis de termes négatifs de degré moindre. Alors on déterminera, comme plus haut, par des essais successifs, une valeur positive à partir de laquelle toutes ces parties soient positives; et cette valeur pourra être prise pour la limite cherchée. Assez ordinairement il y aura plusieurs manières d'opérer le partage des termes de l'équation, ce qui pourra donner différentes limites; mais on devra toujours choisir la limite la moins élevée.

Dans tous les cas, il est à remarquer non-seulement que la limite à laquelle on parvient jouit de la propriété que les nombres plus grands, étant substitués dans l'équation, donnent des résultats positifs, mais encore que ces résultats vont en augmentant jusqu'à l'infini. La première condition est la seule nécessaire pour qu'un nombre soit une limite supérieure des racines positives : car il résulte d'un théorème, qui sera démontré plus loin (453), que tout nombre au-dessus de la plus grande racine positive doit donner un résultat positif.

Appliquons ce qui précède à l'équation

$$x^4-3x^3+2x^2-3x-10=0.$$

En comparant le premier terme avec les termes négatifs, on aura seulement à considérer le polynôme

$$x^4-3x^3-3x-10:$$

or, si on essaie successivement $x=0, 1, 2, \ldots$ on trouve que

$x=4$ donne un résultat positif; donc ce nombre peut être pris pour limite.

Mais le premier membre de l'équation se présente de lui-même comme la somme des deux quantités

$$x^4-3x^3 \quad \text{et} \quad 2x^2-3x-10,$$

dont l'une devient zéro, et l'autre devient positive, par l'hypothèse $x=3$: or, cela suffit pour qu'on puisse prendre 3 pour limite.

Soit encore l'équation, qui nous a déjà servi d'exemple (444),

$$[1] \quad x^7+8x^6+2x^5-10x^4-40x^3+10x^2-14x-100=0.$$

Parmi les différentes manières de décomposer le premier membre, je choisirai celle-ci :

$$(x^7-100)+(8x^6+2x^5-10x^4-40x^3)+(10x^2-14x)$$

$$\text{ou} \quad (x^7-100)+8x^3(x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x-5)+10x(x-\frac{7}{5})\ ;$$

et comme chaque partie devient positive par la valeur $x=2$, on est sûr que 2 est une limite supérieure des racines positives. On voit qu'elle est encore plus approchée que celle du n° 445.

447. J'indiquerai encore un procédé assez commode employé par NEWTON, et qui donne souvent la limite la plus approchée. Il consiste à chercher un nombre tel que si on le retranche des racines de l'équation proposée, il en résulte une transformée dont tous les termes soient positifs. Alors il est évident qu'aucune valeur positive ne pourra satisfaire à cette transformée, et que par conséquent le nombre dont il s'agit surpassera nécessairement la plus grande racine positive de la proposée.

Soit l ce nombre inconnu; pour diminuer de l toutes les racines d'une équation donnée $X=0$, on fait $x=l+y$, et il en résulte une transformée en y, qu'on peut mettre sous la forme

$$L+L'y+\tfrac{1}{2}L''y^2+\tfrac{1}{2.3}L'''y^3\ldots+y^m=0,$$

$L, L', L'', \ldots$ représentant le polynôme X et ses dérivés, dans lesquels x aurait été remplacé par l. Or, on veut que tous les

coefficiens de l'équation en y soient positifs; par conséquent la question se réduit à trouver une valeur de x qui rende positives toutes les quantités

$$X,\ X',\ X'',\ X''',\ \text{etc.}$$

La quantité X étant du degré m, X' est du degré $m-1$, X'' est du degré $m-2$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière quantité qui ne contient plus x et qui est essentiellement positive. Il convient donc de déterminer d'abord une valeur de x qui rende positive l'avant-dernière quantité, ce qui sera toujours facile, puisqu'elle est du 1er degré; ensuite on augmentera cette valeur, si cela est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rende aussi la quantité précédente positive; et on continuera de même, en remontant successivement jusqu'à X. Pour plus de commodité, on n'emploie ordinairement dans ces essais que des nombres entiers.

Pour exemple soit l'équation

$$x^5+x^4-4x^3-6x^2-7000x+800=0.$$

On aura

$$\begin{aligned} X &= x^5+x^4-4x^3-6x^2-7000x+800,\\ X' &= 5x^4+4x^3-12x^2-12x-7000,\\ \tfrac{1}{2}X'' &= 10x^3+6x^2-12x-6,\\ \tfrac{1}{2.3}X''' &= 10x^2+4x-4,\\ \tfrac{1}{2.3.4}X'''' &= 5x+1. \end{aligned}$$

On voit sur-le-champ qu'il suffit de faire $x=1$ pour que les deux derniers polynômes soient positifs. $\frac{1}{2}X''$ le deviendra en prenant $x=2$; et X', en s'élevant jusqu'à $x=7$. Comme cette valeur rend aussi X positif, on conclut qu'on peut prendre 7 pour limite. On trouverait $7000+1$ par la règle du n° 444, et $1+\sqrt{7000}$ ou 84 par celle du n° 445.

448. Jusqu'à présent il n'a été question que de la limite supérieure des racines positives. Elle est en effet la plus importante, car elle sert à trouver toutes les autres. Pour déterminer une *limite inférieure* de ces racines, faisons $x=\frac{1}{y}$, dans l'équation pro-

posée, et représentons par l la limite supérieure des racines positives de la transformée. Il est évident que $\frac{1}{l}$ sera un quotient moindre que la plus petite racine positive de la proposée, de sorte qu'on pourra prendre ce quotient pour la limite cherchée. Dans les applications, il convient qu'elle soit la plus grande possible; par conséquent il faudra toujours choisir pour l la limite la plus rapprochée qu'on pourra.

Si on n'avait pas d'autre but que d'avoir une limite inférieure différente de zéro, on en obtiendrait une sur-le-champ *en divisant le dernier terme de l'équation donnée par la somme faite de ce dernier terme et du plus grand coefficient de signe contraire à ce terme.*

Pour démontrer cette règle, soit l'équation

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} \ldots + Sx^2 + Tx \pm U = 0.$$

En faisant $x = \frac{1}{y}$, et ramenant l'équation résultante à la forme ordinaire, il vient

$$y^m + \frac{T}{\pm U} y^{m-1} + \frac{S}{\pm U} y^{m-2} \ldots + \frac{P}{\pm U} y + \frac{1}{\pm U} = 0.$$

Or, si on suppose que dans [A] le plus grand coefficient de signe contraire à $\pm U$ ait pour grandeur absolue R, il est évident que $\frac{R}{U}$ sera le plus grand coefficient négatif de la transformée; donc on pourra prendre $l = \frac{R}{U} + 1$, et par suite $\frac{1}{l} = \frac{U}{U+R}$, ce qui est conforme à la règle énoncée.

449. Quant aux limites des racines négatives, elles se trouveront en changeant x en $-x$ dans l'équation donnée. Par-là, on change les signes des racines, de sorte qu'en cherchant les limites des racines positives de la transformée et en leur donnant le signe —, on aura les limites des racines négatives de la proposée.

450. Lorsque, dans une équation, tous les termes ont le même signe, il est clair qu'aucun nombre positif ne peut satisfaire à l'é-

quation; ainsi, il n'y a point lieu, dans ce cas, à chercher les limites des racines positives.

Il n'y a pas lieu non plus à chercher des limites aux racines négatives d'une équation dont tous les termes de degré pair ont un même signe, tandis que ceux de degré impair ont le signe contraire. Il est clair, en effet, qu'en y substituant un nombre négatif quelconque, tous les termes deviendront de même signe, et ne pourront point donner une somme égale à zéro.

Que les équations soient complètes ou incomplètes, ces remarques sont également vraies. Toutefois, si le dernier terme manque, l'équation a une ou plusieurs racines nulles; mais en faisant abstraction de ces racines les remarques précédentes subsisteront.

451. Je placerai ici une proposition qui a un rapport intime avec les recherches relatives aux limites, et qui est d'un fréquent usage dans la haute analyse.

Soit un polynôme X *de la forme*

$$X = Mx^m + Nx^n + Px^p + \text{etc.},$$

dans lequel les exposans m, n, p, *etc. sont entiers ou fractionnaires, mais positifs et décroissans. Il existe toujours une valeur positive de* x, *telle qu'en donnant à* x *des valeurs de plus en plus grandes, le polynôme* X *prendra des valeurs qui seront de même signe que son premier terme* Mx^m, *et qui iront en augmentant jusqu'à l'infini.*

Mettons d'abord M en facteur commun, et écrivons

$$X = M\left(x^m + \frac{N}{M}x^n + \frac{P}{M}x^p + \text{etc.}\right).$$

Dans les parenthèses, parmi les termes en x^n, x^p,... il peut s'en trouver qui aient des coefficiens positifs : représentons par Y la somme de ces termes, et par Y' celle des termes affectés de coefficiens négatifs. On aura

$$X = M(x^m + Y - Y') = M\left[x^m\left(1 - \frac{Y'}{x^m}\right) + Y.\right]$$

Il est clair que tous les termes du quotient de Y' par x^m doivent avoir en dénominateurs des puissances positives de x, et que par

conséquent, en donnant à x une très-grande valeur positive, ce quotient sera <1. Par suite, la quantité entre crochets sera évidemment positive, car x^m est positif et Y ne renferme que des termes positifs ; donc X sera de même signe que M ou Mx^m.

Représentons par λ cette très-grande valeur, et supposons qu'on fasse croître x à partir de λ, le quotient de Y′ par x^m ira en décroissant, tandis que x^m et Y augmenteront indéfiniment ; donc la quantité X ira elle-même en croissant jusqu'à l'infini, et c'est ce qu'on voulait démontrer.

Si on veut assigner une valeur à λ, on peut y parvenir, comme pour les limites, en substituant au lieu de x des nombres positifs croissans jusqu'à ce que x^m surpasse Y′; mais on y parviendra encore par le procédé suivant, déjà empoyé n° 378. Supposons qu'on ait

$$\frac{Y'}{x^m}=\frac{R}{x^r}+\frac{S}{x^s}+\frac{T}{x^t}+\text{etc.},$$

et que ce quotient soit composé de α termes. Posons les inégalités

$$\frac{R}{x^r}<\frac{1}{\alpha},\quad \frac{S}{x^s}<\frac{1}{\alpha},\quad \frac{T}{x^t}<\frac{1}{\alpha},\quad \text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$x^r>\alpha R,\quad x^s>\alpha S,\quad x^t>\alpha T,\quad \text{etc.}$$

En essayant successivement pour x des nombres de plus en plus grands, on en trouvera un qui satisfera à toutes ces conditions, et on pourra le prendre pour λ.

Remarques. Quand les exposans $m,n,p,\ldots$ sont tels que les termes du polynôme X ne deviennent pas imaginaires en y mettant des valeurs négatives à la place de x, on pourra aussi assigner une valeur négative de x à partir de laquelle toutes les valeurs négatives plus grandes feront prendre à X des valeurs de même signe que le premier terme Mx^m, et croissantes jusqu'à l'infini. En effet, en faisant $x=-y$, X devient

$$X=M(-y)^m+N(-y)^n+\text{etc.}:$$

or, de quelque manière que les signes se distribuent, on peut, d'après ce qui précède, déterminer pour y une valeur positive $y=\lambda'$, qui remplisse, à l'égard du polynôme précédent, les conditions de l'énoncé; donc la valeur négative $x=-\lambda'$ sera celle qu'il s'agit d'assigner.

Comme cas particulier, on peut considérer celui où tous les exposans du polynôme X sont entiers. Alors, les termes ne cessent pas d'être réels quand on y substitue des valeurs négatives de x; par conséquent, dans ce cas, on peut toujours assigner à x une limite positive λ et une limite négative $-\lambda'$, telles qu'en faisant croître x positivement à partir de λ, ou négativement à partir de $-\lambda'$, il en résultera, pour le polynôme X, des valeurs qui seront constamment de même signe que son premier terme, et qui pourront devenir aussi grandes qu'on voudra.

Théorèmes sur les indications que fournissent les substitutions de deux nombres quelconques à la place de l'inconnue.

452. Les premiers tâtonnemens qu'on a dû faire pour résoudre une équation particulière, ont été sans doute d'essayer les substitutions de différens nombres positifs ou négatifs, croissans à partir de zéro; et c'est ainsi qu'on aura été naturellement conduit aux théorèmes suivans qui sont de la plus grande utilité dans la recherche des racines.

453. Théorème I. *Si deux nombres quelconques, substitués successivement à la place de l'inconnue* x, *dans une équation* $Ax^m+Bx^{m-1}+\text{etc.}=0$, *donnent deux résultats de signes contraires, l'équation aura au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.*

1° Supposons qu'on ait substitué deux nombres positifs α et β. Je représenterai l'équation par $M-M'=0$, M étant la somme des termes qui ont le signe +, et $-M'$ la somme de ceux qui ont le signe −. Si la substitution de α à la place de x donne un résultat négatif, c'est qu'alors on a $M<M'$; et si la substitution de β donne un résultat positif, c'est qu'on a $M>M'$. Soit α moindre que β, et concevons qu'on fasse croître x par toutes les nuances de grandeur depuis α jusqu'à β.

Puisque M et M′ se composent de termes additifs qui ne contiennent x qu'à des puissances entières et positives, il s'ensuit que M et M′ devront croître en même temps que x; et de plus, il est évident que M et M′ passeront par tous les états de grandeur depuis les valeurs qui résultent de la substitution de α jusqu'à celles qui résultent de la substitution de β. Mais on avait d'abord $M < M'$, et ensuite on a eu $M > M'$; donc, dans l'intervalle, il a dû arriver, au moins une fois, que M ait été égal à M′ (*). Or, la valeur de x qui rend $M = M'$ est une racine de l'équation proposée; donc entre α et β il existe au moins une racine de cette équation.

Il est clair que la conclusion serait la même, si on avait d'abord $M > M'$, et ensuite $M < M'$.

2° Supposons qu'on ait substitué deux nombres négatifs $-\alpha$ et $-\beta$. On ramène ce cas au précédent en faisant dans l'équation $x = -y$. Il est clair qu'en substituant α et β dans la transformée, les résultats seront les mêmes qu'en substituant α et β dans la proposée; donc, à cause de l'hypothèse faite dans l'énoncé, ces résultats seront de signes contraires. Or, les nombres α et β sont positifs; donc, d'après ce qui vient d'être démontré, on est sûr que l'équation en y a une racine entre α et β. Mais il suffit de changer les signes des racines de l'équation en y pour avoir les racines de l'équation en x; donc cette dernière a une racine entre $-\alpha$ et $-\beta$.

3° Supposons qu'on ait substitué un nombre négatif $-\alpha$ et un nombre positif β. Observons que, dans les cas précédens, l'un des deux nombres substitués pouvait être zéro, et que le raisonnement subsistait toujours. Cela posé, faisons $x = 0$: l'équation donnée se réduira à son dernier terme, lequel sera de signe contraire au résultat de la substitution de $-\alpha$ ou de β. L'équation a donc une racine entre zéro et $-\alpha$, ou entre zéro et β; et à plus forte raison peut-on dire que cette racine est entre $-\alpha$ et β.

(*) Ainsi, dit LAGRANGE, deux mobiles qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, partant à la fois de deux points différens, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin.

454. THÉORÈME II. *Lorsque deux quantités comprennent entre elles une racine de l'équation* $X=0$, *et n'en comprennent qu'une, si on les substitue successivement dans l'équation, elles donneront deux résultats de signes contraires : et, en général, toutes les fois que les deux quantités comprennent un nombre impair de racines, les deux résultats seront de signes contraires; mais quand elles ne comprennent pas de racines, ou quand elles en comprennent un nombre pair, les résultats seront de même signe.*

Supposons que a soit une racine réelle comprise entre deux nombres α et β, et qu'elle soit la seule. Le polynôme X est divisible par $x-a$, et, en nommant Y le quotient, on peut mettre X sous la forme

$$X=(x-a)Y.$$

Faisons successivement $x=\alpha$ et $x=\beta$; les valeurs de Y devront être de même signe : autrement il y aurait entre α et β une racine de l'équation $Y=0$, laquelle serait une nouvelle racine de $X=0$ comprise entre α et β, ce qui est contre l'hypothèse. Mais d'ailleurs le facteur $x-a$ changera de signe : car les différences $\alpha-a$ et $\beta-a$ sont des signes contraires, attendu que a est entre α et β; donc les deux résultats qu'on obtient en substituant α et β dans X sont de signes contraires.

Supposons plus généralement qu'il y ait entre α et β un nombre impair de racines a, b, c, etc., on sait que X est divisible par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, de sorte qu'en nommant encore Y le quotient, on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\times Y.$$

On démontrera comme tout à l'heure qu'en faisant $x=\alpha$ et $x=\beta$, les deux valeurs correspondantes de Y auront le même signe, tandis que chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,... change de signe; et comme ces facteurs sont en nombre impair, on en conclut que les résultats des substitutions de α et de β dans X doivent être des signes contraires.

Cette même démonstration prouve que s'il n'y a point de racines entre α et β, ou que s'il y en a un nombre pair, les résultats des deux substitutions auront le même signe.

Remarque. Le théorème qu'on vient de démontrer mérite la plus grande attention, et doit surtout tenir en garde contre quelques assertions trop hasardées auxquelles on pourrait se laisser entraîner. Par exemple, de ce que les substitutions de deux quantités donnent des résultats de signes contraires, on peut bien conclure, d'après le théorème I, que ces quantités comprennent une racine ; mais on aurait tort d'affirmer qu'elles n'en comprennent qu'une ; car le théorème II prouve qu'il pourrait y en avoir plusieurs, en nombre impair. Pareillement, lorsque les résultats sont de même signe, on ne saurait affirmer que les deux quantités ne comprennent aucune racine, car il pourrait arriver qu'il y en eût un nombre pair.

455. THÉORÈME III. *Lorsqu'une équation n'a point de racines réelles, si on y substitue à la place de* x *des quantités réelles quelconques, les résultats seront toujours de même signe.*

En effet, s'il était possible de trouver deux résultats de signes contraires, on serait assuré que l'équation a au moins une racine réelle comprise entre les deux quantités substituées, ce qui est contre la supposition.

Quand on a divisé une équation par tous les facteurs correspondans aux racines réelles, l'équation restante doit être dans le cas dont il s'agit. Mais une équation qui contiendrait des racines réelles donnerait encore des résultats de même signe, si chacune d'elles y entrait un nombre pair de fois. En effet, en nommant a, b,... ces racines, on peut alors écrire l'équation ainsi :

$$(x-a)^{2n}(x-b)^{2n'}\ldots\times \mathrm{Y}=0:$$

or, quelque valeur réelle qu'on substitue au lieu de x, les facteurs $(x-a)^{2n}$, $(x-b)^{2n'}$,... ne sauraient devenir négatifs ; et, d'un autre côté, Y ne peut point changer de signe, puisque l'équation $\mathrm{Y}=0$ n'a que des racines imaginaires.

456. Plusieurs conséquences du THÉORÈME Ier doivent être placées ici.

1° *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

Le premier terme étant toujours supposé positif, considérons d'abord le cas où le dernier terme est un nombre négatif —U.

Nommons $+l$ une limite supérieure des racines positives, déterminée comme il a été expliqué précédemment. Si dans l'équation on fait $x=+l$, on aura un résultat positif; et si on fait $x=0$, on aura le résultat négatif $-$U. Donc, entre o et $+l$, l'équation a au moins une racine réelle, laquelle ne peut être que positive.

Maintenant, considérons le cas où le dernier terme de l'équation est positif. On remplacera x par $-x$, et comme le premier terme deviendra négatif, on le ramènera à être positif en changeant tous les signes de l'équation. Par là le dernier terme deviendra négatif; donc, en vertu de ce qui vient d'être démontré, on est sûr que la transformée a une racine positive, et par conséquent la proposée a une racine négative.

2° *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

Faisons successivement $x=0$ et $x=+l$, on aura deux résultats de signes contraires; donc l'équation a au moins une racine positive. Ensuite, si on change x en $-x$ dans l'équation, la transformée aura encore son premier terme positif, et son dernier terme négatif; donc elle aura une racine positive; donc la proposée en aura une négative.

Remarque. Quand une équation est de degré pair et que son dernier terme est positif, ces raisonnemens ne font plus connaître si l'équation a quelque racine réelle, parce qu'alors les substitutions ne donnent plus des résultats de signes contraires. C'est qu'en effet les équations qui n'ont que des racines imaginaires doivent nécessairement être de cette forme : car, si elles étaient de degré impair, elles auraient au moins une racine réelle; et si, étant de degré pair, leur dernier terme était négatif, elles en auraient au moins deux.

457. Par des raisonnemens analogues à ceux du n° précédent, on tire du théorème II les conséquences qui suivent.

1° *Dans une équation de degré impair, les racines réelles de signe contraire au dernier terme sont en nombre impair, et les racines de même signe, s'il en existe, sont en nombre pair.*

Lorsque le dernier terme est négatif, les substitutions $x=0$ et $x=+l$ donnant des résultats de signes différens, on conclut, en

vertu du théorème II, que les racines positives sont en nombre impair. Si on change x en $-x$, l'équation se transforme en une autre qu'on ramène à avoir son premier terme et son dernier terme positifs : or, qu'on fasse dans celle-ci $x=0$ ou x égal à la limite surieure de ses racines positives, on a deux résultats positifs ; donc les racines positives de cette transformée, et par suite les racines négatives de la proposée ne peuvent être qu'en nombre pair.

Lorsque l'équation proposée a son dernier terme positif, la transformée aura son dernier terme négatif. On pourra donc lui appliquer les dernières conséquences, et par suite on conclura que la proposée a un nombre impair de racines négatives et un nombre pair de racines positives.

2° *Dans une équation de degré pair, si le dernier terme est négatif, les racines positives sont en nombre impair et les racines négatives aussi en nombre impair; et, si le dernier terme est positif, les racines de chaque sorte ne peuvent exister qu'en nombre pair.*

Cette conséquence s'obtient si facilement en reprenant le raisonnement ci-dessus, qu'il est inutile de s'y arrêter davantage.

Remarque. Dans tous les cas, on voit que le nombre total des racines réelles est de même parité que le degré de l'équation, c'est-à-dire qu'il est impair ou pair, selon que ce degré est impair ou pair. Donc, s'il y a des racines imaginaires dans l'équation, elles y sont en nombre pair, ce qui est conforme et à la remarque déjà faite n° précédent, et à la proposition qui termine le n° 386.

458. Voici encore une proposition très-simple, qui doit trouver sa place ici. *Si une équation se compose d'une suite de termes positifs, après lesquels il n'y ait plus que des termes négatifs, elle aura une racine positive et n'en aura qu'une.*

Puisque son dernier terme est négatif, elle a certainement une racine positive (456); et, pour démontrer qu'elle n'en a qu'une, on raisonnera comme dans le n° 446. Nommons Y la somme des termes positifs, $-Y'$ celle des termes négatifs, et x^r la plus petite puissance de x renfermée dans Y : on peut écrire l'équation sous cette forme

$$x^r\left(\frac{Y}{x^r}-\frac{Y'}{x^r}\right)=0.$$

Soit $x=a$ la valeur positive qui satisfait à l'équation, il faut qu'alors on ait

$$\frac{Y}{x^r}=\frac{Y'}{x^{r'}}.$$

Or, en augmentant x, le premier membre de cette égalité augmentera, ou tout au moins restera constant, tandis que le second diminuera; et le contraire arrivera en diminuant x : donc $x=a$ est la seule racine positive de l'équation.

Séparation des racines.

459. Comme les règles qui servent à découvrir les racines commensurables sont d'une application extrêmement facile, il convient, toutes les fois qu'on a une équation à résoudre, de chercher d'abord les racines de cette espèce, tant égales qu'inégales, et de les supprimer ensuite au moyen de la division. A la vérité, ces racines pourraient se trouver par les mêmes procédés que les racines incommensurables, mais les calculs qu'ils exigent sont fort laborieux, et ils le sont d'autant plus que le degré de l'équation à laquelle on les applique est plus élevé; c'est pourquoi l'on doit toujours commencer par abaisser ce degré autant que possible : or, la suppression des racines commensurables est un moyen d'opérer cet abaissement.

La même raison suffirait pour rechercher si l'équation a des racines égales, afin de la décomposer, dans le cas ou il en existerait, et d'autres équations plus simples dont toutes les racines fussent inégales (405). Mais ici on doit remarquer en outre que cette préparation est tout-à-fait nécessaire pour le succès des méthodes qui vont être exposées.

En conséquence, je supposerai toujours, dans ce qui va suivre, que l'équation à résoudre n'a plus ni racines commensurables ni racines égales, de sorte qu'en parlant de racines réelles, il ne sera question que de racines incommensurables et inégales.

460. La recherche de ces racines se partagera en deux parties distinctes. Dans la première, on déterminera, pour chaque racine, deux nombres entre lesquels elle sera comprise, et comprise toute seule : c'est ce qu'on appelle *la séparation des racines*. Dans la

seconde, on se proposera d'évaluer les racines avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

Si on change dans une équation l'inconnue x en $-x$, et qu'on prenne avec le signe — les racines positives de la transformée, on aura toutes les racines négatives de la proposée. Ainsi, il suffira de montrer comment on trouve les racines positives des équations.

461. Soit une équation quelconque

$$X=0,$$

dont toutes les racines sont inégales. Imaginons qu'on y substitue successivement, à la place de l'inconnue x, des nombres positifs p, q, r, s, etc., formant une suite croissante, commençant à la limite inférieure des racines positives, finissant à la limite supérieure, et en outre tellement choisis qu'entre chaque nombre et le suivant il ne puisse tomber qu'une seule racine de l'équation. D'après le théorème II (454), il est évident qu'on apprendra avec certitude, par les signes des résultats de ces substitutions, quels sont ceux de ces nombres qui comprennent véritablement une racine ou qui n'en comprennent point; et alors la séparation des racines positives serait complète.

La condition essentielle à laquelle sont assujétis les nombres $p, q, r, s, \ldots$ c'est que deux d'entre eux, pris consécutivement, ne puissent pas comprendre plus d'une racine : or, cette condition sera remplie, si on prend pour ces nombres les termes d'une progression arithmétique dont la raison soit une quantité δ moindre que la plus petite différence qui existe entre les racines positives de l'équation proposée. Ainsi, la difficulté se réduit à connaître la raison δ, et c'est à quoi l'on parvient au moyen de l'équation aux carrés de différences des racines de la préposée (*).

(*) Cet usage de l'équation aux carrés des différences, qui est un point important des recherches de LAGRANGE, avait déjà été remarqué en 1762, par WARING dans ses *Miscellanea analytica*. Mais, dit LAGRANGE, « je ne con» naissais pas cet ouvrage lorsque je composai mon premier mémoire sur les » équations. D'ailleurs cette remarque, n'étant présentée par WARING que » d'une manière isolée, serait peut-être restée long-temps stérile sans les re» cherches dont je l'ai accompagnée. »

On a montré comment s'obtient cette équation (427). Supposons qu'on l'ait trouvée, et qu'on ait évalué, par les procédés connus (448), la limite inférieure λ des racines positives de cette équation. On sera sûr que cette limite est moindre que le carré de la plus petite différence qui existe entre les racines de la proposée, et par conséquent on pourra faire

$$\delta = \sqrt{\lambda}.$$

Comme $\sqrt{\lambda}$ est ordinairement incommensurable, on prendra préférablement un nombre rationnel $< \sqrt{\lambda}$.

Lorsqu'on pourra trouver pour λ un nombre > 1, on choisira pour δ le nombre entier au-dessous de $\sqrt{\lambda}$; et alors, pour opérer la séparation des racines, on n'aura qu'à substituer des nombres entiers dans l'équation $X=0$. Quand on aura reconnu ainsi qu'il y a une racine entre deux de ces nombres, on pourra encore substituer les nombres entiers intermédiaires, et déterminer, par les signes des résultats, les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels elle est comprise.

Le plus souvent λ sera une fraction < 1, par suite δ sera aussi une fraction < 1, et on aurait à substituer des nombres fractionnaires. Mais on pourra les éviter par une simple transformation, en faisant $x = \delta x'$. En effet, pour que deux valeurs de x aient entre elles une différence $< \delta$, il est clair que les valeurs de x' doivent différer entre elles de plus d'une unité; et dès-lors on pourra trouver par des substitutions entières les deux nombres consécutifs qui comprennent chaque racine réelle de la transformée en x'.

462. Envisagée sous un point de vue purement théorique, la méthode précédente résout complètement le problème de la séparation des racines. Mais si on considère, d'une part, la longueur des calculs nécessaires pour former l'équation aux carrés des différences, quand l'équation proposée s'élève un peu haut; et, de l'autre, la multitude des substitutions successives qu'on peut avoir à effectuer, on ne saurait disconvenir qu'un tel moyen de solution doit être regardé comme presque impraticable. LAGRANGE, qui s'est long-temps appliqué à affranchir cette méthode de l'emploi de l'équation aux carrés des différences, a reconnu qu'on pouvait trouver la quantité δ sans calculer cette équation en entier. Mais,

malgré cette abréviation, les opérations sont encore d'une longueur excessive. Voyez la Note IV du *Traité de la résolution des équations numériques*.

Afin de diminuer le travail des substitutions, on aura soin, dans chaque cas particulier, de prendre pour limite inférieure et pour limite supérieure des racines de l'équation proposée, les nombres les plus rapprochés qu'on pourra, et aussi de choisir pour δ le plus grand nombre possible.

Assez ordinairement, après avoir déterminé les limites des racines, tant positives que négatives, on essaie immédiatement les nombres entiers consécutifs compris entre ces limites; et s'il arrive que les signes des résultats indiquent autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, comme on sait qu'il ne peut pas y avoir un plus grand nombre de racines, on sera dispensé de calculer l'équation aux carrés des différences.

En général, on ne devra omettre aucun moyen propre à éclairer sur la nature des racines, afin d'en profiter pour simplifier les calculs autant que possible.

Le cas où l'on saurait d'avance que toutes les racines sont réelles mérite surtout d'être remarqué. Il est clair qu'alors en opérant des substitutions de plus en plus rapprochées, entre les limites extrêmes qui comprennent toutes les racines, on finira nécessairement par trouver dans les résultats un nombre de changemens de signes égal au degré de l'équation; et par conséquent alors toutes les racines seront séparées. Je reviendrai plus loin sur ce cas particulier (480).

463. *Remarque.* Une objection doit être prévenue ici. Dans le nº 427, pour arriver à l'équation aux carrés des différences, on doit passer par l'équation aux différences, et celle-ci se trouve par une élimination. Or, le seul procédé général d'élimination que nous ayons exposé est celui du plus grand commun diviseur, et l'on sait qu'il conduit à une équation finale qui peut avoir la double imperfection de manquer de quelques racines et d'en contenir d'étrangères : par conséquent il semble que, faute d'avoir la véritable équation aux différences, la méthode qu'on vient d'expliquer, pour opérer la séparation des racines, deviendra illusoire. Avec un peu d'attention cette difficulté s'évanouit.

Supposons d'abord que l'équation finale renferme toutes les différences des racines, et qu'elle n'ait que le défaut de contenir des racines étrangères, il est clair que la limite inférieure de ses racines sera certainement moindre que la plus petite différence des racines de la proposée, et que par conséquent on peut la prendre pour la valeur de δ.

En second lieu, supposons que l'équation finale manque de quelques différences. C'est que, dans les divisions qu'on opère pour effectuer l'élimination, on aura supprimé quelques facteurs; et on sait qu'en égalant ces facteurs à zéro, on aura des équations qui devront contenir ces différences. Donc, si on évalue les limites inférieures des racines de toutes ces équations, aussi bien que celle de l'équation finale, on sera encore assuré qu'on peut prendre δ égal à la plus petite de ces limites.

On peut encore remarquer que, dans la véritable équation aux différences, les racines étant deux à deux égales et de signes contraires, la plus petite racine négative serait égale, au signe près, à la plus petite racine positive : par conséquent, si on détermine une quantité moindre que la plus petite racine positive des équations dont on vient de parler, et aussi une quantité moindre que la plus petite racine négative de ces mêmes équations, il sera permis de choisir la raison δ égale à la plus grande de ces deux limites, abstraction faite du signe.

464. Je vais maintenant présenter quelques exemples d'équations dans lesquelles il s'agira d'opérer la séparation des racines.

Exemple I. Soit l'équation

$$x^3+x-3=0.$$

On voit sur-le-champ qu'elle tombe dans le cas du n° 458, et que par conséquent elle a une racine positive unique. Si on veut avoir la partie entière de cette racine, il suffira donc de substituer au lieu de x les nombres 0, 1, 2, ... jusqu'à ce qu'on trouve des résultats de signes contraires.

Nombres substitués.......	0,	1,	2;
Résultats correspondans...	-3,	-1,	$+7$.

Ainsi la racine dont il s'agit est comprise entre 1 et 2.

Pour chercher les racines négatives, on changera x en $-x$. La transformée sera

$$x^3+x+3=0\ ;$$

et comme elle ne renferme que des signes $+$, il est évident qu'elle n'a point de racine positive. Donc la proposée n'a point de racine négative, et par conséquent les deux autres racines sont imaginaires.

Exemple II. Soit l'équation

$$x^4-5x-10=0.$$

Elle est encore dans le cas du n° 458; et, si on y remplace x par $-x$, elle devient celle-ci,

$$x^4+5x-10=0,$$

laquelle est aussi dans le même cas. Donc l'équation proposée n'a que deux racines réelles, l'une positive, et l'autre négative. La partie entière se trouvera donc par des substitutions entières comme ci-dessous :

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3,	0,	−1,	−2,
Rés. corresp.	−10,	−14,	−4,	+56.	−10,	−4,	+16.

Donc la racine positive est entre 2 et 3; et la racine négative, entre -1 et -2.

Exemple III. Soit l'équation.

$$x^4+x^2-65x+5=0.$$

Pour ne point pousser trop loin les substitutions, déterminons d'abord les limites supérieures des racines. En écrivant l'équation sous cette forme

$$x\,(x^3+x-65)+5=0$$

et en cherchant une valeur de x qui rende positif le trinôme x^3+x-65, on reconnaît que le nombre 4 est limite supérieure des racines positives. Si ensuite on change x en $-x$, tous les termes de l'équation proposée deviennent positifs, et l'on en conclut qu'elle n'a point de racine négative.

L'équation donnée n'ayant point de second terme, la somme de ses quatre racines doit être nulle, et que par conséquent ces racines ne peuvent pas être toutes positives. Donc, puisque l'équation n'a pas de racines négatives, elle doit en avoir d'imaginaires. Mais, d'un autre côté, on sait que les racines imaginaires sont en nombre pair (457); donc, si l'équation a véritablement des racines réelles, elles seront positives et au nombre de deux.

Maintenant il faut essayer les substitutions des nombres entiers positifs jusqu'à la limite 4.

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3,	4,
Rés. corresp.	+ 5,	—58,	—105,	—100,	+17.

Les signes montrent qu'il y a en effet deux racines positives; l'une entre 0 et 1, l'autre entre 3 et 4.

Exemple IV. Soit encore l'équation

$$x^3-7x+7=0.$$

Puisqu'elle est de degré impair, elle a au moins une racine réelle de signe contraire au dernier terme, c'est-à-dire, négative. On peut s'assurer qu'elle n'en a qu'une : car en changeant x en $-x$, elle devient

$$x^3-7x-7=0;$$

et celle-ci n'a qu'une seule racine positive (458). La substitution des nombres entiers suffira pour déterminer la partie entière de cette racine positive.

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3,	4;
Rés. corresp.	—7,	—13,	—13,	—1,	+29.

Donc la racine positive de la transformée en $-x$ est entre 3 et 4; et par conséquent la racine négative de la proposée est entre —3 et —4.

Si les deux autres racines sont réelles, elles doivent être positives; mais jusqu'ici leur existence reste incertaine. Pour lever le doute, essayons la substitution des nombres entiers.

Nomb. subst.	0,	1,	2,	3;
Rés. corresp.	7,	1,	1,	13.

On ne prolonge point les substitutions davantage, parce que le nombre $x=3$ donnant $x^3>7x$, il est évident que tous les nombres plus grands donneront des résultats positifs. Les résultats ci-dessus étant tous de même signe, on n'aperçoit pas encore qu'il y ait deux racines positives; et, si elles existent, on ne pourra les reconnaître qu'en substituant des nombres plus rapprochés.

Toutefois il faut observer que dans le cas où les deux racines seraient égales, on ne pourrait jamais obtenir des résultats de signes contraires. Il est donc nécessaire d'appliquer à l'équation donnée les procédés connus pour juger si elle a des racines égales. Par ces procédés, on apprend que les racines sont inégales.

Cela posé, pour arriver sûrement à la séparation des deux racines douteuses, on aura recours à l'équation aux carrés des différences. Dans l'exemple dont nous nous occupons, en ce moment, on a trouvé (429) que cette équation est

$$z^3-42z^2+441z-49=0 \text{ (*)}.$$

Soit fait $z=\frac{1}{u}$, il viendra

$$u^3-9u^2+\frac{42}{49}u-\frac{1}{49}=0.$$

On peut écrire cette équation ainsi

$$u^2(u-9)+\frac{42}{49}\left(u-\frac{1}{42}\right)=0,$$

et alors on aperçoit clairement que 9 est une limite supérieure des valeurs positives de u. Donc $\lambda=\frac{1}{9}$ sera une limite inférieure des valeurs positives de z; donc enfin on aura une quantité moindre que la plus petite différence des racines de la proposée, en prenant

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}.$$

(*) Comme cette équation n'a point de racines nulles, on apprendrait par là, si on ne le savait déjà, que la proposée n'a point de racines égales. D'un autre côté, comme les signes de l'équation en z sont alternatifs, on peut affirmer que la proposée a toutes ses racines réelles; mais cette conséquence est fondée sur une théorie qui sera exposée plus tard (479).

Tel serait l'intervalle à mettre entre les substitutions. Mais, afin d'éviter les fractions, on fera $x = \frac{x'}{3}$; et l'équation proposée se transformera en celle-ci,

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0,$$

où il n'y aura plus qu'à substituer des nombres entiers.

Afin de diminuer le nombre des substitutions, il sera bon de déterminer les limites supérieure et inférieure des valeurs positives de x'. Si on remonte à la proposée, on voit d'abord qu'on peut prendre $\sqrt{7}$ pour limite supérieure de x; puis, en y changeant x en $\frac{1}{x}$, elle devient $x^3 - x^2 + \frac{1}{7} = 0$, et comme dans celle-ci l'unité est limite supérieure, il s'ensuit que dans la proposée l'unité est limite inférieure. Ainsi, dans cette équation, les racines positives sont entre 1 et $\sqrt{7}$; et par suite les racines positives de l'équation en x' sont entre 3×1 et $3 \times \sqrt{7}$, ou entre 3 et $\sqrt{63}$, ou enfin entre 3 et 8. En conséquence on ne devra substituer dans l'équation en x' aucun nombre au-delà de 8.

Nomb. subst.	3,	4,	5,	6;
Rés. correresp.	+27,	+1,	−1,	+27.

Sans aller plus loin, les signes des résultats indiquent deux racines positives, l'une entre 4 et 5, l'autre entre 5 et 6. Par suite la proposée en aura aussi deux, l'une entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, l'autre entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$. On a déjà trouvé qu'une racine était comprise entre -3 et -4 : ainsi les trois racines de l'équation proposée sont réelles, et complètement séparées.

Méthodes d'approximation.

465. Méthode par rapprochement des limites. Après avoir montré comment on assigne pour chaque racine deux limites spéciales entre lesquelles elle est seule comprise, il reste encore à la déterminer avec telle approximation qu'on voudra.

Le premier moyen qui se présente à la pensée c'est de substituer, dans l'équation proposée, des nombres intermédiaires entre ces limites, jusqu'à ce qu'on trouve deux nombres qui, donnant des

résultats de signes contraires, aient entre eux une différence moindre que la fraction qui exprime le degré de l'approximation. Alors chacun de ces nombres pourra être pris pour la valeur de la racine.

Pour mieux m'expliquer, je suppose que A et B soient deux limites qui ne comprennent que la seule racine a, et qu'on ait $B-A=D$, A étant $<B$. En substituant $A+\frac{1}{2}D$ au lieu de x, le signe du résultat fera connaître si a est entre A et $A+\frac{1}{2}D$, ou entre $A+\frac{1}{2}D$ et B; par conséquent cette racine se trouvera resserrée entre deux limites qui ne différeront plus entre elles que de $\frac{1}{2}$ D. En répétant une opération toute semblable, on la resserrera entre deux limites qui ne différeront plus que de $\frac{1}{4}D$; et il est évident qu'en continuant ainsi on arrivera à deux limites dont la différence sera moindre qu'une quantité donnée δ. Alors chacune de ces limites sera la valeur approchée de la racine, à moins de la quantité δ.

Il n'est point nécessaire de prendre pour chaque nouvelle substitution un nombre qui soit exactement équidistant des deux dernières limites, et il sera souvent plus commode d'en employer un autre.

Par ce procédé on pourrait porter l'approximation à un très-haut degré; mais le calcul deviendrait extrêmement laborieux, à cause du grand nombre de substitutions qu'il faudrait effectuer. Aussi ne s'en sert-on que pour obtenir une première approximation, à $\frac{1}{10}$ près, par exemple; puis on achève le calcul par une méthode beaucoup plus rapide, qui a été indiquée par Newton, et que je développerai dans le n° suivant.

Quand la racine est <1, il convient de l'évaluer, non à moins d'une fraction de l'unité, mais à moins d'une fraction de cette racine elle-même. Supposons par exemple que la valeur approchée ne doive différer de la vraie valeur a que d'une quantité $<\frac{1}{10}a$; et soient A et B deux limites qui comprennent a, A étant $<B$. Il est clair que si on a $B-A<\frac{1}{10}A$, à plus forte raison aura-t-on $B-A<\frac{1}{10}a$. Ainsi, il suffira de prolonger les substitutions successives jusqu'à ce qu'on ait deux limites dont la différence soit moindre que le dixième de la plus petite de ces limites. Au reste, on pourra toujours ramener la racine à être plus grande que 1,

soit en changeant l'inconnue x en $\frac{1}{x}$, soit en multipliant toutes les racines par un nombre convenable.

466. Méthode de Newton. Cette méthode exige, comme on vient de le dire, que la racine cherchée a soit déjà connue avec une certaine approximation. Pour la commodité du calcul, il faut qu'elle le soit au moins à $\frac{1}{10}$ près, et c'est aussi ce que je supposerai. Nommons α cette valeur approchée, et faisons

$$x=\alpha+y.$$

L'équation proposée $X=0$ se transformera en celle-ci

$$A+A'y+\tfrac{1}{2}A''y^2+\tfrac{1}{2.3}A'''y^3+\text{etc.}=0,$$

dans laquelle A, A′, A″, A‴,... sont les valeurs que prennent le polynôme X et ses dérivés successifs X′, X″, X‴,... par la substitution de α au lieu de x. De cette équation l'on tire

$$y=-\frac{A}{A'}-\frac{A''y^2}{2A'}-\frac{A'''y^3}{2.3A'}-\text{etc.}$$

La valeur de y que nous voulons trouver est plus petite que $\frac{1}{10}$, par conséquent y^2, y^3,... sont respectivement moindres que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... Admettons, pour un moment, que l'ensemble des termes qui renferment ces puissances soit $<\frac{1}{100}$: il est clair qu'en les négligeant, on aura pour y une valeur approchée à moins de $\frac{1}{100}$, savoir :

$$y=-\frac{A}{A'}.$$

En conséquence, je pousserai la division de $-A$ par A' jusqu'aux centièmes, j'ajouterai le quotient à la première valeur, α, et j'aurai ainsi, pour la racine a, une nouvelle valeur, β, que je regarderai comme approchée à moins de $\frac{1}{100}$.

On corrigera cette valeur β, comme on a corrigé α. A cet effet on posera

$$x=\beta+y,$$

et ici la valeur de y qu'il faudra chercher sera $<\frac{1}{100}$. En nommant B, B′, B″,... ce que deviennent les polynômes X, X′, X″,...

par la substitution de β à la place de x, la transformée sera

$$B+B'y+\frac{1}{2}B''y^2+\frac{1}{2.3}B'''y^3+\text{etc.}=0.$$

On en tire

$$y=-\frac{B}{B'}-\frac{B''y^2}{2B'}-\frac{B'''y^3}{2.3B'}-\text{etc.};$$

et, en négligeant les termes en y^2, y^3, etc., on a

$$y=-\frac{B}{B'}.$$

Puisqu'on a supposé $y<\frac{1}{100}$, les puissances supérieures de y sont $<(\frac{1}{100})^2$; et, en admettant qu'il en soit ainsi de toute la partie négligée, la valeur précédente de y serait approchée à moins de $(\frac{1}{100})^2$. C'est pourquoi l'on portera jusqu'à la 4e décimale l'évaluation du quotient de $-B$ par B', puis on ajoutera ce quotient avec β, et l'on aura pour la racine a une nouvelle valeur, γ, qu'on regardera comme approchée à moins d'une unité décimale du 4e ordre.

En continuant de cette manière, et en négligeant toujours les termes qui contiennent les puissances de la correction y, supérieures à la première, on admettra que la partie négligée à chaque transformation est moindre qu'une unité décimale de l'ordre double de celui de la dernière décimale à laquelle l'opération précédente avait porté l'approximation; et alors on obtiendra des valeurs approchées successives, dans lesquelles le nombre des décimales ira toujours en doublant. On voit aussi combien l'approximation sera rapide, puisqu'on aura déjà 8 décimales après la troisième correction, 16 après la quatrième, et ainsi de suite.

On doit encore remarquer combien est simple et régulier le calcul de ces corrections; car il est évident qu'elles se déduisent toutes de la même formule

$$[1] \qquad y=-\frac{X}{X'},$$

en y remplaçant d'abord x par α, puis par β, et ainsi de suite : de telle sorte qu'après avoir fourni la première correction, elle fournit encore la seconde, puis la troisième, etc.

Malheureusement, les approximations qu'on obtient ainsi sont loin d'être certaines; car elles reposent sur des suppositions qui ne sont point toujours vraies. Par exemple, il se pourrait que dans la première correction l'ensemble des termes en $y^2, y^3, \ldots$ fût $> \frac{1}{100}$; ou que dans la seconde il fût $> (\frac{1}{100})^2$; etc. L'habitude du calcul suggèrera, dans les cas particuliers, les précautions qu'il convient de prendre pour employer cette méthode avec sûreté; et même je vais montrer qu'il sera toujours facile de vérifier, après chaque correction, si l'on a réellement atteint l'approximation présumée.

Remontons à la valeur β, qu'on suppose approchée à $\frac{1}{100}$ près. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la vraie valeur de la racine soit entre $\beta - \frac{1}{100}$ et β, ou entre β et $\beta + \frac{1}{100}$. En conséquence, on substituera dans X les trois nombres $\beta - \frac{1}{100}$, β, $\beta + \frac{1}{100}$; et si le résultat de la substitution de $\beta - \frac{1}{100}$, ou de $\beta + \frac{1}{100}$, est de signe contraire à celui que donne la substitution de β, on sera certain que la valeur β est véritablement approchée à $\frac{1}{100}$ près. Mais, si les résultats sont de même signe, on sera certain que cette approximation est exagérée; et, dans ce cas, il faudra prendre pour point de départ une valeur plus approchée que α. Par exemple, au lieu d'une approximation à un dixième près, on en cherchera une à un demi-dixième; puis on examinera, comme on vient de l'expliquer, si la correction fournie par la formule [1] est exacte jusqu'aux centièmes. Si elle ne l'est pas, on recommencera le calcul, en se servant d'une première valeur encore plus approchée, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait la racine avec deux décimales exactes.

On examinera semblablement la valeur approchée qui résultera de la correction suivante; et si la 4ᵉ décimale est fautive, on la supprimera. Si les trois premières sont exactes, on procédera à une nouvelle correction, qui donnera une valeur dont l'approximation sera présumée s'étendre jusqu'à la 6ᵉ décimale, et qu'il faudra vérifier par le même procédé. La marche à suivre n'a pas besoin de plus amples explications.

Fourier, dans un ouvrage intitulé : *Analyse des Equations*, indique certaines précautions à prendre, à l'aide desquelles l'approximation devient assurée; et même il donne une règle pour

juger du nombre des décimales exactes que chaque opération ajoute à celles qui sont déjà connues. Mais, pour exposer ces rectifications, qui d'ailleurs font perdre à la méthode une grande partie de sa simplicité, il faudrait faire descendre dans les élémens plusieurs propositions qui jusqu'à ce jour ont appartenu à la haute analyse ; et pour cette raison je renverrai à l'ouvrage même de FOURIER, ou aux *Elémens d'Algèbre* récemment publiés par MM. MAYER et CHOQUET.

467. MÉTHODE DE LAGRANGE. Elle consiste à exprimer chaque racine réelle en fraction continue. Si elle exige des calculs plus laborieux que celle de NEWTON, au moins a-t-elle l'avantage de conduire à une approximation certaine.

D'après ce qui a été dit en parlant de la séparation des racines, à la fin du n° 461, il est permis de supposer que les racines de l'équation à résoudre diffèrent entre elles de plus d'une unité, et que la partie entière de chaque racine réelle est déjà connue. Soit

$$X=0$$

l'équation dont il s'agit, et soit α la partie entière d'une racine réelle et positive. Si on fait

$$x=\alpha+\frac{1}{y},$$

on aura une transformée en y, que je représenterai par $Y=0$, et qui sera du même degré que $X=0$. La valeur de y qu'il faut connaître, pour avoir la racine cherchée, doit être positive et plus grande que 1; et de plus il est évident que y ne peut avoir qu'une seule valeur de cette espèce, autrement il y aurait deux valeurs de x entre α et $\alpha+1$. Donc, si on substitue dans $Y=0$ la suite des nombres 1, 2, 3, etc., on est sûr de parvenir à deux résultats de signes contraires; et les deux nombres substitués comprendront entre eux la valeur cherchée de y, de sorte que le plus petit de ces deux nombres sera la partie entière de cette valeur.

Nommons β cette partie entière, et faisons

$$y=\beta+\frac{1}{z}.$$

On aura une transformée $Z=0$, qui aura une racine unique plus

grande que 1 : de sorte que la substitution des nombres 1, 2, 3, etc. fera encore connaître la partie entière de cette racine.

Soit γ cette partie entière, on fera

$$z=\gamma+\frac{1}{u};$$

et il viendra une nouvelle transformée, $U=0$, dans laquelle il y aura une racine unique plus grande que 1, dont on déterminera encore la partie entière par la substitution des nombres 1, 2, 3, etc.

On continuera ainsi la suite des transformées aussi loin qu'il sera nécessaire.

Maintenant, si on observe qu'on a posé successivement

$$x=\alpha+\frac{1}{y},\quad y=\beta+\frac{1}{z},\quad z=\gamma+\frac{1}{u},\ \text{etc.},$$

on en conclut que la racine cherchée peut s'exprimer par la fraction continue

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\text{etc.}}}$$

On sait qu'en calculant les réduites successives on peut toujours atteindre telle approximation qu'on voudra (310). Mais, pour ne point faire de calculs inutiles, il sera bon, à mesure qu'on trouve les nombres α, β, γ, etc., de former les réduites correspondantes (308); et, dès qu'on parviendra à deux réduites consécutives telles qu'en divisant l'unité par le produit de leurs dénominateurs on ait une fraction moindre que l'erreur permise, on sera sûr que la première de ces deux réduites aura l'approximation requise (311).

Le calcul des équations transformées en y, z, etc. est assez long ; et, afin de faciliter, il convient de remarquer la loi suivant laquelle les coefficiens de chaque équation se déduisent de l'équation précédente. Or, quand on fait $x=\alpha+\frac{1}{y}$ dans $X=0$, si on nomme A, A′, A″,... les résultats qu'on obtient en mettant α à la place de x dans le polynôme X et dans ses dérivés X′, X″,..., la transformée peut d'abord s'écrire ainsi :

$$A+A'\frac{1}{y}+\frac{A''}{2}\frac{1}{y^2}+\frac{A'''}{1.2}\frac{1}{y^3}+\text{etc.}=0.$$

Par conséquent, en multipliant par y^m, m étant le degré de l'équation, la transformée $Y=o$ sera

$$Ay^m + A'y^{m-1} + \frac{1}{2}A''y^{m-2} + \frac{1}{2.3}A'''y^{m-3} + \text{etc.} = o,$$

et l'on saura comment ses coefficiens se tirent de l'équation $X=o$.

L'équation $Z=o$ se calculera semblablement : c'est-à-dire qu'elle sera de la forme

$$Bz^m + B'z^{m-1} + \frac{1}{2}B''z^{m-2} + \frac{1}{2.3}B'''z^{m-3} + \text{etc.} = o,$$

et que les coefficiens B, B', B'', etc. s'obtiendront en substituant β à la place de y dans le polynôme Y et dans ses dérivés.

Ainsi de suite pour toutes les autres transformées.

468. *Remarques*. Tout ce qui a été dit jusqu'ici sur la détermination approchée des racines réelles pourrait évidemment s'appliquer aux racines commensurables, si on avait négligé d'en débarrasser l'équation. En prenant toutes les précautions nécessaires pour ne conserver que des décimales exactes, la méthode de Newton finirait par donner une quantité décimale terminée ou périodique; et celle de Lagrange conduirait à une transformée qui aurait une racine entière. Toutefois, sans parler de la longueur des calculs, on comprend que ces méthodes seraient insuffisantes pour découvrir cette sorte de racines : car, lorsqu'une racine serait incommensurable, elles n'apprendraient pas si les opérations doivent s'arrêter ou se prolonger indéfiniment.

Lorsque la seconde méthode fera trouver une fraction continue dans laquelle certains dénominateurs se répéteront dans le même ordre, on pourra soupçonner que la fraction continue est périodique; et alors, d'après ce qui a été démontré (315), elle représenterait une quantité irrationnelle de la forme $a+\sqrt{b}$. Pour décider si la fraction continue est véritablement périodique, on s'y prendra comme il suit. Supposons que $V=o$ et $V_1=o$ soient des équations qui donnent le même dénominateur dans les deux premières périodes : il est clair que ces équations doivent avoir une racine commune, et par conséquent on pourra la reconnaître en mettant dans chacune la même lettre pour représenter l'inconnue, et en cherchant ensuite leur plus grand commun diviseur. Cette racine étant trouvée, on remonte facilement à celle de la proposée $X=o$.

J'ajouterai encore que si l'équation $X=0$ ne renferme que des coefficiens rationnels, elle ne peut pas avoir la racine irrationnelle $a+\sqrt{b}$ sans avoir aussi la racine $a-\sqrt{b}$. Cette proposition est trop facile à démontrer pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter.

Application des méthodes d'approximation à un exemple.

469. Soit l'équation

$$x^3-7x+7=0.$$

On a trouvé n° 464, Ex. IV, qu'elle a une racine positive entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, une autre racine positive entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$, et une racine négative entre -3 et -4. Proposons-nous de calculer, par la méthode de Newton, la valeur approchée de la première racine.

Il faut d'abord en approcher à $\frac{1}{10}$ près, en resserrant les limites $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$. Ces limites, en décimales, sont 1,33 et 1,67; et les signes des résultats provenant de la substitution de ces nombres dans l'équation sont $+$ et $-$. Si on substitue le nombre moyen 1,5, le résultat est $-0,125$; donc la racine est entre les limites 1,33 et 1,5. Or, le nombre intermédiaire 1,4 ne diffère de la seconde que de 0,1, et de la première que de 0,07; par conséquent on est sûr que la valeur $x=1,4$ approche de la racine à $\frac{1}{10}$ près.

Maintenant pour obtenir une plus grande approximation, il faut recourir à la formule [1] du n° 466,

$$[1] \qquad y=-\frac{X}{X'}.$$

Dans notre exemple on a $X=x^3-7x+7$, $X'=3x^2-7$; et par suite la formule des corrections sera

$$[2] \qquad y=-\frac{x^3-7x+7}{3x^2-7}.$$

Si on y substitue la valeur approchée $x=1,4$, il vient

$$y=-\frac{0,056}{1,12}=-0,05;$$

et de là on conclut que la valeur de x, approchée, à $\frac{1}{100}$ près est $x=1,4-0,05=1,35$.

Mais cette approximation n'est encore que présumée. Pour la vérifier, je substitue dans l'équation la valeur 1,35 elle-même, puis cette valeur augmentée de 0,01.

1,35 donne $+$ 0,010375,
1,36......... $-$ 0,004544;

et comme ces résultats sont de signes contraires, on est assuré que les centièmes sont exacts dans la valeur

$$x = 1,35.$$

Pour avoir une plus grande approximation, on substituera cette valeur dans la formule [2]. Il vient

$$y = \frac{0,010375}{1,5325} = +0,0068,$$

et la nouvelle valeur approchée sera $x = 1,35 + 0,0068 = 1,3568$.

Pour la vérifier il suffira de substituer dans l'équation les deux nombres 1,3568 et 1,3569.

1,3568 donne $+$ 0, 000 141 586 432,
1,3569......... $-$ 0, 000 006 100 991;

et le changement de signe prouve qu'en effet la racine cherchée sera connue avec quatre décimales exactes en prenant

$$x = 1,3568.$$

En continuant de la même manière on pourra porter l'approximation aussi loin qu'on voudra.

Par des calculs semblables on trouvera la seconde racine positive de l'équation. Pour avoir la racine négative, qui est entre -3 et -4, ce qu'il y a de plus commode est de changer x en $-x$. La transformée aura une racine positive entre 3 et 4, dont on cherchera la valeur approchée; puis on prendra cette valeur avec le signe $-$.

470. Appliquons maintenant la méthode de LAGRANGE au calcul de la même racine. Dans le n° 464, Ex. IV, pour changer l'équation donnée

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

en une autre dont les racines différassent entre elles de plus d' unité, on a fait $x = \frac{1}{3}x'$, et on a trouvé

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0.$$

Il faut donc chercher, par le moyen des fractions continues valeur de x' comprise entre 4 et 5; puis en la divisant par on aura la valeur de x comprise entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

Les opérations qu'on doit effectuer successivement pour obt x', sont renfermées dans le tableau suivant :

Equat. en x'. $\quad x'^3 - 63x' + 189 = 0$

$$x' = 4 + \frac{1}{y}.$$

1re Transf. $\quad Ay^3 + A'y^2 + \frac{1}{2}A''y + \frac{1}{2.3}A''' = 0,$

$$A = 4^3 - 63.4 + 189 = +1;$$
$$A' = 3.4^2 - 63 = -15,$$
$$\frac{1}{2}A'' = 3.4 = +12,$$
$$\frac{1}{2.3}A''' = +1;$$

$$y^3 - 15y^2 + 12y + 1 = 0.$$

$y = 14$ donne -27,

$y = 15$ ..... $+181$,

$$y = 14 + \frac{1}{z}.$$

2e Transf. $\quad Bz^3 + B'z^2 + \frac{1}{2}B''z + \frac{1}{2.3}B''' = 0,$

$$B = 14^3 - 15.14^2 + 12.14 + 1 = -27,$$
$$B' = 3.14^2 - 30.14 + 12 = +180,$$
$$\frac{1}{2}B'' = 3.14 - 15 = +27,$$
$$\frac{1}{2.3}B''' = +1;$$

$$27z^3 - 180z^2 - 27z - 1 = 0.$$

$z = 6$ donne -811,

$z = 7$ ..... $+251$,

$$z = 6 + \frac{1}{u}.$$

3^e Transf. $Cu^3+C'u^2+\frac{1}{2}C''u+\frac{1}{1.2.3}C'''=0.$

$$C=27.6^3-180.6^2-27.6-1=-811,$$
$$C'=81.6^2-360.6-27=+729,$$
$$\tfrac{1}{2}C''=81.6-180=+306,$$
$$\tfrac{1}{1.2.3}C'''=+27;$$

$$811\,u^3-729\,u^2-306\,u-27=0.$$
$u=1$ donne -251,
$u=2$ ..... $+2933$,
$$u=1+\frac{1}{v}.$$

On peut continuer le stransformées. En les arrêtant ici, on aura

$$x=4+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}};$$

et les réduites, calculées suivant les règles connues (308), seront

$$\frac{4}{1},\quad \frac{57}{14},\quad \frac{346}{85},\quad \frac{403}{99},\quad \text{etc.}$$

Dans la 1re, $\frac{4}{1}$, l'erreur est en moins et $<\frac{1}{1.14}$ ou $\frac{1}{14}$;
Dans la 2e, $\frac{57}{14}$, l'erreur est en plus et $<\frac{1}{14.85}$ ou $\frac{1}{1190}$;
Dans la 3e, $\frac{346}{85}$, l'erreur est en moins et $<\frac{1}{85.99}$ ou $\frac{1}{8415}$;
Dans la 4e, $\frac{99}{403}$, l'erreur est en plus et $<\frac{1}{99.184}$ ou $\frac{1}{18216}$.

Pour apprécier l'approximation de la 4e, sans connaître le dénominateur de la 5e, on remarquera que ce dénominateur est au moins égal à $99+85$ ou 184.

Enfin, on divise ces réduites par 3, et on a ces valeurs,

$$x=\frac{4}{3},\quad \frac{19}{14},\quad \frac{346}{255},\quad \frac{403}{297},$$

lesquelles sont approchées, alternativement en défaut ou en excès, à moins des fractions $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{3570}$, $\frac{1}{25245}$, $\frac{1}{54648}$.

On trouvera de la même manière les valeurs approchées de la seconde racine positive; et quant à la racine négative, comme elle est seule comprise entre -3 et -4, on la cherchera en opérant immédiatement sur l'équation proposée sans passer par l'équation en x'.

471. *Remarque.* La valeur d'une racine incommensurable n'étant obtenue qu'avec approximation, on ne peut point ôter cette racine de l'équation au moyen de la division, comme dans le cas où elle serait exactement connue. Si on négligeait le reste de la division et qu'on égalât encore le quotient à zéro, pour en déduire les autres racines, il est bien vrai que les erreurs seraient en général renfermées entre des limites assez étroites : cependant, il pourrait arriver que ces racines subissent des altérations considérables, et même qu'elles cessassent d'être réelles pour devenir imaginaires ou *vice versâ*. Aussi cette simplification ne doit-elle être employée qu'avec une extrême circonspection.

Recherche des racines imaginaires.

472. On a vu (461) que, par des substitutions convenablement réglées, on peut toujours savoir combien une équation a de racines réelles. Si ce nombre n'est pas égal au degré de l'équation, on est sûr qu'elle doit avoir des racines imaginaires; et, pour compléter la résolution de l'équation, il reste encore a déterminer cette sorte de racines.

On sait (386) qu'elles sont toujours en nombre pair, et par couples de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles. En conséquence, dans l'équation proposée on fera

$$x = y + z\sqrt{-1};$$

et comme l'équation proposée est supposée n'avoir que des coefficiens réels, elle se changera en une autre,

$$Y + Z\sqrt{-1} = 0,$$

dans laquelle Y et Z seront des polynômes, en y et z, qui ne renfermeront aucun coefficient imaginaire. Or, les valeurs qu'il faut déterminer pour y et z doivent être réelles; et, pour vérifier avec de telles valeurs l'équation ci-dessus, il faut qu'on ait à la fois

$$Y = 0, \quad Z = 0:$$

la question est donc ainsi réduite à chercher les valeurs réelles de y et z qui conviennent à ces deux équations. A cet effet, on élimine

entre elles l'une des inconnues, y par exemple; puis on cherchera les racines réelles de l'équation finale en z; après quoi on cherchera les valeurs correspondantes de y, en ayant soin de rejeter les solutions dans lesquelles cette inconnue serait imaginaire. Il est inutile de dire que toutes les précautions nécessaires doivent être prises pour n'omettre aucune solution et pour n'en point admettre de fausses.

CHAPITRE XIX.

Théorèmes remarquables sur les équations. Usage qu'on en fait.

Théorème de DESCARTES. *Conséquences. Conditions de la réalité des racines.*

473. THÉORÈME DE DESCARTES. Lorsqu'on passe d'un terme au suivant, on dit qu'il y a *variation* ou *permanence*, selon que le signe change ou qu'il reste le même. Par exemple, l'équation $x^7 - 2x^5 - 5x^2 + 8x - 10 = 0$ aurait trois variations et une permanence. Cela posé, pour présenter le théorème dont il s'agit de la manière la plus simple et à la fois la plus exacte, on l'énoncera en ces termes :

Une équation quelconque, complète ou incomplète, ne peut pas avoir plus de racines positives que de variations.

Parmi les démonstrations qu'on en a données, la plus facile est celle de SÉGNER. Elle consiste à examiner le changement produit dans les signes d'une équation, quand on y introduit une nouvelle racine positive; et elle a été présentée par GAUSS à peu près sous la forme suivante.

Considérons une équation quelconque, complète ou incom-

tant qu'on n'assiguera point de valeurs particulières aux coefficiens de l'équation [1].

Or, quels que soient ces signes, il est évident qu'il y a dans le produit total au moins une variation de x^{m+1} à $-P^m$, tandis que le multiplicande n'en contient qu'une seule de x^m à $-P$; de même, il y en a au moins une de $-P^m$ à $+Q^m$, et une seule de $-P$ à $+Q$; et en continuant ainsi, on reconnaît qu'à la fin le produit a au moins une variation de $\pm T^m$ à $\mp Ua$, tandis que le multiplicande n'en a aucune après le terme $\pm T$; donc le produit a au moins une variation de plus que le multiplicande. De là on conclut que chaque racine positive, introduite dans une équation, doit y apporter au moins une variation; donc *une équation*, etc.

Par exemple, l'équation $x^3-2x+5=0$ ne saurait avoir plus de deux racines positives.

474. Si dans une équation on remplace x par $-x$, toutes les racines changeront de signe; par conséquent le nombre des variations de la transformée indiquera combien, au plus, la proposée a de racines négatives. S'il s'agit de l'équation $x^3-2x+5=0$, la transformée en $-x$, après y avoir changé tous les signes, sera $x^3-2x-5=0$; et comme elle n'a qu'une variation, la proposée ne saurait avoir plus d'une racine négative.

475. Quand l'équation est complète et qu'on y remplace x par $-x$, il est évident que, sur deux termes consécutifs, l'un conserve son signe tandis que l'autre prend un signe contraire à celui qu'il avait; donc les permanences deviennent des variations et *vice versâ*. Donc une équation complète ne peut pas avoir plus de racines négatives que de permanences.

Cette conclusion peut également s'appliquer aux équations incomplètes; mais alors il faut avoir soin de rétablir les termes manquans, lesquels doivent être regardés comme ayant le coefficient ± 0. Par exemple, soit encore l'équation

$$x^3-2x+5=0.$$

Sous cette forme elle n'a pas de permanence; et cependant elle a une racine négative, car elle est de degré impair et son dernier terme est positif (456). Mais si on restitue le second terme $\pm 0x^2$,

elle devient

$$x^3 \pm 0x^2 - 2x + 5 = 0\,;$$

et alors, soit qu'on prenne $+0x^2$ ou $-0x^2$, elle a toujours une permanence (*).

476. Dans une équation complète, le nombre des variations ajouté à celui des permanences donne une somme égale au nombre des termes de l'équation moins un, ou, ce qui est la même chose, au degré de l'équation, ou, enfin, ce qui est encore la même chose, au nombre des racines. Or, il ne peut y avoir ni plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences; donc, si toutes les racines sont réelles, il doit y avoir précisément autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives que de permanences.

Lorsqu'on ignore si toutes les racines sont réelles, cette conclusion ne doit plus s'appliquer, attendu que les racines imaginaires peuvent subsister également avec des permanences et avec des variations. Par exemple, si les racines de l'équation $x^2+px+q=0$ sont imaginaires, il est clair qu'elles le seront encore en changeant p en $-p$.

477. Lorsqu'une équation est incomplète, il est souvent facile, par ce qui précède, de reconnaître qu'elle a des racines imaginaires; et pour cela deux moyens doivent être essayés. Le premier sera de compter les variations de la proposée ainsi que celles de la transformée en $-x$; et, d'après les nos 473 et 474, il ne peut pas y avoir plus de racines réelles que ne l'indique le nombre de toutes ces variations; donc, si ce nombre est surpassé par le degré de l'équation, on sera certain qu'il y a au moins autant de racines imaginaires que d'unités dans le nombre excédant.

Par exemple, si l'équation est $x^m-1=0$ et que m soit pair, on apprendra sur-le-champ qu'elle a, au plus, deux racines réelles; et,

* Assez ordinairement, voici comment on énonce le théorème de DESCARTES: *Une équation ne saurait avoir plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences.* Mais la seconde partie de cet énoncé est inexacte, ainsi que l'observent très-judicieusement MM. MAYER et CHOQUET dans leurs élémens d'Algèbre, à moins qu'on n'ajoute que l'équation est complète, tandis que cette restriction est inutile pour la première partie. L'équation $x^3-2x+5=0$ suffit pour montrer la justesse de cette remarque.

comme il est évident qu'elle en a deux, $+1$ et -1, on peut affirmer qu'elle a $m-2$ racines imaginaires.

478. Le second moyen sera de rétablir les termes manquans en leur donnant zéro pour coefficiens. Mais alors on pourra les regarder aussi bien comme positifs que comme négatifs; et, quelque signes qu'on adopte, si toutes les racines de l'équation sont réelles, on devra toujours trouver le même nombre de variations et le même nombre de permanences (476). Donc, quand il en sera autrement, l'équation aura des racines imaginaires.

Soient Qx^n+Rx^{n-2} deux termes d'une équation, entre lesquels il manque le terme en x^{n-1}. On le rétablira et on aura ces trois termes

$$Qx^n\pm ox^{n-1}+Rx^{n-2}.$$

Si Q et R sont de même signe, positifs, par exemple, il est clair que ces trois termes donneront deux permanences ou deux variations, selon qu'on prendra $+o$ ou $-o$; donc lorsqu'il manque un terme entre deux termes de même signe, l'équation a des racines imaginaires. Tel est le cas de l'équation $x^3+2x+5=o$.

Si Q et R sont de signes contraires, on ne peut plus rien conclure : car, soit qu'on prenne $+o$ ou $-o$, l'ensemble des trois termes donnera toujours une variation et une permanence. Ce cas est celui de l'équation $x^3-2x+5=o$.

Soient maintenant Qx^n+Rx^{n-k} deux termes entre lesquels il en manque plusieurs. En les rétablissant on aura

$$Qx^n\pm ox^{n-1}\pm ox^{n-2}\ldots+Rx^{n-k}.$$

Or, on peut donner au troisième ox^{n-2} le même signe qu'à Qx^n, et alors, d'après ce qui vient d'être dit, on sera sûr que l'équation a des racines imaginaires. Ainsi, lorsque plusieurs termes consécutifs manquent, l'équation a toujours des racines imaginaires. C'est ce qui arrive à l'équation binôme $x^m\pm 1=o$.

479. Ce qui vient d'être dit, dans le n° précédent, conduit naturellement à rechercher les conditions auxquelles on reconnaît que toutes les racines d'une équation sont réelles. Cette question est une des plus importantes de l'algèbre, et on en aura une solution en appliquant le théorème de DESCARTES à l'équation aux carrés des différences.

Représentons par $X=0$ une équation donnée, et par $D=0$ l'équation aux carrés des différences. S'il n'y a dans $X=0$ que des racines réelles, les carrés de leurs différences seront des quantités réelles et positives; donc l'équation $D=0$ ne devra avoir que des variations de signes. Mais supposons qu'il y ait des racines imaginaires dans $X=0$, et admettons, ainsi qu'on l'a démontré nº 386, qu'elles doivent s'y trouver par couples de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles. En considérant les deux racines conjuguées d'un pareil couple, on voit que le carré de leur différence est $(2b\sqrt{-1})^2$ ou $-4b^2$, quantité essentiellement négative. L'équation $D=0$ aurait donc des racines négatives, et par conséquent des permanences de signes (475).

Donc, *pour qu'une équation n'ait que des racines réelles, il faut et il suffit que l'équation aux carrés des différences n'ait que des variations.*

Pour l'équation du 3ᵉ degré

$$x^3+Qx+R=0,$$

on a trouvé (429) que l'équation aux carrés des différences est

$$z^3+6Qz^2+9Q^2z+4Q^3+27R^2=0.$$

Si l'on veut que cette dernière ne présente que des variations, il faut qu'on ait $Q<0$ et $4Q^3+27R^2<0$. Or, la seconde condition ne peut pas être remplie sans la première; donc, pour la réalité des racines de l'équation du 3ᵉ degré, une seule condition est nécessaire, savoir :

$$4Q^3+27R^2<0.$$

Méthode de M. BUDAN, *fondée sur le théorème de* DESCARTES, *pour résoudre une équation dont toutes les racines sont réelles.*

480. Cette ingénieuse méthode a été exposée dans un Mémoire lu à l'Institut, en 1803; et l'auteur, en 1807, l'a aussi fait connaître au public dans un ouvrage, dont une seconde édition a paru en 1822, sous le titre de *Nouvelle méthode pour la résolution des équations.*

Cette méthode exige l'emploi de transformées successives qu'on pourrait obtenir en faisant $x=x'+1$, $x'=x''+1$, $x''=x'''+1$, etc. Pour calculer les coefficiens de ces équations, M. Budan donne une règle fort simple, qui ne demande que l'emploi de l'addition et de la soustraction. Cette règle, qu'il désigne sous le nom d'*algorithme*, ne constitue pas une partie essentielle de la méthode ; mais, comme elle facilite considérablement le calcul, je commencerai par l'exposer.

Soit un polynôme quelconque, par exemple,

$$[1] \qquad Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

Si on y fait $x=x'+1$, il se change en

$$[2] \qquad A(x'+1)^3+B(x'+1)^2+C(x'+1)+D.$$

Au lieu de développer les puissances, observons : 1° qu'en multipliant A par $x'+1$ et ajoutant B au produit, il vient $A(x'+1)+B$; 2° qu'en multipliant ce résultat par $x'+1$ et ajoutant C, il vient $A(x'+1)^2+B(x'+1)+C$; 3° qu'en multipliant de nouveau par $x'+1$ et ajoutant D, on retrouve l'expression [2] qu'il s'agit de développer.

Il faut donc examiner comment on passe d'un polynôme en x' au produit de ce même polynôme par $x'+1$; et pour cela il suffit de faire attention à la multiplication ci-dessous :

$$(px'^3+qx'^2+rx'+s)(x'+1)=px'^4\begin{array}{l}+q\\+p\end{array}\Bigg|\,x'^3\begin{array}{l}+r\\+q\end{array}\Bigg|\,x'^2\begin{array}{l}+s\\+r\end{array}\Bigg|\,x'+s.$$

Il est clair que, dans le produit, les deux coefficiens extrêmes restent les mêmes que dans le multiplicande, et que ceux des termes intermédiaires s'obtiennent en ajoutant successivement le 1er coefficient du multiplicande avec le 2e, le 2e avec le 3e, le 3e avec le 4e, et toujours de même, quel que soit le nombre des termes. On peut même comprendre les termes extrêmes dans cette loi, en considérant le premier terme du multiplicande comme précédé d'un terme dont le coefficient est zéro, et le dernier comme suivi d'un terme dont le coefficient est aussi zéro.

Maintenant, si on applique cette loi aux multiplications succes-

sives par $x'+1$ dont il a été parlé plus haut, on voit facilement que les coefficiens du développement de l'expression [2] peuvent s'obtenir par la règle suivante :

Ecrivez les coefficiens du polynôme donné sur une même ligne, de cette manière :

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \text{etc.}$$

Au-dessous du 1er coefficient A, *écrivez ce même coefficient, lequel restera placé seul sur sa ligne;*

Au-dessous, écrivez une autre ligne composée de deux termes, dont le 1er sera A, *et dont le 2e sera formé en ajoutant* A *avec le 2e coefficient*, B, *du polynôme en* x;

Au-dessous de cette ligne, formez-en une autre composée de trois termes, dont le 1er sera encore A, *dont le 2e sera formé en ajoutant le 1er terme de la ligne précédente avec le 2e terme de cette ligne, et dont le 3e sera formé en ajoutant le 2e terme de cette même ligne avec le 3e coefficient*, C, *du polynôme en* x;

Continuez de la même manière, c'est-à-dire, ayez soin de former toujours chaque ligne nouvelle en écrivant d'abord le 1er terme de la ligne précédente, en ajoutant chaque terme de cette ligne avec le terme suivant, et enfin en ajoutant le dernier avec un nouveau coefficient du polynôme en x.

Quand tous les coefficiens du polynôme en x *auront été employés, on aura une ligne qui contiendra autant de termes qu'il y en a dans ce polynôme; et ces termes seront les coefficiens du polynôme en* x' *ou* x—1.

Par exemple, soit l'équation

$$2x^4-6x^3-x^2+3=0.$$

Il ne faudra pas oublier de compter comme zéro les coefficiens des termes manquans; et alors les calculs se disposent ainsi qu'il suit :

Coeff. de l'éq. en x	2,	—6,	—1,	0,	+3.
	2;				
	2,	—4;			
	2,	—2,	—5;		
	2,	0,	—7,	—5;	
Coeff. de l'éq. en $x-1$	2,	2,	—7,	—12,	—2.

Donc l'équation en $x-1$ sera

$$2(x-1)^4+2(x-1)^3-7(x-1)^2-12(x-1)-2=0.$$

481. Par le même algorithme on passera de la transformée en $x-1$ à celle en $x-2$; de celle-ci à la transformée en $x-3$; et ainsi de suite. Aucun procédé ne saurait être plus simple et plus rapide pour obtenir ces transformées successives.

482. Il est bon de remarquer ici que, par la nature même de l'algorithme dont il s'agit, on est sûr d'arriver à une transformée dans laquelle tous les coefficiens seront de même signe. Il est clair en effet que le 2e coefficient finira par être de même signe que le 1er; puis le 3e, de même signe que le 2e; puis le 4e, de même signe que le 3e; etc. Et d'ailleurs, dès qu'on est parvenu à une transformée dont tous les coefficiens sont de même signe, il est évident qu'il en sera ainsi de toutes les suivantes.

Par exemple, soit l'équation

$$x^3-7x+7=0.$$

En effectuant les calculs d'après la règle, on aura les coefficiens ci-dessous :

Pour l'éq. en x .....1, +0, —7, +7;
en $x-1$...1, +3, —4, +1;
en $x-2$...1, +6, +5, +1.

Sans aller plus loin on voit que l'équation en $x-2$ n'a que des termes positifs; d'où il suit que $x-2$ n'a pas de valeur positive, ou, ce qui est la même chose, que l'équation donnée n'a pas de racine positive plus grande que 2.

483. Le même algorithme s'applique avec une facilité égale, lorsqu'on doit opérer sur l'inconnue x des diminutions successives de 10 en 10, ou de 100 en 100, ou de 1000 en 1000, etc. Par exemple, si elles doivent avoir lieu de 10 en 10, on commencera par faire $x=10x'$, puis on passera de l'équation en x' aux équations en $x'-1$, $x'-2$, etc.

En apportant un léger changement à cet algorithme, on peut aussi l'employer pour trouver des transformées en $x+1$, $x+2$, $x+3$, etc. Il est clair en effet que des raisonnemens ana-

logues à ceux du n° 480 conduiront, pour obtenir une transformée en $x+1$ à un algorithme semblable, avec cette seule différence que chaque quantité qui est désignée dans le premier, comme devant être *ajoutée* avec une autre, devra au contraire en être *retranchée*. Au reste, en changeant x en $-x$ dans l'équation donnée, puis diminuant x d'une unité, l'équation résultante sera la même que si l'on eût augmenté d'une unité l'inconnue primitive.

484. J'arrive présentement au procédé de M. Budan pour résoudre une équation dont toutes les racines sont réelles. En l'expliquant, je supposerai, ce qui est toujours permis, que l'équation n'ait plus de racines égales, et je me dispenserai aussi de parler des racines négatives, attendu que leur détermination se ramène à celle des racines positives.

D'après la règle de Descartes (476), l'équation proposée en x n'ayant que des racines réelles, doit avoir précisément autant de variations que de racines positives. Or, si on désigne par α un nombre réel quelconque, et si on fait $x-\alpha=x'$, toutes les racines de la transformée en x' ou $x-\alpha$ seront encore réelles; par conséquent le nombre des variations de cette transformée indiquera aussi combien elle a de racines positives.

D'un autre côté, il est évident que si α est un nombre positif, et que l'équation proposée en x n'ait pas de racine entre o et α, la transformée en $x-\alpha$ conservera autant de racines positives que la proposée; mais que si cette proposée a des racines entre o et α, la transformée aura de moins un pareil nombre de racines positives. Donc, en comptant le nombre des variations perdues dans le passage de l'équation en x à la transformée en $x-\alpha$, on saura combien la première a de racines positives entre o et α. Pareillement, α' étant $>\alpha$, si on passe de l'équation en $x-\alpha$ à une nouvelle transformée en $x-\alpha'$, le nombre des variations, qui se trouveront de moins dans la seconde que dans la précédente, fera connaître combien l'équation primitive, en x, a de racines positives entre α et α'. Cela posé, voici comment M. Budan détermine successivement tous les chiffres des racines, jusqu'à tel ordre décimal qu'on voudra.

De l'équation en x on déduira les transformées en $x-1$, $x-2$,... jusqu'à celle en $x-10$; et en comptant les variations perdues à

chaque transformation, on apprendra combien la proposée a de racines entre 0 et 1, combien entre 1 et 2,..., et enfin combien entre 9 et 10.

Les racines dont l'existence est ainsi reconnue sont toutes <10; mais quand on aura une méthode pour les déterminer en décimales, il sera facile d'obtenir aussi les racines comprises de 10 à 100, de 100 à 1000, etc. En effet, il suffira de faire $x=10x'$ dans l'équation en x, et de chercher les valeurs de x' qui sont <10; puis de faire $x'=10x''$ dans l'équation en x', et de chercher les valeurs de x'' qui sont <10; et de continuer de cette manière jusqu'à ce qu'on parvienne à une transformée dont tous les termes soient de même signe, ce qui finira toujours par arriver. Par ces raisons, je me bornerai à expliquer comment on trouve les chiffres décimaux des racines <10. La marche à suivre s'offre d'elle-même.

Supposons qu'on ait reconnu qu'une ou plusieurs racines soient comprises entre le chiffre α et $\alpha+1$. Pour trouver les dixièmes de chacune de ces racines, on fera $10(x-\alpha)=x'$ dans l'équation en $x-\alpha$, puis on cherchera la partie entière des valeurs de x', par le même moyen qui a déterminé α : c'est-à-dire qu'on calculera les transformées en $x'-1$, $x'-2$, etc. en ayant soin de ne pas aller au-delà de $x'-10$, et qu'ensuite on comptera les variations perdues à chaque transformation, ce qui fera connaître s'il y a des valeurs de x' entre 0 et 1, entre 1 et 2, etc., et par conséquent le chiffre des dixièmes de chacune des racines cherchées. Nommons α' celui qui appartient à l'une d'elles, on fera $10(x'-\alpha')=x''$; on répètera sur l'équation en x'' les opérations qui ont été faites sur l'équation en x', et on connaîtra le chiffre α'' des centièmes. En continuant ainsi, on pourra trouver autant de décimales qu'on voudra.

Il peut se faire qu'on rencontre plusieurs racines qui aient les premières décimales communes. Mais comme l'équation en x n'a pas de racines égales, on est sûr que les racines comprises entre α et $\alpha+1$ finiront toujours par se séparer. On reconnaîtra que la séparation d'une racine est complète, quand la dernière transformée n'aura qu'une seule racine positive de moins que la transformée précédente, ou, ce qui est la même chose, quand elle n'aura qu'une seule variation de moins.

485. Je n'entrerai pas dans de plus longs détails sur la méthode

de M. BUDAN; mais je ferai remarquer qu'elle peut être suivie pour trouver les racines comprises entre deux limites quelconques A et B, toutes les fois qu'on connaît le nombre de ces racines, quand même l'équation aurait des racines imaginaires. Il est clair, en effet, qu'elles doivent finir par se séparer; mais il faut de plus qu'on en soit averti. Or, c'est ce qui aura lieu, si on fait attention que le dernier terme d'une transformée en $x-p$ est égal au résultat de la substitution de p dans l'équation de x; de sorte que la suite des opérations devra amener dans les derniers termes des transformées autant de changemens de signes qu'il y a de racines entre A et B.

M. BUDAN a aussi essayé d'étendre sa méthode à toutes les équations, lors même qu'on ignore la nature des racines; et il croit, au moyen de la seule règle de DESCARTES, pouvoir s'affranchir du long et pénible calcul de l'équation aux carrés des différences. Mais les géomètres en ont jugé autrement, et notamment LAGRANGE dont l'autorité est si considérable en cette matière. Voyez l'introduction de son *Traité sur la résolution des équations*, 2e édit. 1808 (*).

Théorème de ROLLE. *Autre manière de reconnaître la réalité des racines.*

486. THÉORÈME DE ROLLE. *Dans une équation quelconque, $F(x)=0$, de la forme*

[1] $$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0,$$

les racines réelles ont pour limites particulières les racines de l'équation dérivée $F'(x)=0$.

Pour plus de netteté, nous supposerons d'abord que $F(x)=0$ n'ait point de racines égales. Soient a, b, c, etc. les racines réelles de cette équation, et a', b', c', etc. les racines imaginaires : si on pose

* M. BUDAN montre bien que si on fait tous les calculs comme s'il existait des racines réelles entre p et $p+1$, et que cependant il n'y en ait point, l'erreur de l'hypothèse deviendra manifeste. Il prouve également que s'il existe, sans qu'on le sache, des racines réelles entre p et $p+1$, elles doivent infailliblement finir par se séparer. Mais il ne donne aucun moyen pour juger si cette séparation est complète : de sorte que par sa méthode on pourrait arriver à une équation qui n'aurait qu'une seule racine réelle entre deux nombres p' et $p'+1$; et faute d'un caractère pour le reconnaître, on serait exposé à continuer les calculs, sans avoir jamais de raison pour s'arrêter.

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=\varphi(x),$$
$$(x-a')(x-b')(x-c')\ldots=\psi(x),$$

on aura

$$F(x)=\varphi(x)\times\psi(x);$$

et, d'après ce qui a été dit (405) sur la composition du polynôme dérivé $F'(x)$,

$$F'(x)=\frac{\varphi(x)\times\psi(x)}{x-a}+\frac{\varphi(x)\times\psi(x)}{x-b}+\text{etc.}$$
$$+\frac{\varphi(x)\times\psi(x)}{x-a'}+\frac{\varphi(x)\times\psi(x)}{x-b'}+\text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F'(x)=\left(\frac{\varphi(x)}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{x-b}+\frac{\varphi(x)}{x-c}+\text{etc.}\right)\times\psi(x)$$
$$+\left(\frac{\psi(x)}{x-a'}+\frac{\psi(x)}{x-b'}+\frac{\psi(x)}{x-c'}+\text{etc.}\right)\times\varphi(x).$$

Supposons que $a, b, c, d, \ldots$ représentent les racines réelles rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus grande; puis faisons successivement $x=a,\ b,\ c, \ldots$, et examinons les signes des valeurs correspondantes de $F'(x)$.

D'abord, il est clair que chaque substitution fera évanouir $\varphi(x)$, mais que le polynôme $\psi(x)$, qui ne renferme aucun facteur réel, ne pourra devenir ni nul ni négatif (455). Ensuite, si on observe que

$$\frac{\varphi(x)}{x-a}=(x-b)(x-c)\ldots,\quad \frac{\varphi(x)}{x-b}=(x-a)(x-c)\ldots,$$
$$\frac{\varphi(x)}{x-c}=(x-a)(x-b)\ldots,\quad \text{etc.},$$

il sera facile de voir que les substitutions de $a, b, c, \ldots$ amènent les résultats ci-dessous :

$x=a$ donne $\frac{\varphi(x)}{x-a}>0$, donc $F'(a)>0$;

$x=b$ donne $\frac{\varphi(x)}{x-b}<0$, donc $F'(b)<0$;

$x=c$ donne $\frac{\varphi(x)}{x-c}>0$, donc $F'(c)>0$;

etc.

Ces résultats étant alternativement positifs et négatifs, il s'ensuit que l'équation $F'(x)=0$ a au moins une racine réelle entre a et b, au moins une entre b et c, au moins une entre c et d, et ainsi de suite.

Soient a_1, b_1, c_1,... g_1 les racines réelles de $F'(x)=0$, rangées aussi par ordre de grandeur. On vient de reconnaître qu'elles sont comprises, partie entre a et b, partie entre b et c, etc. De là on conclut que l'équation $F(x)=0$ ne peut avoir qu'une seule racine au-dessus de a_1, qu'une seule entre a_1 et b_1, qu'une seule entre b_1 et c_1,..., et enfin qu'une seule au-dessous de g_1.

Tel est le sens exact du théorème de Rolle. Il n'établit pas que deux racines consécutives de l'équation dérivée $F'(x)=0$ *comprennent nécessairement* une racine de la proposée $F(x)=0$; mais seulement qu'*elles ne peuvent pas en comprendre plus d'une*.

De ce théorème on tire naturellement la conséquence que, dans une équation, le nombre des racines réelles comprises entre deux quantités α et β ne peut pas surpasser de plus d'une unité le nombre des racines de la dérivée qui sont comprises entre les mêmes quantités α et β. Donc aussi le nombre de toutes les racines réelles d'une équation ne peut pas surpasser de plus d'une unité celui des racines réelles de la dérivée. Il est d'ailleurs bien entendu qu'il pourra être moindre.

Ce qui précède semble n'être applicable qu'aux équations dont toutes les racines sont inégales; mais on y comprend aussi le cas des racines égales. Et, en effet, on peut arriver à ce cas en partant d'une équation qui n'aurait d'abord que des racines inégales, et dans laquelle on supposerait que plusieurs racines, prises consécutivement, se rapprocheraient graduellement jusqu'à devenir égales entre elles. Alors, les résultats des substitutions de ces racines égales dans $F'(x)$ deviendront tous égaux à zéro; mais il faut toujours les considérer comme ayant des signes tels que la suite entière des signes des résultats ne cesse pas d'être alternative; et chaque racine de $F'(x)=0$ comprise entre deux racines qui deviennent égales devra être elle-même égale à ces racines. De cette manière la proposition de Rolle aura toute la généralité désirable, aussi bien que la conséquence qui y est jointe et tout ce qui va être dit dans le n° suivant.

Cette explication, qu'il serait facile de remplacer par une autre plus satisfaisante, suffira aux lecteurs qui ont quelque habitude de l'analyse.

487. Les considérations qui mènent au théorème de ROLLE peuvent aussi fournir des caractères pour reconnaître si les m racines de l'équation $F(x)=0$ sont réelles.

Admettons qu'en effet elles le soient, et continuons de les représenter, suivant l'ordre de leurs grandeurs, par a, b, c, ... On a vu que l'équation dérivée $F'(x)=0$ doit avoir au moins une racine réelle entre a et b, au moins une entre b et c, etc. Mais comme elle ne doit pas avoir, en tout, plus de $m-1$ racines, on est sûr qu'entre deux nombres consécutifs de la suite a, b, c,... il y a une racine de l'équation dérivée $F'(x)=0$, et qu'il n'y en a qu'une. Plaçons aussi ces $m-1$ racines par ordre de grandeur, et nommons-les a_1, b_1, c_1, etc.

Puisque a_1 est entre a et b, b_1 entre b et c, etc., il est facile de voir que si on substitue successivement a_1, b_1, etc. à la place de x dans $F(x)$, les résultats seront alternativement négatifs et positifs; de sorte que,

Pour	$F(a_1)$,	$F(b_1)$,	$F(c_1)$,	etc.,
on a	$-$,	$+$,	$-$,	etc.

D'un autre côté, on peut appliquer à la fonction $F'(x)$ et à sa dérivée $F''(x)$ tout ce qui a été dit de $F(x)$ et $F'(x)$ dans le n° 486; donc,

Pour	$F''(a_1)$,	$F''(b_1)$,	$F''(c_1)$,	etc.,
on a	$+$,	$-$,	$+$,	etc.

Donc les produits $F(a_1)\times F''(a_1)$, $F(b_1)\times F''(b_1)$, etc., seront tous négatifs.

Or, si on fait $F(x)\times F''(x)=y$, et qu'on élimine x entre les deux équations

$$[2] \qquad F'(x)=0, \quad F(x)\times F''(x)=y,$$

les racines de l'équation finale en y seront précisément les produits ci-dessus; donc, puisque tous ces produits sont négatifs, l'équation en y n'aura que des racines négatives, et par suite tous ses termes auront le signe $+$.

Ainsi, quand l'équation $F(x)=0$ n'a que des racines réelles, il doit arriver que toutes celles de $F'(x)=0$ soient réelles aussi, et en outre qu'il n'y ait que des signes $+$ dans l'équation en y, résultant de l'élimination de x entre les équations [2].

Réciproquement, ces conditions étant remplies, on peut démontrer que toutes les racines de $F(x)=0$ seront réelles. D'abord, les $m-1$ racines de $F'(x)=0$ étant réelles, il est évident que les $m-1$ valeurs de y ou $F(x)\times F''(x)$ sont réelles, et le n° 486 prouve que les quantités $F''(a_1)$, $F''(b_1)$, etc. doivent avoir les signes alternatifs $+-$ etc. Ensuite, de ce que l'équation en y n'a que des signes $+$, on conclut qu'elle n'a point de racines positives; et, puisque d'ailleurs on sait que toutes ses racines sont réelles, elles ne peuvent être que négatives : donc les $m-1$ produits

$$F(a_1)\times F''(a_1),\qquad F(b_1)\times F''(b_1),\qquad \text{etc.}$$

sont négatifs. Or, les seconds facteurs ont les signes alternatifs $+-$ etc.; donc, les quantités $F(a_1)$, $F(b_1)$, etc. devront avoir alternativement les signes $-$ et $+$. Donc il existe, entre a_1 et la limite supérieure des racines de l'équation $F(x)=0$, une racine de cette équation, il en existe une entre b_1 et a_1, une aussi entre c_1 et b_1, etc. Donc enfin les m racines de cette équation sont réelles.

Les conditions qui se tirent de l'équation en y doivent être regardées comme actuellement connues : car on obtient cette équation par une simple élimination. A la vérité, il pourrait rester quelque doute à cause des facteurs qui s'introduisent ou se suppriment pendant l'élimination, mais cette difficulté s'évanouira en déterminant exactement l'équation finale par la méthode dite des *fonctions symétriques*, qui sera exposée Chapitre XXI.

Quant aux autres conditions, qui exigent qu'il n'y ait que des racines réelles dans l'équation dérivée $F'(x)=0$, elles sont encore à chercher. Or, cette équation n'est plus que du degré $m-1$, et en lui appliquant les mêmes raisonnemens qu'à $F(x)=0$, on réduira encore la question à chercher les conditions qui assurent la réalité des racines de la seconde dérivée $F''(x)=0$, laquelle n'est plus que du degré $m-2$. En continuant ainsi, on descendra jusqu'à une équation du 2e degré en x, dont la dérivée, étant du

1er degré, ne saurait avoir de racine imaginaire; de sorte qu'alors la seule condition à remplir sera que l'équation en y, qui est aussi du 1er degré, ait ses deux termes de même signe.

Remarque. Si on se reporte aux raisonnemens qui ont conduit à faire usage de l'équation $y=F(x)\times F''(x)$, on apercevra facilement qu'on peut la remplacer par celle-ci $y=MF(x)\times F''(x)$, M étant une quantité positive quelconque. Cette remarque prouve qu'on peut introduire ou supprimer dans les polynômes $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, etc., tels facteurs positifs qu'on jugera convenables pour simplifier les calculs.

488. Le nombre des conditions auxquelles on parvient par ce procédé, pour une équation de degré quelconque m, est facile à déterminer.

Ces conditions doivent toutes se tirer des équations successives en y. Or, la première de ces équations résulte de l'élimination de x entre les équations [2]

$$F'(x)=0, \qquad y=F(x)\times F''(x);$$

et comme $F'(x)=0$ a $m-1$ racines, l'inconnue y doit aussi avoir $m-1$ valeurs: donc l'équation en y sera du degré $m-1$; donc, pour que tous ses termes soient de même signe, il y aura $m-1$ conditions.

Semblablement, la deuxième équation en y, résultant de l'élimination de x entre $F''(x)=0$ et $y=F'(x)\times F'''(x)$, devra donner $m-2$ conditions; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on tombe sur une équation du 1er degré en y, laquelle ne donnera plus qu'une seule condition. Donc, en reprenant toutes ces conditions en ordre inverse, leur nombre sera

$$1+2+3\ldots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il est digne de remarque que ce nombre de conditions est précisément le même qu'on trouve par l'emploi de l'équation aux carrés des différences (479); et toutefois il peut se faire que quelques unes des conditions rentrent dans les autres. L'équation du 3e degré en est une preuve: car, pour cette équation, on a vu et on va le voir encore tout à l'heure, que les conditions se réduisent à une seule.

489. Pour première application, soit l'équation

$$x^2+Px+Q=0.$$

Dans cet exemple, on a

$$F(x)=x^2+Px+Q,\quad F'(x)=2x+P,\quad F''(x)=2;$$

et sur-le-champ on voit que l'équation $F'(x)=0$ n'a pas de racine imaginaire, puisqu'elle est du 1[er] degré.

Pour avoir l'équation en y, les deux équations entre lesquelles on doit éliminer x sont

$$2x+P=0,\quad y=(x^2+Px+Q)\times 2.$$

Or, l'élimination donne

$$y+2(\tfrac{1}{4}P^2-Q)=0:$$

donc, pour que les deux termes de cette équation soient de même signe, il faut qu'on ait

$$\tfrac{1}{4}P^2-Q>0;$$

et cette condition est la seule nécessaire pour assurer la réalité des racines de l'équation du 2[e] degré.

490. Considérons encore l'équation du 3[e] degré. Si elle a son second terme, on peut le faire disparaître sans changer le nombre des racines réelles (392); c'est pourquoi je la prendrai sous la forme

$$x^3+Qx+R=0.$$

Dans ce cas on a

$$F(x)=x^3+Qx+R,\quad F'(x)=3x^2+Q,\quad F''(x)=6x.$$

Il faut d'abord que l'équation dérivée $3x^2+Q=0$ n'ait que des racines réelles; et, pour que cela soit, la condition est évidemment $Q<0$.

Ensuite il faut éliminer x entre les équations

$$3x^2+Q=0,\quad y=(x^3+Qx+R)\times 6x.$$

La seconde revient à celle-ci,

$$y=6x^4+6Qx^2+6Rx;$$

et la première donne

$$x^2 = -\tfrac{1}{3}Q, \quad x^4 = \tfrac{1}{9}Q^2.$$

Par suite on a

$$y = -\tfrac{4}{3}Q^2 + 6Rx, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3y + 4Q^2}{18R};$$

et, en mettant cette valeur dans l'équation $3x^2 + Q = 0$, il vient, toute réduction faite,

$$y^2 + \tfrac{8}{3}Q^2 y + \tfrac{4}{9}Q(4Q^3 + 27R^2) = 0.$$

Pour que les trois termes de cette équation aient le même signe, il faut et il suffit que le terme tout connu soit positif. Mais déjà on a vu que Q doit être négatif; donc la nouvelle condition sera

$$4Q^3 + 27R^2 < 0.$$

Enfin, en remarquant que cette condition ne peut pas avoir lieu sans que Q soit négatif, on conclut, comme au n° 479, qu'elle est la seule nécessaire pour assurer la réalité des racines de l'équation du 3ᵉ degré.

Théorème de M. Budan. *Son utilité dans la résolution des équations.*

491. Nous avons déjà cité, n° 480, l'ouvrage publié en 1807, sous le titre de *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*. L'auteur y énonçait un théorème important qu'il présentait comme une extension de la règle des signes de Descartes, et dont on pouvait facilement apercevoir la vérité à l'égard des équations qui n'ont que des racines réelles; puis il ajoutait « qu'il avait de fortes raisons de le croire applicable à une équation quelconque. » Plus tard, en 1811, il mit cette assertion hors de doute par une démonstration qu'il communiqua à l'Institut. Lagrange et Legendre qui furent chargés d'en faire l'examen, jugèrent que la démonstration était exacte et que le théorème était nouveau.

Cependant, long-temps après, Fourier en a revendiqué l'inven-

tion; et, en effet, si on lit avec attention l'avertissement qui précède l'ouvrage composé par ce savant, et publié par M. NAVIER, en 1831, sous le titre d'*Analyse des équations*; on ne peut guère douter qu'il n'ait donné l'énoncé du théorème dans son cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique en 1797. Mais il ne paraît pas aussi certain qu'il en ait eu une démonstration avant M. BUDAN, et cette raison m'a déterminé à le mettre sous le nom de cet auteur. Pour mieux faire connaître en quoi il consiste, je reprends les choses de plus haut.

Une équation en x étant donnée, et α étant un nombre positif quelconque, soit fait $x=y+\alpha$: on aura une transformée en y dont toutes les racines seront celles de la proposée diminuées de α; et il est évident qu'autant l'équation en x renfermait de racines entre o et α, autant il y aura de racines positives de moins dans la transformée en y ou $x-\alpha$. Or, lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, on a vu que le nombre des racines positives de cette équation est égal à celui des variations de signes : donc, si l'équation proposée en x n'a que des racines réelles, on devra trouver dans la transformée en $x-\alpha$ autant de variations de moins qu'il y avait de racines entre o et α dans la proposée. La présence des imaginaires empêche cette conclusion d'être générale ; mais dans tous les cas on peut établir, et c'est le théorème énoncé par M. BUDAN, que le nombre des racines de l'équation en x, comprises entre o et α, ne peut point surpasser le nombre des variations perdues en passant de cette équation à la transformée en $x-\alpha$.

Soit $X=0$ une équation du degré m en x, et soient X', X'',... $X^{(m-1)}$, $X^{(m)}$ la suite des fonctions dérivées de X, jusqu'à celle qui ne renferme plus l'inconnue x. Si on fait $x=y+\alpha$, on obtiendra la transformée en y ou $x-\alpha$; et, si on ordonne cette transformée à la manière ordinaire, ses coefficiens seront les valeurs que prennent, pour $x=\alpha$, les fonctions

$$\frac{X^{(m)}}{1.2...m},\ \frac{X^{(m-1)}}{1.2...(m-1)},\ \frac{X''}{1.2},\ \frac{X'}{1},\ X.$$

D'un autre côté, pour $x=0$, ces fonctions doivent se réduire aux coefficiens de l'équation $X=0$; car alors la transformée doit de-

venir celle qu'on aurait eue en faisant $x=y$. Ainsi, le théorème dont il s'agit revient à démontrer que si on compte le nombre des variations de la suite ci-dessus, après y avoir fait $x=0$, et aussi après y avoir fait $x=\alpha$, le nombre des racines de $X=0$, comprises entre 0 et α, ne peut pas surpasser celui des variations qui se trouvent de moins après la seconde substitution. Remarquez que dans cette suite de fonctions on peut supprimer les diviseurs numériques, et même multiplier ou diviser chacune d'elles par tel facteur positif qu'on voudra, puisqu'alors les signes ne sont pas altérés.

C'est à peu près ainsi que Fourier présente le théorème dans son *Analyse des équations*; et je vais en rapporter ici l'énoncé et la démonstration tels qu'on les trouve dans cet ouvrage.

492. Théorème. *Etant donnée une équation quelconque* $X=0$, *de la forme*

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

si, dans la suite des $m-1$ *fonctions*

$$[1] \qquad X^{(m)},\ X^{(m-1)},\ \ldots\ X'',\ X',\ X,$$

on substitue alternativement deux quantités réelles quelconques α *et* β, α *étant* $<\beta$, *et si, après chaque substitution, on compte les variations de signe que présente la suite des résultats : le nombre des racines comprises entre* α *et* β *ne peut jamais surpasser celui des variations perdues de* $x=\alpha$ *à* $x=\beta$, *et quand il en est surpassé, il l'est toujours d'un nombre pair.*

La démonstration se fera en examinant les changemens de signes qui peuvent s'opérer dans la suite [1] lorsque x croît d'une manière continue. Or, il est clair qu'aucune des fonctions de cette suite ne doit changer de signe sans passer par zéro : car, si l'une d'elles change de signe en y substituant successivement deux quantités, on sait qu'il existe, entre ces quantités, au moins une valeur de x qui rend cette fonction égale à zéro. C'est pourquoi l'on doit particulièrement faire attention aux altérations produites dans les signes, lorsque x passe par une valeur a qui fait évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite [1]. La clarté exige que l'on considère avec ordre différens cas. Je préviens ici que je représenterai

le premier membre de l'équation indifféremment par X ou par $F(x)$; et les polynômes dérivés, par X', X'', etc., ou par $F'(x)$, $F''(x)$, etc.

1° Supposons que la valeur $x=a$ rende nulle une seule des fonctions, et que ce soit la dernière X ou $F(x)$.

Puisque a ne rend nulle aucune des fonctions qui précèdent X, on est certain qu'en prenant une quantité h aussi petite qu'on voudra, et en substituant successivement $a-h$ et $a+h$ au lieu de x dans ces fonctions, les deux suites de résultats devront offrir exactement les mêmes signes que si l'on avait substitué a. Il n'y a donc qu'à comparer les signes donnés par les substitutions de $a-h$ et de $a+h$ dans les deux dernières fonctions, $F'(x)$ et $F(x)$. Ces fonctions deviennent

$$F'(a-h) \text{ et } F(a-h), \text{ pour } x=a-h;$$
$$F'(a+h) \text{ et } F(a+h), \text{ pour } x=a+h.$$

Mais on sait que

$$F(a-h)=F(a)-hF'(a)+\text{etc.},$$
$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\text{etc.};$$

donc, en observant que $F(a)=0$, on a

$$F(a-h)=-hF'(a)+\text{etc.},$$
$$F(a+h)=+hF'(a)+\text{etc.}$$

On peut prendre h assez petit pour que chaque développement représente une quantité de même signe que son premier terme; par conséquent, nous avons simplement à comparer

$$\text{les signes de } F'(a-h) \text{ et } -F'(a),$$
$$\text{avec ceux de } F'(a+h) \text{ et } F'(a).$$

Or, on a déjà remarqué que $F'(a-h)$ et $F'(a+h)$ ont le même signe que $F'(a)$; donc, en ne faisant attention qu'aux signes, on aura une des deux combinaisons suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } a-h \ldots + \; - \\ \text{Pour } a+h \ldots + \; +\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} - \; + \\ - \; - .\end{array}\right.$$

Donc la substitution de $a+h$ dans la suite [1] donne une variation de moins que la substitution de $a-h$.

2° Supposons que plusieurs fonctions consécutives deviennent zéro, et qu'elles comprennent la dernière $F(x)$.

Soient

$$F^{(i-1)}(x),\ F^{(i-2)}(x),\ldots F'(x),\ F(x),$$

ces fonctions consécutives, qui deviennent nulles quand on fait $x=a$. On sait que ce cas est celui où l'équation $F(x)=0$ renferme i racines égales à a; et comme on suppose que ni la fonction $F^{(i)}$ ni aucune des précédentes ne deviennent zéro par la valeur de $x=a$, on est sûr que si h est suffisamment petit, les signes de la suite [1] ne pourront être altérés, en passant de $x=a-h$ à $x=a+h$, que dans la partie qui vient après $F^{(i)}(x)$. Ainsi, il nous suffira de comparer les signes des deux lignes ci-dessous :

[2] $F^{(i)}(a-h),\ F^{(i-1)}(a-h),\ldots F'(a-h),\ F(a-h),$
[3] $F^{(i)}(a+h),\ F^{(i-1)}(a+h),\ldots F'(a+h),\ F(a+h),$

Si on développe successivement $F^{(i-1)}(a-h)$, $F^{(i-2)}(a-h)$, etc., et qu'on ait égard aux hypothèses $F(a)=0$, $F'(a)=0,\ldots F^{(i-1)}(a)=0$, il vient

$$F^{(i-1)}(a-h)=F^{(i-1)}(a)-hF^{(i)}(a)+\text{etc.}$$
$$=-hF^{(i)}(a)+\text{etc.}$$
$$F^{(i-2)}(a-h)=F^{(i-2)}(a)-hF^{(i-1)}(a)+\tfrac{1}{2\cdot 3}h^2F^{(i)}(a)-\text{etc.}$$
$$=+\tfrac{1}{2\cdot 3}h^2F^{(i)}(a)\ \text{etc.}$$

etc.

La quantité h étant aussi petite qu'on veut, le premier développement est une quantité de signe contraire à $F^{(i)}(a)$, le second est une quantité de même signe, et ainsi de suite, en alternant les signes jusqu'à $F(a-h)$.

Si on développe de la même manière les valeurs correspondantes à $a+h$, il est évident qu'on aura des quantités toutes de même signe que $F^{(i)}(a)$. D'un autre côté, les signes de $F^{(i)}(a-h)$ et de $F^{(i)}(a+h)$ doivent être les mêmes que celui de $F^{(i)}(a)$. La ligne [2] n'a donc que des variations, lesquelles sont en nombre i, tandis que la ligne [3] n'a que des permanences.

Ainsi, l'ensemble complet des signes de la suite [1], lorsque x

passe de $a-h$ à $a+h$, doit perdre i variations, c'est-à-dire, tout autant qu'il y a de racines égales à a.

3° Supposons encore que la valeur $x=a$ rende nulle une seule des fonctions, mais que ce soit une fonction intermédiaire $X^{(n)}$ ou $F^{(n)}(x)$.

Ecrivons la suite [1] comme ci-dessous, en mettant des points à la place des termes qui nous sont inutiles :

$$\ldots X^{(n+1)},\ X^{(n)},\ X^{(n-1)},\ \ldots$$

Puisque $X^{(n)}$ est la seule fonction qui devienne zéro en faisant $x=a$, il s'ensuit que chacune de celles qui sont avant ou après $X^{(n)}$ doit donner le même signe en y substituant $a-h$, $a+h$, ou a.

Si la suite précédente ne comprenait aucune des fonctions $X^{(n-1)}, X^{(n-2)}, \ldots$ qui sont après $X^{(n)}$, le cas que nous examinons serait semblable au premier, et on serait sûr que la suite des signes correspondans à $a-h$, comparée avec la suite des signes correspondans à $a+h$, perdrait une variation. Et même on a vu que cette perte a lieu, parce que les deux derniers signes présentent l'une de ces combinaisons :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } a-h \ldots + \ - \\ \text{Pour } a+h \ldots + \ + \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} - \ + \\ - \ - . \end{array}\right.$$

Par conséquent, si on écrit sur la même ligne les valeurs que prennent les trois fonctions $X^{(n+1)}, X^{(n)}, X^{(n-1)}$, par la substitution de $a-h$; et au-dessous, sur une autre ligne, les valeurs que prennent ces fonctions par la substitution de $a+h$, les signes ne pourront offrir qu'une de ces quatre combinaisons :

$$\begin{array}{l|l|l|l}\text{Pour } a-h \ldots + - + & - + + & + - - & - + - \\ \text{Pour } a+h \ldots + + + & - - + & + + - & - - - .\end{array}$$

Quel que soit le signe qui ait lieu, ce tableau montre que, dans le passage de $a-h$ à $a+h$, la suite [1] perd deux variations ou n'en perd aucune.

4° Supposons que plusieurs fonctions consécutives deviennent nulles, et qu'elles ne comprennent point la dernière X.

Ecrivons la suite [1] comme ci-après

$$\ldots X^{(n+i)},\ X^{(n+i-1)}, \ldots\ X^{(n)},\ \ \ {}^{n-1)}, \ldots,$$

et admettons que les i fonctions comprises entre $X^{(n+i)}$ et $X^{(n-1)}$ deviennent zéro, sans que cela arrive à aucune autre. Ce n'est que dans cette partie qu'il pourra y avoir des modifications de signes en passant de $x=a-h$ à $x=a+h$. Si la suite [1] finissait à $X^{(n)}$, on rentrerait dans le 2ᵉ cas, et l'on conclurait qu'il doit y avoir i variations perdues. Mais pour avoir égard à la fonction $X^{(n-i)}$, il faut distinguer l'hypothèse de i pair, et celle de i impair.

Lorsque i est pair, le nombre des termes $X^{(n+i)}, \ldots X^{(n)}$ est impair. Or, d'après ce qui a été dit dans le 2ᵉ cas, si on descend de $X^{(n+i)}$ à $X^{(n)}$, les signes résultant de la substitution de $a-h$ seront alternatifs; donc $X^{(n)}$ sera de même signe que $X^{(n+i)}$. Au contraire, les signes résultant de la substitution de $a+h$ seront tous semblables à celui de $X^{(n+i)}$. Mais cette dernière fonction doit avoir le même signe après chaque substitution; donc aussi la fonction $X^{(n)}$ aura le même signe; donc, de $x=a-h$ à $x=a+h$, le nombre des variations perdues est i.

Lorsque i est impair, le nombre des fonctions $X^{(n+i)}, \ldots X^{(n)}$ est pair; et le raisonnement ci-dessus prouve qu'alors les substitutions de $a-h$ et de $a+h$ donnent pour $X^{(n)}$ des résultats de signes opposés. De là il suit que les deux termes $X^{(n)}$ et $X^{(n-1)}$ ne peuvent offrir, après les deux substitutions, que l'une de ces quatre combinaisons :

$$\begin{array}{c|c|c|c} ++ & +- & -+ & -- \\ -+ & -- & ++ & +- \end{array}.$$

Dans la première et la dernière, une permanence est remplacée par une variation; et, dans les deux intermédiaires, c'est une variation qui est remplacée par une permanence. Donc le nombre des variations perdues par la suite [1] n'est plus i, mais bien $i-1$ ou $i+1$.

Ainsi, quand i est pair, le nombre des variations perdues est i; et quand i est impair, ce nombre est $i-1$ ou $i+1$; donc ce nombre est toujours pair.

5° Supposons en dernier lieu que la substitution de a fasse évanouir des fonctions dans diverses parties de la suite [1].

Si dans ces fonctions il s'en trouve i consécutives parmi lesquelles soit comprise la dernière X, l'équation $X=0$ a i racines

égales à a; et, par ce qui a été dit 1° et 2°, on sait que ces fonctions évanouissantes donnent lieu à une perte de i variations, lorsqu'on passe de $x=a-h$ à $x=a+h$. Et quant aux fonctions intermédiaires évanouissantes, ce qui a été dit 3° et 4° montre qu'elles ne peuvent donner lieu qu'à un nombre pair de variations perdues.

Les cinq cas que nous venons de parcourir mettent en évidence les conséquences qui suivent. Lorsque x croît d'une manière continue, les changemens qui s'opèrent dans les signes de la suite [1] ne peuvent jamais augmenter le nombre des variations, mais seulement le diminuer. Chaque fois que x vient à dépasser une racine a, il y a des variations perdues, dont le nombre est pareil à celui des racines égales à a renfermées dans l'équation, ou le surpasse d'un nombre pair. Il peut aussi arriver qu'il y ait des variations perdues, sans que x passe par une racine de l'équation, et alors elles sont toujours en nombre pair.

Donc enfin, si, après avoir substitué dans la suite [1] une valeur $x=\alpha$, on substitue une valeur plus grande $x=\beta$, le nombre des variations perdues sera ou égal au nombre des racines comprises entre α et β, ou le surpassera d'un nombre pair. C'est là le théorème qui était à démontrer.

493. Si la substitution d'une valeur $x=a$ faisait évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite [1], on pourrait être embarrassé sur la manière de compter les variations. FOURIER élude très-heureusement la difficulté en substituant, au lieu de a, des nombres $a-h$ et $a+h$, qui en diffèrent aussi peu qu'on veut. Aucun calcul nouveau ne sera nécessaire pour déterminer les signes qui résultent de ces substitutions. D'abord, les fonctions qui ne s'évanouissent point par la valeur $x=a$, doivent conserver les mêmes signes; et quant aux fonctions évanouissantes, il suffira de rappeler ce qui a été dit dans le n° précédent (4°). On a vu en effet que la substitution $a-h$ remplace les zéros par des signes alternatifs dont le premier est contraire au signe à la droite duquel ces zéros sont placés, tandis que la substitution de $a+h$ amène ce même signe à la place de chaque zéro. Ce procédé est appelé par FOURIER règle du double signe. Il revient encore à remplacer les zéros d'abord par des signes tels qu'on ait le plus possible de

variations, et ensuite par des signes tels qu'on en ait le moins possible.

Par exemple, supposons qu'on ait trouvé

Pour $x=a$,...... $+ \; 0 \; - \; + \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; - \; 0 \; +$;

en appliquant la règle du double signe, on aura

Pour $x=a-h$... $+ \; - \; - \; + \; - \; + \; - \; + \; - \; + \; +$,
Pour $x=a+h$... $+ \; + \; - \; + \; + \; + \; + \; + \; - \; - \; +$.

On voit alors que x, en passant par la valeur a, fait perdre 4 variations à la suite des signes. Il est d'ailleurs évident que l'équation n'admet point a pour racine, puisque la dernière fonction n'est pas devenue zéro pour $x=a$. On verra tout à l'heure que ces quatre variations perdues indiquent avec certitude la présence de quatre racines imaginaires.

494. Reprenons la suite

[1] $$X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots X'', X', X.$$

Si on y substitue pour x des valeurs négatives au-delà d'une certaine limite $x=-A$, les signes de ces fonctions seront ceux de leurs premiers termes. Mais, par la manière dont on forme les polynômes dérivés, il est évident que ces premiers termes sont composés des puissances x^0, x^1, x^2,...x^m, multipliés par des coefficiens qui sont tous de même signe; donc, après la substitution de $x=-A$, la suite des fonctions n'aura que des variations.

Pareillement, des valeurs positives de x, au-delà d'une certaine limite $x=+B$, feront acquérir, aux fonctions de la suite [1], des valeurs qui seront toutes de même signe, de sorte que la suite des résultats n'offrira plus alors que des permanences.

Puisque la substitution de la limite $-A$, dans la suite des fonctions [1], ne doit donner que des variations, et que ces fonctions sont au nombre de $m+1$, il s'ensuit que le nombre des variations est égal à m, c'est-à-dire, au degré de l'équation $X=0$. Ainsi, m est le nombre total des variations que doit perdre la suite [1], en faisant augmenter x depuis $-A$ jusqu'à $+B$.

Cela posé, considérons le cas où les m racines de l'équation

$X = 0$ sont réelles, et concevons qu'on substitue dans la suite [1] deux quantités α et β intermédiaires entre $-A$ et $+B$, α étant $< \beta$: je dis qu'alors le nombre des racines comprises entre α et β serait précisément égal à celui des variations perdues par la suite [1], en passant de $x = \alpha$ à $x = \beta$. En effet, on sait déjà que le nombre de ces racines ne peut pas être plus grand que le nombre des variations perdues (492); et d'un autre côté, s'il était moindre, il faudrait, par compensation, qu'on trouvât, en passant de $-A$ à α, ou de β à $+B$, plus de racines que de variations perdues, ce qui est impossible (492).

Maintenant, ne supposons plus que l'équation ait ses m racines réelles. Nommons n le nombre des variations perdues en passant de α à β. Par le théorème du n° 492, il est clair que le nombre des racines réelles qui sont en-deçà de α et au-delà de β, ne devra jamais excéder $m-n$; donc, s'il y a entre α et β moins de n racines réelles, on est certain que ce nombre doit être complété par des racines imaginaires.

Pour cette raison, et afin de rendre le discours plus général, Fourier propose de regarder l'intervalle de α à β comme comprenant n racines; mais alors il faudra sous-entendre que quelques unes d'entre elles peuvent être *déficientes* ou imaginaires.

495. Le théorème du n° 492 renferme comme corollaire celui de Descartes. Pour une certaine limite positive $x = +B$, la suite [1] ne doit avoir que des permanences. Mais si on fait $x = 0$, les fonctions de cette suite se réduisent aux coefficiens même de l'équation $X = 0$, abstraction faite de certains multiplicateurs numériques et positifs; donc, de $x = 0$ à $x = +B$, la suite doit perdre autant de variations qu'il y en a dans l'équation; donc le nombre des racines positives, lesquelles sont toutes entre 0 et $+B$, est tout au plus égal au nombre des variations de l'équation. Tel est en effet le théorème de Descartes (473).

Si l'équation manque de quelques termes, il y aura, dans la suite [1], des fonctions qui s'anéantiront pour $x = 0$. Mais on peut supposer à ces zéros des signes tels que les variations soient en même nombre que si on ne tenait aucun compte des termes manquans; par conséquent, le corollaire est vrai, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune attention à ces termes. Cette remarque

s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit au sujet du théorème de DESCARTES.

Ici, on peut encore ajouter, comme conséquence immédiate du nouveau théorème, que si l'équation a plus de variations que de racines positives, le nombre excédant sera toujours pair, et indiquera dans l'équation un pareil nombre de racines imaginaires.

496. L'utilité du nouveau théorème, pour la recherche des racines réelles, est facile à apercevoir. Dans les fonctions

$$[1] \qquad X^{(m)},\ X^{(m-1)}, \ldots X'',\ X',\ X,$$

on substituera des quantités positives croissantes de o vers $-\infty$, jusqu'à ce qu'on parvienne à une limite $-A$, qui ne donne que des variations de signes; puis on substituera aussi des quantités positives croissantes de o vers $+\infty$, jusqu'à ce qu'on atteigne une limite $+B$, qui ne donne que des permanences. Quant aux intervalles des substitutions, ils seront plus ou moins rapprochés, selon qu'on le jugera convenable. Parmi ces intervalles, il en faudra distinguer de plusieurs sortes.

Si un intervalle est compris entre deux quantités, dont l'une donne une variation de moins que l'autre, il y a entre ces quantités une racine réelle de l'équation, et il n'y en a qu'une seule.

Si un intervalle est formé par deux quantités, dont l'une donne plusieurs variations de moins, mais en nombre impair, on sera sûr que cet intervalle renferme un nombre impair de racines réelles; mais on ne saura point encore s'il en renferme une seule ou plusieurs.

Enfin, si un intervalle est formé par deux quantités, dont l'une donne plusieurs variations de moins, mais en nombre pair, cet intervalle pourra renfermer un nombre pair de racines, ou n'en renfermer aucune.

497. Dans les deux derniers cas, il reste de l'incertitude sur le nombre des racines réelles que comprend l'intervalle. La première idée qui s'offre à la pensée, est de partager l'intervalle en plusieurs intervalles moindres par des quantités intermédiaires qu'on substituera dans la suite [1], et d'appliquer à ces substitutions les règles précédentes. Si la séparation n'est pas encore complètement opérée, on pourra subdiviser les derniers intervalles, et

ainsi de suite. Lorsque l'intervalle primitif ne comprend que des racines réelles et inégales, ces subdivisions répétées doivent en opérer infailliblement la séparation. Nous écarterons ici le cas des racines égales, attendu qu'on a une méthode pour décomposer une équation, qui a des racines égales, en d'autres équations, dont toutes les racines sont inégales.

Lorsque l'intervalle primitif ne comprend pas de racines réelles, la subdivision de cet intervalle n'aura aucun terme, et l'on ignorera toujours si la séparation est impossible en raison de ce que les racines sont imaginaires, ou si elle est seulement retardée en raison de ce que leurs différences sont extrêmement petites. De nouvelles règles sont donc nécessaires pour faire disparaître le doute; et c'est à quoi l'on parvient sûrement en employant, avec LAGRANGE, des substitutions intermédiaires, dont les intervalles soient moindres que la plus petite différence entre les racines.

Le nombre des substitutions successives, exigées par la méthode de LAGRANGE, se trouve déjà considérablement diminué par la connaissance des intervalles où le théorème de M. BUDAN montre qu'il ne tombe aucune racine réelle. Mais il reste toujours à éviter l'équation aux carrés des différences, dont le calcul est d'une prolixité vraiment fastidieuse. J'ai déjà dit que M. BUDAN avait dirigé ses recherches vers ce but, mais qu'il ne l'avait point atteint. FOURIER, dans son *Analyse des Equations*, n'a pas été plus heureux; et même l'insuffisance du procédé qu'il indique est tellement frappante, qu'on a peine à concevoir comment il a pu s'y arrêter un seul instant.

M. BUDAN, dans sa *Nouvelle Méthode*, édit. de 1822, n'a indiqué le nouveau théorème que comme moyen de reconnaître l'absence des racines dans certains intervalles. Peut-être eût-il pu en tirer un meilleur parti, et s'en servir pour donner à sa méthode l'exactitude qui lui manque. D'un autre côté, dans les mémoires de l'Institut, année 1827, FOURIER a énoncé qu'on pouvait procéder immédiatement au calcul des racines en fractions continues, comme si l'on était assuré que toutes les racines sont réelles, et qu'en se guidant par ce théorème, la distinction des racines réelles et des racines imaginaires, ne doit pas manquer de s'opérer. Cette assertion n'étant appuyée d'aucune preuve pouvait paraître hasardée; mais, de-

puis, elle a été mise hors de doute par M. VINCENT. Voyez la note placée à la suite de l'Algèbre de M. BOURDON, 6ᵉ édit.

Théorème très-remarquable de M. STURM. Son usage dans la résolution des équations. Comment il donne les conditions de la réalité des racines.

498. Parmi les méthodes rigoureuses, celle que je viens de citer n'est pas la seule qui évite l'équation aux carrés des différences. Il est clair qu'on y parviendrait si l'on avait un théorème d'une application facile, pour reconnaître combien une équation a de racines réelles entre deux nombres donnés : car dès-lors on pourrait procéder au calcul des racines, par approximations successives, en subdivisant l'intervalle des deux nombres en intervalles partiels de plus en plus resserrés. Or, ce théorème important a été découvert par M. STURM, qui l'a communiqué à l'Institut en 1829. Récemment il a aussi été imprimé dans l'excellent traité d'Algèbre de MM. MAYER et CHOQUET; et comme désormais il formera une partie essentielle de la théorie des équations, il doit naturellement trouver place ici.

499. Soit une équation quelconque $X=0$, qui n'a plus de racines égales, et dont le premier membre X est un polynôme de la forme

$$X=Gx^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U,$$

dans lequel tous les coefficiens sont des nombres réels. Formons d'abord le polynôme dérivé X_1 de X, divisons X par X_1, et, quand nous serons parvenus à un reste de degré inférieur à X_1, changeons les signes de tous les termes de ce reste. Désignons par X_2 ce qu'il devient alors, divisons de la même manière X_1 par X_2, et changeons encore les signes du reste, on aura un nouveau polynôme X_3, de degré moindre que X_2. Divisons semblablement X_2 par X_3, et continuons cette série de divisions comme s'il s'agissait de découvrir le plus grand commun diviseur de X et X_1, en ayant soin de changer toujours les signes des restes. On est sûr à la fin d'arriver à un reste numérique, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus x; et ce reste sera différent de zéro, autrement l'équation $X=0$ aurait des racines égales, ce qui est contre la sup-

position. Après avoir changé aussi le signe de ce reste, représentons-le par X_r.

On aura ainsi une suite de fonctions

$$(x) \qquad X, X_1, X_2, X_3, \ldots X_{r-1}, X_r,$$

qui toutes contiendront x à l'exception de la dernière X_r. Je désignerai cette suite de fonctions, écrites dans l'ordre ci-dessus, en disant, d'une manière abrégée, la *suite* (x); et pour indiquer ce qu'elle devient en y remplaçant x par une valeur particulière a, je dirai simplement la *suite* (a). Le nom de fonctions *intermédiaires* sera donné à celles qui sont placées entre X et X_r. Cela posé, voici une règle sûre pour connaître combien l'équation $X=0$ a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques α et β, α étant $<\beta$.

Substituez α dans la suite (x), écrivez par ordre sur une même ligne les signes de tous les résultats, puis comptez le nombre de variations contenues dans cette suite de signes; écrivez semblablement sur une même ligne les signes qu'on obtient en substituant β, puis comptez le nombre des variations de cette seconde suite : autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'équation $X=0$ aura de racines réelles entre α et β.

Tel est le beau théorème dont M. Sturm a enrichi l'analyse algébrique, et dont la démonstration va nous occuper.

Nommons $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_{r-1}$, les quotiens qu'on trouve en divisant X par X_1, X_1 par X_2, ... X_{r-2} par X_{r-1}; et rappelons-nous que les restes de ces divisions sont $-X_2$, $-X_3$, ... $-X_r$. On aura cette suite d'égalités

$$[1] \qquad \left\{\begin{array}{l} X = X_1Y_1 - X_2, \\ X_1 = X_2Y_2 - X_3, \\ X_2 = X_3Y_3 - X_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{r-2} = X_{r-1}Y_{r-1} - X_r; \end{array}\right.$$

et deux conséquences importantes s'en déduisent immédiatement.

1° Deux fonctions consécutives de la suite (x) ne peuvent pas devenir nulles pour une même valeur de x. En effet, si on pou-

vait avoir à la fois $X_{n-1}=0$ et $X_n=0$, l'égalité

$$X_{n-1}=X_nY_n-X_{n+1},$$

qui se trouve parmi les précédentes, prouverait qu'on doit avoir aussi $X_{n+1}=0$; et en descendant d'égalité en égalité on conclurait qu'on doit avoir $X_r=0$, ce qui est contre la supposition.

2° Si une fonction intermédiaire de la suite (x) devient zéro pour une certaine valeur de x, les valeurs de la fonction précédente et de la suivante sont de signes contraires. En effet, lorsqu'on a $X_n=0$, l'égalité ci-dessus se réduit à $X_{n-1}=-X_{n+1}$.

Maintenant concevons qu'à partir de $x=\alpha$ on fasse augmenter x d'une manière continue, et examinons comment peuvent s'introduire des changemens dans les signes de la suite (x). Tant que x n'aura pas atteint une valeur propre à faire évanouir une ou plusieurs fonctions de la suite (x), il est clair qu'aucune de ces fonctions ne changera de signe, et que par conséquent la suite (x) présentera toujours les mêmes successions de signes. Supposons donc que x ait atteint une valeur a qui anéantisse une ou plusieurs des fonctions X, X_1, X_2, etc.; mais supposons d'abord que X n'en fasse point partie.

Soit X_n une fonction intermédiaire qui devient nulle par la valeur $x=a$. Suivant ce qui a été remarqué plus haut (1° et 2°), les fonctions X_{n-1} et X_{n+1}, pour cette valeur $x=a$, devront être différentes de zéro et avoir des signes contraires : de sorte qu'en donnant à la fonction nulle tel signe qu'on veut, la suite des trois fonctions

$$X_{n-1},\quad X_n,\quad X_{n+1},$$

présentera toujours une variation et n'en présentera qu'une.

Depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=a$, aucune des fonctions X_{n-1} et X_{n+1} n'ayant changé de signe, elles ont dû être de signes contraires; par conséquent, quel qu'ait été le signe de X_n avant de faire $x=a$, la suite des trois fonctions présentait aussi une variation et n'en présentait qu'une.

Si on fait $x=a+h$, on pourra prendre h positif et assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine des équations $X_{n-1}=0$ et $X_{n+1}=0$ entre a et $a+h$. Dans cet intervalle aucune des fonctions X_{n-1} et X_{n+1} ne changera de signe; elles seront donc de signes contraires,

et par conséquent, quel que soit le signe de X_n, il y aura encore une variation unique dans la suite des trois fonctions.

S'il y a quelqu'autre fonction intermédiaire qui soit zéro pour $x=a$, on est sûr qu'elle est placée entre deux fonctions qui ne s'anéantissent pas, et les raisonnemens précédens seront tout-à-fait applicables à ces trois fonctions. Donc, après la valeur $x=a$, il y aura dans la suite (x) le même nombre de variations qu'auparavant, quoiqu'elles puissent être autrement distribuées.

La succession de signes, qui s'établit en substituant des valeurs de x un peu plus grandes que a, se maintient la même jusqu'à ce que x dépasse une valeur qui fasse disparaître quelque fonction de la suite (x). Mais si cette valeur n'anéantit point la première fonction X, l'explication précédente prouve qu'après cette valeur les variations de la suite (x) seront encore en même nombre. Par là on voit clairement que ce nombre ne peut pas changer à moins que x ne parvienne à dépasser une racine de l'équation $X=0$. Il faut donc comparer les signes que prend alors cette suite avec ceux qu'elle avait auparavant, pour des valeurs de x un peu au-dessous de cette racine.

Soit a une racine de l'équation $X=0$; faisons $x=a+h$, h étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra. En désignant par A, A', A'',... les valeurs du polynôme X et de ses dérivés pour $x=a$, et par H la valeur de X correspondante à $a+h$, on aura

$$H=A+A'h+\tfrac{1}{2}A''h^2+\text{etc.}$$

Mais, puisque a est racine de $X=0$, on a $A=0$; donc

$$H=A'h+\tfrac{1}{2}A''h^2+\text{etc}:$$

et d'ailleurs on est sûr que A' est différent de zéro, attendu que l'équation $X=0$ n'a pas de racines égales. En mettant h en facteur, on écrira

$$H=h(A'+\tfrac{1}{2}A''h+\text{etc.});$$

alors il est évident qu'en donnant à h de très-petites valeurs positives, la quantité entre parenthèses sera de même signe que son premier terme A', et par conséquent H sera aussi de même signe que A'.

Pour savoir ce qu'était X avant que x eût atteint la valeur a, on y fera $x=a-h$; et, pour obtenir le résultat H' de cette substitution, il suffira de changer h en $-h$ dans l'expression de H. De cette manière, on a

$$H'=-h(A'-\tfrac{1}{2}A''h+\text{etc.}),$$

et l'on voit clairement que, pour de très-petites valeurs de h, la quantité H' est de signe contraire à A'. Ainsi, avant que x eût atteint la racine a, il y avait dans la suite (x) une variation de X à X_1; et après que x a dépassé a, cette variation se trouve remplacée par une permanence. Or, de ce qui a été dit plus haut il résulte que, pour les valeurs de x un peu moindres ou un peu plus grandes que a, le reste de la suite (x) doit toujours avoir un égal nombre de variations, quand même $x=a$ ferait disparaître quelque fonction intermédiaire ; donc, lorsque x en croissant vient à dépasser une racine de l'équation X=o, la suite (x) perd une variation.

En continuant d'augmenter x, le nombre actuel des variations de la suite (x) demeurera le même jusqu'à ce que x dépasse encore une racine; et alors une autre variation se perdra encore. La même chose arrivera chaque fois que x dépassera une nouvelle racine ; de sorte que les variations perdues par la suite (x) seront toujours en même nombre que les racines de X = o, comprises entre la valeur $x=\alpha$, par laquelle on a commencé les substitutions, et la valeur $x=\beta$ à laquelle on les arrête. C'est ce qui était à démontrer.

Remarques. I. Dans les divisions successives qui servent à trouver X_2, X_3, etc., on peut multiplier ou diviser les dividendes et les diviseurs par tels nombres positifs qu'on voudra. Par là les fonctions X, X_1, X_2, etc. seront seulement multipliées ou divisées par des nombres positifs, ce qui ne changera point leurs signes.

II. Si dans la suite (x) il se trouve une fonction X_k qui ne puisse pas devenir zéro de $x=\alpha$ à $x=\beta$, et si on veut connaître le nombre des racines comprises entre α et β, on pourra faire abstraction des fonctions qui viennent après X_k. En effet, il est facile de voir qu'en faisant varier x seulement depuis α jusqu'à β, on peut appliquer à la suite partielle X, X_1,... X_k tout ce qui a été dit de la suite complète.

III. Le cas où l'une des limites α et β ferait évanouir une des

fonctions X, X_1, etc., ne peut donner lieu à aucune difficulté. S c'est une fonction intermédiaire qui disparaît, on a vu qu'elle est toujours placée entre deux fonctions qui ne disparaissent pas et qui sont de signes contraires ; de sorte qu'on peut indifféremment prendre la fonction nulle avec + ou avec —, ou même n'en tenir aucun compte. Si X s'évanouit, et que ce soit, par exemple, en faisant $x=\beta$, on conclura d'abord que β est racine ; puis on remarquera, d'après la démonstration du n° précédent, qu'en donnant à x des valeurs un peu au-dessus de β, il y a une permanence de X à X_1, tandis que dans le reste de la suite, à partir de X_1, il y a le même nombre de variations que pour $x=\beta$. On connaîtra donc par la règle générale le nombre des racines réelles comprises entre α et une quantité un peu plus grande que β.

IV. Ne supposons plus que X_1 soit la fonction dérivée de X, mais un polynôme assujéti seulement aux conditions de n'avoir point de facteur commun avec X, et de prendre un signe contraire à X pour des valeurs de x très-peu au-dessous d'une racine quelconque de X=o ; puis, servons-nous de ce polynôme pour calculer X_2, X_3,... comme on s'est servi d'abord du polynôme dérivé. Le théorème de M. Sturm subsistera également avec la nouvelle suite X, X_1, X_2... En effet, d'un côté, si on reprend les détails de la démonstration, on verra que les nouvelles fonctions intermédiaires jouissent encore des mêmes propriétés ; et, d'un autre côté, il est clair qu'en passant d'une valeur de x un peu au-dessous d'une racine de X=o à une valeur un peu au-dessus, la fonction X devra changer de signe, tandis que X_1 n'en changera pas.

V. Je vais montrer à présent comment le théorème de M. Sturm peut encore être appliqué, quand l'équation X=o a des racines égales. Soit $X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots$ Les divisions prescrites pour déduire, du polynôme X et de son dérivé X_1, les fonctions X_2, X_3, etc., conduiront à un diviseur exact X_r, fonction de x, qui sera le plus grand commun diviseur de X et de X_1 ; et, d'après la composition connue de ce diviseur, si on divise X et X_1 par X_r, les deux quotiens seront

$$V=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$$

$$V_1=\begin{cases} n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots+\text{etc.}\end{cases}$$

A la seule inspection, on voit que V n'a plus de facteurs égaux, et que V_1 n'a point de facteur commun avec V. En outre, il est facile d'apercevoir que, pour des valeurs de x très-peu au-dessous d'une racine quelconque a, le facteur $x-a$ étant très-petit, V_1 aura le signe du produit $n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$, lequel signe est évidemment contraire à celui de V. Donc, en appliquant le théorème de M. STURM à l'équation $V=0$, on peut employer le quotient V_1 à la place de la fonction dérivée de V.

D'un autre côté il est clair que les fonctions V_2, V_3,..., qu'il faudrait déduire de V et V_1 selon la règle prescrite, sont aussi les quotiens de X_2, X_3,...X_r par X_r; donc les deux suites

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots.\ X_r,$$
$$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots.\ V_r$$

ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur commun, et, quelque soit le signe de ce facteur, il est évident qu'elles doivent présenter les mêmes variations lorsqu'on y substitue une valeur de x qui n'anéantit point X. Ainsi, en appliquant le théorème à la première suite, on pourra juger combien, entre deux nombres α et β dont aucun n'anéantit X, il y a de racines de l'équation $V=0$, ou bien, ce qui est la même chose, combien il y a de racines de l'équation $X=0$, abstraction faite du degré de multiplicité.

501. L'usage du théorème de M. STURM se présente de lui-même. Supposons que l'équation à résoudre n'ait plus de racines égales, et formons la suite

$$(x)\qquad\qquad X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots.\ X_r.$$

Il est évident que la substitution de 0 à la place de x réduit chacune de ces fonctions à son dernier terme; et d'ailleurs on sait que les valeurs de x au-dessus d'une certaine limite positive $+L$ font prendre à chaque fonction le même signe qu'à son premier terme : donc, à la seule inspection de la suite (x), on pourra connaître le nombre des variations de la suite (0) et aussi celui des variations de la suite $(+L)$. La différence entre ces deux nombres indiquera combien l'équation a de racines positives.

On découvre avec la même facilité combien elle a de racines négatives, en observant qu'au-delà d'une certaine limite $-L'$,

tous les nombres négatifs font acquérir à chaque fonction de la suite (x) le même signe qu'à son premier terme.

Pour plus decommodité, on prend $+\infty$ et $-\infty$ au lieu de $+L$ et $-L'$: c'est une manière abrégée de désigner deux nombres qui peuvent être aussi grands qu'on veut.

502. Comme les racines négatives deviennent positives en changeant x en $-x$, je ne parlerai plus que de ces dernières. Pour les séparer, on substituera, dans la suite (x), des nombres positifs croissans o, α, β, γ, etc. ; et, en notant le nombre des variations perdues à chaque substitution, on connaîtra le nombre des racines comprises entre o et α, entre α et β, etc. Ces substitutions devront être continuées jusqu'à ce qu'on trouve une suite dont les variations soient en même nombre que celles de la suite ($+\infty$). On n'ira pas plus loin : car il ne peut point y avoir de racines au-dessus du dernier nombre substitué.

Admettons qu'il y ait plusieurs racines entre α et β, on fera une ou plusieurs substitutions intermédiaires; et les variations que perdra la suite (x), après chaque substitution, indiqueront les racines comprises entre les nombres substitués. Il pourra se faire que quelques essais suffissent ainsi pour effectuer complétement la séparation des racines, c'est-à-dire, pour assigner à chacune d'elles deux limites entre lesquelles elle soit seule comprise. Mais quand deux ou plusieurs racines seront très-rapprochées, il sera nécessaire de multiplier beaucoup les substitutions pour les séparer ; et, comme l'équation n'a point de racines égales, on est sûr d'y parvenir toujours. La longuenr des calculs sera rachetée par l'avantage d'avoir ces racines avec une grande approximation.

503. La loi suivant laquelle croissent les nombres o, α, β, γ,... est arbitraire; mais il sera bien de commencer par les nombres o, 1, 10, 100, 1000, etc. A l'avantage de n'avoir que des calculs faciles, se joint celui de déterminer combien il y a de racines entre o et 1, entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc.

S'il y a des racines entre 1 et 10, on déterminera la partie entière de chacune en substituant les nombres 1, 2, 3,.... jusqu'à 10; s'il y a des racines entre 10 et 100, le chiffre des dixaines de chacune se connaîtra par la substitution des nombres 10, 20, 30,... jusqu'à 100; et ainsi de suite. Semblablement encore,

pour les racines moindres que 1, on connaîtrait le chiffre décimal de l'ordre le plus rapproché de la virgule, en substituant les nombres de 0,1 à 1, ou bien de 0,01 à 0,1 ; etc.

En procédant de cette manière, on obtient le chiffre de l'ordre le plus élevé contenu dans chaque racine : voici comment on obtiendra celui de l'ordre immédiatement inférieur. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse des racines comprises de 100 à 1000, et qu'on ait reconnu que quelques unes d'elles sont entre 300 et 400. Il est évident que la substitution des nombres 300, 310, 320,.... dans la suite (x) ferait découvrir le chiffre des dixaines ; mais, pour faciliter ces calculs, on changera d'abord x en $300+x'$, et on aura ainsi une nouvelle suite (x') dans laquelle il n'y aura plus qu'à substituer les nombres 0, 10, 20,....

Admettons maintenant qu'après la détermination des dixaines, on ait reconnu qu'il y a des racines entre 350 et 360. La substitution des nombres 350 et 351, 352,... dans la suite (x) ferait découvrir le chiffre des unités, mais ici encore on peut simplifier le calcul. Le changement de x en $300+x'$ a déjà transformé la suite (x) en une autre suite (x'). Or, celle-ci se transformera semblablement en une suite (x'') en y remplaçant x' par $50+x''$; et il est clair que si on met dans cette dernière les nombres 0, 1, 2,..., on aura les mêmes résultats qu'en substituant les nombres 50, 51, 52,... dans la suite (x'), ou les nombres 350, 351, 352,... dans la suite (x).

Rien n'empêche de continuer ces calculs pour connaître successivement les dixièmes, les centièmes, etc.; et, par cette voie, non-seulement on arrive à séparer les racines, mais encore à les calculer avec telle approximation qu'on voudra.

Si on voulait exprimer les racines en fractions continues, l'emploi du théorème de M. Sturm ne serait pas moins facile ; et je crois que des détails à ce sujet sont superflus.

504. Ce théorème donne aussi un moyen très-simple d'établir les conditions de la réalité des racines. Comme les racines réelles sont toutes comprises entre deux limites $-L'$ et $+L$, l'une négative et l'autre positive, qu'on peut choisir aussi grandes qu'on voudra, la question revient à chercher les conditions nécessaires pour que, de $x=-L'$ à $x=+L$, la suite X, X_1, X_2, etc., perde un nombre de variations égal au degré de l'équation.

En supposant ce degré égal à m, il faudra donc qu'elle perde m variations. Or, pour qu'elle ait m variations, il faut qu'elle ait au moins $m+1$ termes ; et comme elle ne peut pas en avoir davantage, on est sûr que les quantités X, X_1, X_2, etc., sont au nombre de $m+1$, et que par conséquent elles sont respectivement du degré m, $m-1$, $m-2$, etc. La dernière, qui ne contient plus x, sera alors représentée par X_m.

Lorsque, dans des polynômes en x, on substitue pour x de très-grands nombres, positifs ou négatifs, on sait que les résultats sont de mêmes signes que si chaque polynôme était réduit à son premier terme : ainsi, dans la recherche qui nous occupe, on ne doit faire attention qu'au premier terme de chaque polynôme. Prenons l'équation $X=0$ sous la forme ordinaire,

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{etc.}=0:$$

le premier terme de X sera x^m, et celui du polynôme dérivé X_1 sera mx^{m-1}. Quant à ceux des polynômes X_2, X_3, etc., ils sont des fonctions, qui se composent des coëfficiens P, Q, etc., et qui se déterminent par des divisions successives conformément à la règle. Représentons ces fonctions par G_2, G_3,... G_m, et écrivons par ordre les $m+1$ quantités

$$x^m,\ mx^{m-1},\ G_2x^{m-2},\ G_3x^{m-3},\ldots\ldots\ G_m.$$

La question sera réduite à chercher les conditions qui feront perdre m variations à cette suite lorsqu'on passera de $x=-L'$ à $x=+L$. Pour que cela soit, il faut qu'elle ait m variations après la substitution de $-L'$, et m permanences après celle de $+L$. Mais, d'un autre côté, dans cette suite les puissances de x vont en diminuant d'une unité ; par conséquent, si elle n'a que des permanences en faisant $x=+L$, elle n'aura que des variations en faisant $x=-L'$. Ainsi, les conditions cherchées se réduisent simplement à celles qui sont nécessaires pour que cette suite n'ait que des coefficiens positifs : c'est-à-dire à celles-ci, $G_2>0$, $G_3>0$,... $G_m>0$.

On voit que ces conditions ne seront jamais en plus grand nombre que $m-1$. Mais elles pourront être en nombre moindre, attendu que quelques-unes des inégalités ci-dessus peuvent rentrer dans les autres.

En se servant de l'équation aux carrés des différences, comme dans le n° 479, ou des dérivées successives, comme dans le n° 487, les conditions se présentaient au nombre de $\frac{1}{2}m(m-1)$, lequel est comme on voit beaucoup trop considérable. Le perfectionnement que le théorème de M. Sturm ajoute à cette partie importante de la théorie des équations sera sans doute apprécié des analystes.

505. Comme application, cherchons les conditions nécessaires pour la réalité des racines de l'équation

$$x^3+px+q=0.$$

Ici on a $m=3$, et les conditions sont seulement au nombre de deux, $G_2>0$ et $G_3>0$. Pour avoir G_2 et G_3, on calculera X_2 et X_3 par des divisions successives comme ci-dessous.

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
x^3+px+q & 3x^2+p \\ \cline{2-2}
3x^3+3px+3q & x \\
-3x^3-px & \\ \hline
+2px+3q & \\
-2px-3q &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
3x^2+p & -2px-3q \\ \cline{2-2}
12p^2x^2+4p^3 & -6px+9q \\
-12p^2x^2-18pqx & \\ \hline
-18pqx+4p^3 & \\
+18pqx+27q^2 & \\ \hline
4p^3+27q^2 & \\
-4p^3-27q^2 &
\end{array}$$

Pour éviter les dénominateurs, on a multiplié le dividende par 3 dans la première division, et par $4p^2$ dans la seconde. Les restes se trouvent ainsi multipliés par des facteurs positifs, ce qui est indifférent. On a d'ailleurs eu soin, conformément à la règle, de changer le signe du reste après chaque division. De cette manière, il vient

$$X_2=-2px-3q, \quad X_3=-4p^3-27q^2;$$

par conséquent les inégalités $G_2>0$, $G_3>0$, deviennent $-2p>0$, $-4p^3-27q^2>0$. Mais si on change les signes, et si on observe que la première est renfermée dans la deuxième, on n'aura plus que la condition déjà connue,

$$4p^3+27q^2<0.$$

CHAPITRE XX.

Abaissement des équations. Équations réciproques. Équations binômes.

Abaissement des équations lorsqu'on connaît quelque relation particulière entre les racines.

506. Une équation est toujours susceptible d'abaissement quand on connaît quelque relation particulière entre ses racines; mais dans tous ces cas on est ramené à cette question générale qu'il faut résoudre d'abord : *Comment peut-on reconnaître qu'une équation* $X=0$ *a des racines communes avec une autre* $Y=0$, *et comment alors peut-on en abaisser le degré?*

Supposons que l'inconnue soit représentée par x dans les deux équations. Puisqu'elles ont des racines communes $a, b, c, \ldots$, les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots$ doivent aussi leur être communs, et le produit de ces facteurs est le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres X et Y. On cherchera donc ce plus grand commun diviseur; et, en le désignant par D, les racines communes dont il s'agit seront celles de l'équation $D=0$. Si ensuite on divise X par D et qu'on appelle X_1 le quotient, les autres racines de l'équation $X=0$ seront celles de l'équation $X_1=0$.

Par exemple, soient les deux équations

$$x^4-15x^2+10x+24=0,$$
$$x^3+4x^2-4x-16=0.$$

En cherchant leur plus grand commun diviseur, on trouve x^2+2x-8. En conséquence on pose

$$x^2+2x-8=0,$$

et de là on tire les racines communes $x=2$, $x=-4$.

Pour avoir les autres racines de la première équation, on la divisera par x^2+2x-8, et il viendra celles-ci

$$x^2-2x-3=0,$$

d'où l'on tire $x=-1$, $x=3$.

507. Maintenant, montrons de quelle manière on abaisse le degré d'une équation quand il existe une relation particulière entre quelques unes de ses racines. Comme les généralités seraient trop difficiles à saisir, nous commencerons par un exemple fort simple.

On propose d'abaisser l'équation.... [1] $F(x)=0$, *dans laquelle on sait qu'il y a deux racines dont la somme est égale à une quantité connue* k.

Ces deux racines étant représentées par x et x', on devra avoir les trois équations

$$F(x)=0,\quad F(x')=0,\quad x+x'=k.$$

La dernière donne $x'=k-x$; et en substituant cette valeur dans la seconde, on aura deux équations en x qui devront avoir lieu en même temps, savoir :

[2] $$F(x)=0,\quad F(k-x)=0.$$

L'équation $F(k-x)=0$, considérée isolément, a pour racines toutes les quantités qui, étant retranchées de k, donnent pour reste une racine de $F(x)=0$; donc les deux équations [2] doivent avoir pour racines communes toutes celles de l'équation [1] qui, étant retranchées de k, reproduisent une racine de cette même équation. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur D de $F(x)$ et de $F(k-x)$; et toutes ces racines seront contenues dans l'équation $D=0$. On divisera ensuite l'équation [1] par D, et l'on aura celle qui doit renfermer les autres racines.

S'il y a véritablement dans l'équation [1] deux racines a et b telles qu'on ait $a+b=k$, on doit avoir également $k-a=b$ et $k-b=a$; par conséquent le diviseur commun D serait alors au moins du 2e degré. Il sera d'un degré supérieur lorsque, parmi les racines de l'équation [1], il y aura plusieurs manières d'en prendre deux dont la somme soit k. Il pourra aussi être du 1er degré, et ce cas arrive lorsqu'il y a dans l'équation une racine égale à $\frac{1}{2}k$.

Rien de si facile que de former *à priori* des exemples qui présentent ces différens cas. En voici dans lesquels $k=6$.

1°
$$F(x)=(x-2)(x-4)(x-5)^2(x-8)^2,$$
$$F(6-x)=(x-4)(x-2)(x-1)^2(x+2)^2,$$
$$D=(x-2)(x-4).$$

2°
$$F(x)=(x-2)(x-3)(x-4)^2(x-8)^2,$$
$$F(6-x)=(x-4)(x-3)(x-2)^2(x+2)^2,$$
$$D=(x-2)(x-3)(x-4).$$

3°
$$F(x)=(x-3)(x-4)(x-5)^2(x-8)^2,$$
$$F(6-x)=(x-3)(x-2)(x-1)^2(x+2)^2,$$
$$D=x-3.$$

Remarque. Lorsqu'il y a des racines égales à $\frac{1}{2}k$ dans l'équation $F(x)=0$, il est facile de le reconnaître en substituant $\frac{1}{2}k$ dans cette équation, et de supprimer ensuite ces racines au moyen de la division. Lorsque l'équation contient en outre d'autres racines égales entre elles, on sait comment on peut l'en débarrasser : de sorte que si, après ces simplifications, il existe dans l'équation des racines qui, étant soustraites de k, reproduisent des racines de cette équation, on sera certain qu'elles pourront être distribuées par couples a et b, c et d, etc. tels qu'on ait $a+b=k$, $c+d=k$, etc., etc.

508. Les explications précédentes ne souffriraient que de légères modifications, si au lieu de la somme de deux racines on supposait que c'est leur produit, ou leur différence, ou leur quotient, qui est égal à un nombre donné k.

On a vu que les équations qui renferment des racines égales pouvaient subir un abaissement considérable. Ce cas est celui de plusieurs racines qui ont entre elles une différence k qu'on ferait égale à zéro, ou un quotient k qu'on ferait égal à l'unité.

Si l'on veut considérer l'abaissement des équations sous le point de vue le plus général, il faudra supposer qu'il existe entre plusieurs racines d'une équation telles relations qu'on voudra. Il est facile de voir qu'alors on aura, entre ces racines inconnues, plus d'équations qu'il n'y a de ces racines, de sorte qu'on sera toujours ramené à reconnaître que plusieurs équations à une seule incon-

nue doivent avoir des racines communes. Mais pour arriver à ces équations l'emploi des méthodes d'élimination peut être nécessaire.

509. Il y a certains cas où l'abaissement ne peut s'opérer qu'à l'aide de procédés nouveaux. Afin de me faire mieux entendre, je reprends l'exemple du n° 507, dans lequel on doit avoir entre x et x' la relation $x+x'=k$; et, pour plus de netteté, je suppose qu'on ait effectué les simplifications dont il a été parlé dans la remarque. Soient alors

[3] $$F(x)=0, \quad F(k-x)=0,$$

les deux équations qui doivent avoir des racines communes.

Il peut arriver que toutes les racines de $F(x)=0$ se distribuent par couples, a et b, c et d, etc., pour chacun desquels on ait la même relation, $a+b=k$, $c+d=k$, etc. Dans ce cas. il est évident qu'en mettant successivement chaque racine a, b, c,... à la place de x dans la valeur $x'=k-x$, on retrouverait toutes ces mêmes racines, dans un ordre différent : de sorte que les deux équations [3] seraient identiques et l'abaissement n'aurait plus lieu. C'est ce qu'on voit dans l'exemple ci-dessous, où l'on suppose $k=6$:

$$F(x)=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5),$$
$$F(6-x)=(x-5)(x-4)(x-2)(x-1).$$

Cependant je vais montrer que l'équation proposée pourra s'abaisser à un degré moitié moindre, au moyen d'une inconnue auxiliaire z, choisie convenablement. La condition essentielle à remplir en choisissant cette inconnue, c'est qu'elle soit égale à une fonction tellement composée avec les deux racines x et x' d'une même couple, qu'on soit assuré d'avance que les différentes valeurs de z dépendent d'une équation de degré moindre que la proposée. Ce qu'il y a de plus simple sera de prendre pour inconnue la différence des deux racines x et x', ou mieux encore leur demi-différence, et de poser $x-x'=2z$. De cette manière, on est certain que chaque couple de racines donnera pour z deux valeurs égales et de signes contraires, savoir :

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}(a-b), \\ z=\frac{1}{2}(b-a); \end{cases} \quad \begin{cases} z=\frac{1}{2}(c-d), \\ z=\frac{1}{2}(d-c); \end{cases} \quad \text{etc.}$$

A la vérité, l'équation en z sera de même degré que $F(x)=0$, mais elle ne devra contenir que des puissances paires de z, et par

conséquent; en y regardant z^2 comme l'inconnue, elle sera d'un degré moitié moindre.

Quant à la manière d'avoir l'équation en z, rien de plus facile. On a ces trois équations

$$F(x)=0,\quad x+x'=k,\quad x-x'=2z.$$

Des deux dernières on tire

$$x=z+\tfrac{1}{2}k;$$

et, en substituant cette valeur dans lapremière, on a la transformée

$$F(z+\tfrac{1}{2}k)=0.$$

On peut aisément reconnaître *à posteriori* que cette transformation atteint véritablement le but qu'on se propose. Si on décompose $F(x)$ en ses facteurs simples, on aura

$$F(x)\quad=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$$
$$F(z+\tfrac{1}{2}k)=(z+\tfrac{1}{2}k-a)(z+\tfrac{1}{2}k-b)\ldots$$

Mais, par hypothèse, $k=a+b=c+d=\ldots$; donc

$$F(z+\tfrac{1}{2}k)=[z+\tfrac{1}{2}(a+b)-a][z+\tfrac{1}{2}(a+b)-b]\ldots$$
$$=[z+\tfrac{1}{2}(b-a)][z-\tfrac{1}{2}(b-a)]\ldots$$
$$=[z^2-\tfrac{1}{4}(b-a)^2]\ldots$$

On n'a mis ici en évidence que les deux facteurs correspondant à un couple de racines, mais cela suffit pour comprendre que l'équation en z ne contiendra que des puissances paires de z.

La transformation précédente n'est point la seule qu'on puisse employer avec succès. Par exemple, si on pose $z=xx'$, il est clair que les deux racines d'un même couple ne feront prendre qu'une seule valeur à z; et par conséquent la transformée sera de degré moitié moindre que $F(x)$. Par une raison semblable, on pourrait poser $z=x^2+x'^2$; et, en général, on peut faire l'inconnue auxiliaire égale à telle fonction de x et x' qu'on voudra, pourvu que cette fonction reste la même quand on y change ces deux racines l'une dans l'autre. Seulement, on ne devra pas recourir à la somme $x+x'$, qui est déjà connue.

Equations réciproques.

510. J'appliquerai ici les considérations précédentes à une

classe d'équations très-remarquables, et dont la forme même fait découvrir une relation entre leurs racines : je veux parler des *équations réciproques*. On nomme ainsi celles dont on reproduit toutes les racines, mais dans un ordre différent, en divisant successivement l'unité par chacune d'elles. Telle est évidemment l'équation

$$x^4+Px^3+Qx^2+Px+1=0:$$

car en changeant x en $\frac{1}{x}$ elle devient

$$\frac{1}{x^4}+\frac{P}{x^3}+\frac{Q}{x^2}+\frac{P}{x}+1=0;$$

et celle-ci, en la multipliant par x^4 et renversant l'ordre des termes, n'est autre que la proposée.

511. Avant tout, cherchons quelles relations doivent avoir entre eux les coefficiens d'une équation pour qu'elle soit réciproque. Soit d'abord une équation de degré impair

$$x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0.$$

Si on y remplace x par $\frac{1}{x}$, la transformée devra avoir les mêmes racines, et par conséquent, en la ramenant à la forme ordinaire $x^5+\text{etc.}=0$, elle devra être identique avec la proposée. Or, cette transformée est

$$x^5+\frac{S}{T}x^4+\frac{R}{T}x^3+\frac{Q}{T}x^2+\frac{P}{T}x+\frac{1}{T}=0;$$

donc, pour qu'elle soit identique avec la proposée, il faut qu'on ait

$$\frac{S}{T}=P,\ \frac{R}{T}=Q,\ \frac{Q}{T}=R,\ \frac{P}{T}=S,\ \ \frac{1}{T}=T.$$

La dernière égalité donne $T^2=1$, d'où $T=\pm1$; et par suite les autres s'accordent à donner

$$S=\pm P,\quad R=\pm Q.$$

L'équation proposée, pour être réciproque, doit donc avoir l'une de ces formes

[1] $$x^5+Px^4+Qx^3+Qx^2+Px+1=0,$$
[2] $$x^5+Px^4+Qx^3-Qx^2-Px-1=0.$$

Donc, *pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les termes à égale distance des extrêmes aient des coefficiens égaux et de même signe, ou égaux et de signe contraire.*

En second lieu, soit une équation de degré pair

$$x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Sx^2+Tx+U=0.$$

En changeant x en $\frac{1}{x}$, et en ramenant encore la transformée à la forme ordinaire, on trouve

$$x^6+\frac{T}{U}x^5+\frac{S}{U}x^4+\frac{R}{U}x^3+\frac{Q}{U}x^2+\frac{P}{U}x+\frac{1}{U}=0;$$

et, pour rendre cette équation identique avec la proposée, il faut poser les conditions

$$\frac{T}{U}=P,\ \frac{S}{U}=Q,\ \frac{R}{U}=R,\ \frac{Q}{U}=S,\ \frac{P}{U}=T,\ \frac{1}{U}=U.$$

De la dernière on tire $U=\pm 1$. Si l'on prend $U=+1$, les autres donnent

$$T=P,\quad S=Q,\quad R=R;$$

et, si on prend $U=-1$, elles donnent

$$T=-P,\quad S=-Q,\quad R=0.$$

Donc l'équation proposée doit avoir l'une de ces formes

$$[3]\qquad x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Qx^2+Px+1=0,$$
$$[4]\qquad x^6+Px^5+Qx^4-Qx^2-Px-1=0;$$

et toutefois il faut remarquer que rien ne s'oppose à ce que R soit zéro dans la première.

Ainsi, *pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, lorsque le terme du milieu ne manque pas, il faut et il suffit que les coefficiens à égale distance des extrêmes soient égaux et de même signe; et, lorsque le terme du milieu manque, il faut et il suffit que ces coefficiens soient égaux et de même signe, ou égaux et de signe contraire.*

512. Maintenant voyons comment s'abaissent les équations réciproques. Si on considère l'équation [1] et qu'on rapproche les

termes également éloignés des extrêmes, on peut l'écrire ainsi :

$$(x^5+1)+Px(x^3+1)+Qx^2(x+1)=0.$$

Alors on voit que $x=-1$ est une de ses racines ; et en divisant par $x+1$ chacun des binômes x^5+1, x^3+1, $x+1$, il vient

$$\left.\begin{array}{r}x^4-1\\+P\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^3+1\\-P\\+Q\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^2-1\\+P\end{array}\right|x+1=0,$$

équation qui est toujours réciproque, mais de même forme que l'équation [3].

Si on considère l'équation [2], on reconnaît que $x=1$ est une de ses racines. Pour faciliter la division par $x-1$, on l'écrira ainsi :

$$(x^5-1)+Px(x^3-1)+Qx^2(x-1)=0 ;$$

puis on trouvera facilement l'équation suivante, encore de même forme que l'équation [3] :

$$\left.\begin{array}{r}x^4+1\\+P\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^3+1\\+P\\+Q\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}x^2+1\\+P\end{array}\right|x+1=0.$$

Si on considère l'équation [4], on voit qu'elle admet $+1$ et -1 pour racines. Écrivons-la ainsi

$$(x^6-1)+Px(x^4-1)+Qx^2(x^2-1)=0 :$$

on aperçoit qu'en effet elle est divisible par x^2-1, et l'on a pour quotient une équation, encore de même forme que l'équation [3], savoir :

$$x^4+Px^3+(1+Q)x^2+Px+1=0.$$

Quoique nous n'ayons pris que des équations d'un degré déterminé, on n'en voit pas moins clairement qu'en simplifiant convenablement une équation réciproque quelconque, on la ramènera toujours à celles de la forme [3]. Par cette raison, la dénomination d'équation réciproque est plus spécialement appliquée à ces dernières, et c'est d'elles seules que nous avons à nous occuper.

513. Considérons d'une manière générale l'équation réciproque

$$[5] \quad x^{2m}+Px^{2m-1}+Qx^{2m-2}\ldots+Qx^2+Px+1=0.$$

Puisque toutes les racines doivent se reproduire en divisant l'unité successivement par chacune, on en conclut qu'elles peuvent se distribuer par couples tels que a et $\frac{1}{a}$, b et $\frac{1}{b}$, c et $\frac{1}{c}$, dans chacun desquels se trouvent deux racines dont le produit est l'unité. Par les considérations du n° 509 on pourra donc transformer l'équation en une autre de degré moitié moindre, au moyen d'une inconnue auxiliaire; et ce qu'il y a de plus simple sera de prendre

$$[6] \qquad x+\frac{1}{x}=z.$$

Il est d'ailleurs bien évident qu'en mettant chaque racine à son tour dans cette expression à la place de x, le nombre des différentes valeurs de z est égal à celui des couples; d'où il suit que l'équation en z doit être d'un degré moitié moindre que la proposée.

Pour former cette équation, il faut éliminer x entre [5] et [6], et l'on y parvient par un moyen aussi simple qu'élégant. En divisant par x^m et rapprochant les termes également distants des extrêmes, l'équation [5] devient

$$x^m+\frac{1}{x^m}+P\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+Q\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\dots=0;$$

par conséquent, il ne s'agit plus que d'exprimer en fonction de z les binômes

$$x^2+\frac{1}{x^2},\ x^3+\frac{1}{x^3},\ \dots x^m+\frac{1}{x^m}.$$

A cet effet, remarquons d'une manière générale qu'en multipliant $x^n+\frac{1}{x^n}$ par $x+\frac{1}{x}$, on a

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

et que de là on tire, en remplaçant $x+\frac{1}{x}$ par z,

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)z-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

ette formule résoudra la question, car elle montre comment chacun des binômes peut se déduire des deux précédens.

Si on fait successivement $n=1, 2, 3,\ldots$ on trouve, en partant de $x+\frac{1}{x}=z$,

$$x+\frac{1}{x}=z,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=z^5-5z^3+5z,$$

etc.

On reconnaît, à la forme de ces expressions, que la transformée en z sera en effet du degré m, ainsi qu'on l'avait prévu.

Quand on aura déterminé les valeurs de z, on trouvera les racines de la proposée, au moyen de l'équation [6]. Or, elle équivaut à celle-ci

$$x^2-zx+1=0, \quad \text{d'où} \quad x=\tfrac{1}{2}z\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z^2-4};$$

par conséquent, il n'y aura plus qu'à substituer successivement les m valeurs de z pour obtenir les $2m$ valeurs de x.

On trouve des exemples d'équations réciproques dans la résolution des équations binômes dont je vais m'occuper à présent.

Equations binômes.

514. Les équations binômes sont celles qu'on ramène à la forme

$$[1] \qquad x^m=A \quad \text{ou} \quad x^m-A=0,$$

A étant une quantité connue quelconque.

On aperçoit sur-le-champ qu'elles n'ont pas de racines égales, car le binôme x^m-A n'a aucun facteur commun avec sa fonction dérivée mx^{m-1}. Donc les m racines de cette équation sont différentes entre elles.

Ces racines étant élevées à la puissance m doivent reproduire A; donc elles sont les mêmes que les valeurs renfermées dans l'expression

$$x=\sqrt[m]{A}.$$

Ainsi, on est sûr que ce radical a m valeurs différentes, et la proposition admise nº 241 se trouve démontrée. On peut même ajouter que si A est une quantité de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, les valeurs du radical auront aussi cette forme : car on a prouvé (379) qu'elle est celle des racines de l'équation [1].

515. Lorsque m est un nombre composé, la résolution de l'équation [1] se ramène à celle de plusieurs équations binômes dont les degrés sont les facteurs de m. Supposons $m=pqr$: au lieu de l'équation $x^{pqr}=A$, on peut prendre celles-ci

$$x^p=x',\quad x'^q=x'',\quad x''^r=A,$$

dans lesquelles x' et x'' sont de nouvelles inconnues. Il est évident qu'après avoir résolu $x''^r=A$, l'équation précédente $x'^q=x''$ fera connaître les valeurs de x', et qu'ensuite l'équation $x^p=x'$ donnera toutes les racines de l'équation proposée.

Au reste, cette remarque revient à une formule déjà connue par la théorie des radicaux (253), savoir :

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{A}}}=\sqrt[pqr]{A}.$$

516. Désignons par a une quantité dont la puissance m est A, et posons $x=ay$. L'équation $x^m=A$ deviendra $a^my^m=a^m$, et en divisant par a^m,

$$y^m=1;$$

donc $y=\sqrt[m]{1}$, et par suite $x=a\sqrt[m]{1}$.

De là on conclut que les racines de l'équation $x^m=A$ peuvent se former en multipliant l'une quelconque d'entre elles par celles de l'équation $y^m=1$: ou bien encore, comme au nº 242, que les différentes racines m^{emes} d'une quantité peuvent s'obtenir en multipliant l'une d'elles par les racines m^{emes} de l'unité.

517. Considérons plus spécialement le cas où A est une quantité réelle, et, pour distinguer les hypothèses de A positif ou négatif, écrivons l'équation binôme comme il suit :

$$x^m = \pm A.$$

On sait déterminer, au moins par approximation, une quantité positive a telle qu'on ait $a^m = A$. Posons encore $x = ay$, l'équation ci-dessus deviendra

$$y^m = \pm 1,$$

et c'est de celle-ci que je m'occuperai exclusivement.

518. On peut, sur cette équation, faire les remarques suivantes :

Lorsque m est impair et que l'équation est $y^m = 1$ ou $y^m - 1 = 0$, elle admet évidemment la racine $y = 1$. Elle n'a pas d'autre racine réelle; car toute autre valeur positive de y donnerait $y^m > 1$ ou $y^m < 1$, et une valeur négative rendrait y^m négatif. Pour avoir l'équation d'où dépendent les $m - 1$ racines imaginaires, on divisera $y^m - 1$ par $y - 1$, et il viendra

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + y + 1 = 0,$$

équation qui appartient à la classe de celles qu'on nomme *réciproques*.

Lorque m est impair et que l'équation est $y^m = -1$, elle a évidemment pour racine $y = -1$. Des raisonnemens analogues aux précédens prouveraient que les autres racines sont imaginaires; et on aurait l'équation dont elles dépendent en divisant $y^m + 1 = 0$ par $y + 1$. Mais, pour avoir toutes les racines de l'équation $y^m = -1$, il est plus simple de remarquer que cette équation se déduit de l'équation $y^m = 1$ en changeant y en $-y$; de sorte qu'il suffira de prendre toutes les racines de $y^m = 1$ avec des signes contraires.

Supposons m pair, et soit $m = 2n$: l'équation $y^{2n} = 1$ ou $y^{2n} - 1 = 0$ a pour racines $y = +1$ et $y = -1$. Les autres sont imaginaires, et l'équation qui les renferme s'obtiendrait en divisant $y^{2n} - 1 = 0$ par $(y - 1)(y + 1)$ ou $y^2 - 1$; mais il sera mieux

d'observer que $y^{2n}-1=(y^n-1)(y^n+1)$, et que par suite l'équation $y^{2n}-1=0$ peut être remplacée par ces deux autres, qui sont plus simples,

$$y^n-1=0, \quad y^n+1=0.$$

Enfin, lorsque l'équation est $y^{2n}=-1$ ou $y^{2n}+1=0$, on remarquera que les puissances paires des quantités réelles donnent toujours des résultats réels, et de là on conclura que toutes les racines sont imaginaires. En posant $y^2=z$, l'équation s'abaisse au degré n et devient simplement $z^n=1$.

519. Maintenant je vais développer les solutions des équations $y^m-1=0$ et $y^m+1=0$ dans quelques cas particuliers.

Soit $m=2$: les équations à résoudre sont

$$y^2-1=0 \quad \text{d'où} \quad y=\pm 1,$$
$$y^2+1=0 \quad \text{d'où} \quad y=\pm\sqrt{-1}.$$

Soit $m=3$: pour résoudre l'équation

$$y^3-1=0,$$

on remarque d'abord qu'elle a pour racine $y=1$; alors on la divise par $y-1$, et il vient

$$y^2+y+1=0, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Donc les trois racines sont, comme on le savait déjà (242),

$$y=1, \quad y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

S'il s'agit de l'équation

$$y^3+1=0,$$

on observera qu'elles sont les mêmes, au signe près, que celles de l'équation $y^3-1=0$; et en conséquence elles seront

$$y=-1, \quad y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Soit $m=4$: l'équation

$$y^4-1=0$$

se décomposera en deux autres

$$y^2-1=0,\quad y^2+1=0;$$

et de celles-ci on tirera les quatre racines

$$y=\pm 1,\quad y=\pm\sqrt{-1}.$$

L'équation

$$y^4+1=0,$$

se résoudra différemment. En ajoutant $2y^2$ aux deux membres, on l'écrira ainsi

$$(y^2+1)^2=2y^2;$$

puis on la décomposera en deux autres,

$$y^2+1=y\sqrt{2},\quad y^2+1=-y\sqrt{2};$$

et enfin, de celles-ci on tire les quatre valeurs de y,

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\quad y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

On aurait pu traiter l'équation $y^4+1=0$ comme équation réciproque. On aurait pu encore remarquer qu'elle donne $y^2=\pm\sqrt{-1}$, et qu'en prenant successivement $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, on a

$$y=\pm\sqrt{+\sqrt{-1}}\quad \text{et}\quad y=\pm\sqrt{-\sqrt{-1}}:$$

alors il n'y aurait plus qu'à ramener ces valeurs à la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et c'est ce qui a déjà été fait n° 197.

En s'élevant aux degrés suivans, jusqu'au 10e inclusivement, on reconnaîtra que l'équation $y^m\mp 1=0$, se résout par les cas précédens, ou par des équations réciproques qui s'abaissent à un degré moindre que le 5e. Parcourons d'abord les degrés impairs.

Si on a l'équation

$$y^5-1=0,$$

après avoir remarqué qu'elle admet la racine $y=1$, on la divise par $y-1$, et il vient

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0,$$

équation réciproque qu'on abaissera au 2e degré. A cet effet on l'écrit d'abord sous cette forme

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Alors on pose

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

ce qui donne $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$; et par suite l'équation en y se changera en celle-ci

$$z^2+z-1=0,\quad \text{d'où}\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ces valeurs étant connues, celles de y le seront par la relation $y+\frac{1}{y}=z$. En effet cette relation donne

$$y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2},$$

et il n'y a plus qu'à substituer, au lieu de z, successivement chacune de ses deux valeurs, pour trouver les quatre valeurs imaginaires de y. En y joignant la valeur $y=1$, on aura donc les cinq racines de l'équation $y^5-1=0$, savoir :

$$y=1,$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},$$

$$y=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}.$$

L'équation $y^7-1=0$, exigerait la résolution de l'équation $z^3+z^2-2z-1=0$; et l'équation $y^9-1=0$, celle de l'équation $z^4+z^3-3z^2-2z+1=0$.

Les équations $y^5+1=0$, $y^7+1=0$, $y^9+1=0$, ont les mêmes racines que les précédentes, au signe près.

Parcourons les degrés pairs. Les équations $y^6-1=0$, $y^8-1=0$, $y^{10}-1=0$, n'offrent aucune difficulté, puisque chacune d'elles se décompose en deux autres dont les racines sont connues.

En prenant $+1$ au lieu de -1, les équations analogues sont

$$y^6+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[3]{-1}};$$
$$y^8+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[4]{-1}};$$
$$y^{10}+1=0,\quad \text{d'où}\quad y=\sqrt{\sqrt[5]{-1}}.$$

Or, on connaît les valeurs de $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$; il n'y aurait donc plus qu'à en extraire les racines carrées par les procédés du n° 197. Mais il sera plus simple de traiter ces équations comme réciproques : car les transformés en z, dont elles dépendent, ont leurs racines réelles et sont très-faciles à résoudre.

520. Les équations en z du 3ᵉ et du 4ᵉ degrés auxquelles conduisent les équations $y^7-1=0$ et $y^9-1=0$ sont complètes, et nous donnerons plus tard des méthodes pour résoudre les équations générales de ces deux degrés. Pour le moment, je me bornerai à remarquer que ces méthodes étant connues depuis long-temps, la résolution de l'équation $y^m\mp 1=0$ l'était aussi pour les 10 premiers degrés. Dans les degrés supérieurs on pouvait bien encore, d'après la remarque du n° 515, regarder comme résolus ceux dont les exposans sont des nombres composés des facteurs premiers 2, 3, 5, 7. Mais, quand on passait à l'équation $y^{11}-1=0$, tout ce qu'on pouvait faire était de la ramener à une transformée du 5ᵉ degré, qui était complète aussi, et qu'on ne savait pas résoudre (*).

On en était là lorsque VANDERMONDE donna l'expression de la racine de cette équation $y^{11}-1=0$, à la suite d'un beau mémoire sur la résolution générale des équations, imprimé parmi ceux de l'académie des sciences, année 1771. Mais elle n'était présentée que comme un résultat de sa méthode générale, et elle est restée long-temps ignorée. Elle l'était encore en 1801, époque où GAUSS publia un procédé aussi original qu'ingénieux pour résoudre tous les cas de l'équation $y^m-1=0$. Plus tard, ce procédé a encore été perfectionné par LAGRANGE, et c'est dans cet auteur qu'il convient de l'étudier aujourd'hui, *Résolut. des*

(*) Pour la règle de M. STURM, on reconnaît facilement que toutes les racines de ces transformées en z sont réelles.

équat. num. NOTE XIV. Au reste, les expressions qu'il fournit pour les racines sont en général peu utiles à cause des imaginaires qui les compliquent ; et quand on veut les obtenir sous la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, il vaut mieux recourir à d'autres procédés, fondés sur les propriétés des lignes trigonométriques. Voyez ma trigonométrie, p. 100.

521. J'exposerai encore ici une propriété des racines de l'unité, qui est fort curieuse par elle-même et dont les analystes font un usage très-fréquent. Elle a déjà été remarquée pour le 3e degré (243), et elle consiste en ce qu'*on peut, dans chaque degré, reproduire toutes les racines de l'unité par les puissances d'une des racines imaginaires.*

Reprenons l'équation

$$[2] \qquad y^m-1=0,$$

et supposons d'abord que m soit un nombre premier. Soit α l'une quelconque des racines imaginaires de cette équation, on devra avoir $\alpha^m=1$; par conséquent, en désignant par n un nombre entier quelconque positif ou négatif, on aura

$$\alpha^{mn}=1 \quad \text{ou} \quad (\alpha^n)^m=1 :$$

donc toutes les puissances de α satisfont à l'équation [2].

Il n'en résulte pas cependant plus de m valeurs pour y : car de $\alpha^m=1$ on conclut

$$\alpha^{m+1}=\alpha, \quad \alpha^{m+2}=\alpha^2, \quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire qu'on n'obtient plus de nouvelle racine au-delà de α^m. Il en serait encore de même si on prenait des puissances négatives : car on a

$$\alpha^{m-1}=\alpha^m\times\alpha^{-1}=\alpha^{-1}, \quad \alpha^{m-2}=\alpha^m\times\alpha^{-2}=\alpha^{-2}, \quad \text{etc.}$$

D'un autre côté, il sera facile de prouver que si m est un nombre premier, les m quantités $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ldots\alpha^{m-1}$ sont inégales. En effet, admettons pour un moment que, n et $n+r$ étant deux nombres moindres que m, on puisse avoir $\alpha^{n+r}=\alpha^n$. On en déduirait $\alpha^r=1$; donc α serait une racine commune aux deux équations

$$y^r-1=0, \quad y^m-1=0.$$

Or cela est impossible quand m est un nombre premier : car on trouve alors que leur plus grand commun diviseur est seulement $y-1$. Donc aussi alors toutes les racines de l'équation [1] sont représentées par la suite

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{m-1}.$$

La même propriété s'étend aussi aux cas où l'exposant m est un nombre composé, mais alors il faut faire un choix parmi les racines imaginaires de l'équation, pour en avoir une dont les puissances reproduisent toutes les autres racines. Pour ces détails je renverrai encore à *la résolut. des éq. num.* NOTE XIII.

CHAPITRE XXI.

Fonctions symétriques.

Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation.

522. Il existe certaines fonctions des racines qu'on sait exprimer d'une manière générale au moyen des coefficiens des équations, sans qu'on ait besoin pour cela de résoudre ces équations. Les fonctions dont il s'agit, et qui forment une classe très-étendue, sont désignées par la dénomination de *fonctions rationnelles et symétriques*; ou, plus simplement, par celle de *fonctions symétriques*.

Elles sont dites *rationnelles*, parce que les racines ne doivent y entrer ni sous des radicaux ni avec des exposans fractionnaires, c'est-à-dire qu'elles n'y sont combinées que par addition, soustraction, multiplication et division; et elles sont dites *symétri-*

ques, parce que les racines doivent y être combinées de telle sorte qu'on puisse les échanger entre elles, suivant tel ordre qu'on voudra, sans que la fonction change.

Par exemple, les expressions

$$a^2+b^2+c^2, \quad \frac{ab}{2c^2}+\frac{ac}{2b^2}+\frac{bc}{2a^2}-3abc,$$

sont des fonctions de a, b, c, tout à la fois rationnelles et symétriques. La première est entière, et la seconde est fractionnaire.

523. Plusieurs quantités a, b, c, d, etc. étant données, si on les arrange deux à deux de toutes les manières possibles, et que dans chaque arrangement tel que ab on donne l'exposant α au premier facteur, et l'exposant β au second, on aura une suite de produits de la forme $a^\alpha b^\beta$ et dont la somme est évidemment une fonction symétrique des quantités a, b, c, d, etc. On dit en outre que cette fonction est *double* parce que chaque terme renferme deux de ces quantités, et on la représente d'une manière abrégée par $S(a^\alpha b^\beta)$. La lettre initiale S est ici employée pour désigner le mot *somme*. On comprend de même ce que doivent être les fonctions symétriques *triples*, *quadruples*, etc. représentées par $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta)$, etc.

Suivant cette notation, les fonctions *simples*, telles que $a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha+$ etc. seraient représentées par $S(a^\alpha)$; mais, pour abréger davantage, on écrit ordinairement S_α. Ainsi, on a

$$S_1 = a+b+c+\text{etc.},$$
$$S_2 = a^2+b^2+c^2+\text{etc.},$$
$$S_3 = a^3+b^3+c^3+\text{etc.},$$
etc.

La notation dont on vient de parler ne se rapporte qu'aux fonctions symétriques entières. Quand elles sont fractionnaires, on commence par les réduire au même dénominateur, et alors on a une fraction dont les deux termes sont des fonctions symétriques et entières. C'est pourquoi nous n'aurons à nous occuper que de ces dernières.

524. La première question à résoudre sera celle-ci : *Une équa-*

tion étant donnée, trouver les sommes S_1, S_2, etc. des puissances semblables et entières de ses racines.

Soit l'équation $X=0$ ou

$$[A] \qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots+Tx+U=0,$$

dont je désigne les m racines par a, b, c, d,.... On a trouvé n° 380 le quotient de X par $x-a$, et on peut avoir de même les quotiens de X par chacun des autres facteurs $x-b$, $x-c$, etc. Or, en ajoutant ces m quotiens, on sait que la somme doit être égale au polynôme dérivé X' ou

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}+(m-3)Rx^{m-4}\ldots+T:$$

il faudra donc que les multiplicateurs des mêmes puissances de x soient égaux de part et d'autre, et de là résulte la détermination des sommes demandées.

Reprenons donc le quotient de X par $x-a$,

$$\frac{X}{x-a} = \begin{array}{r|r|r|r} x^{-1}+\ a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}\ldots+a^{m-1} \\ +P & +Pa & +Pa^2 & +Pa^{m-2} \\ & +Q & +Qa & +Qa^{m-3} \\ & & +R & +Ra^{m-4} \\ & & & \ldots\ldots\ldots \\ & & & +T. \end{array}$$

Pour avoir les autres quotiens, il suffira de changer successivement dans celui-ci a en b, en c, en d, etc. Si on les ajoute et qu'on mette S_1, S_2, S_3, etc. au lieu des sommes $a+b+c\ldots$, $a^2+b^2+c^2\ldots$, $a^3+b^3+c^3\ldots$, il vient

$$\begin{array}{r|r|r|r} mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}\ldots+S_{m-1} \\ +mP & +PS_1 & +PS_2 & +PS_{m-2} \\ & +mQ & +QS_1 & +QS_{m-3} \\ & & +mR & +RS_{m-4} \\ & & & \ldots\ldots\ldots \\ & & & +mT. \end{array}$$

Donc, en comparant ce résultat avec le polynôme dérivé X', on doit avoir ces relations:

$$S_1+mP=(m-1)P,$$
$$S_2+PS_1+mQ=(m-2)Q,$$
$$S_3+PS_2+QS_1+mR=(m-3)R,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{m-1}+PS_{m-2}+QS_{m-3}\ldots+mT=T,$$

ou, en simplifiant,

$$[B]\quad\left\{\begin{array}{l} S_1+P=0, \\ S_2+PS_1+2Q=0, \\ S_3+PS_2+QS_1+3R=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1}+PS_{m-2}+QS_{m-3}\ldots+(m-1)T=0. \end{array}\right.$$

Au moyen de ces équations, il sera facile de calculer successivement S_1, S_2, S_3, ... et enfin S_{m-1}.

Ces déterminations s'arrêtent à la somme S_{m-1}, mais il est facile de s'élever aux sommes S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc. A cet effet, observons qu'en substituant successivement a, b, c, ... dans l'équation [A], on doit avoir

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots+Ta+U=0,$$
$$b^m+Pb^{m-1}+Qb^{m-2}\ldots+Tb+U=0,$$
etc.,

multiplions ces m égalités respectivement par a^n, b^n, etc., puis ajoutons-les: d'après la notation adoptée, il viendra

$$S_{m+n}+PS_{m+n-1}+QS_{m+n-2}\ldots+TS_{n+1}+US_n=0.$$

On peut faire successivement $n=0, 1, 2$, etc., et l'on aura, pour déterminer S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc., ces relations :

$$[C]\quad\left\{\begin{array}{l} S_m\quad+PS_{m-1}+QS_{m-2}\ldots+TS_1+US_0=0, \\ S_{m+1}+PS_m\quad+QS_{m-1}\ldots+TS_2+US_1=0, \\ S_{m+2}+PS_{m+1}+QS_m\quad\ldots+TS_3+US_2=0, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Dans la première de ces relations on peut remplacer le terme US_0 par mU, car $S_0=a^0+b^0+c^0+\text{etc.}=m$; et alors on voit qu'elle est comprise dans la même loi que les équations [B]. Cette

relation fera trouver S_m au moyen des sommes $S_1, S_2, \ldots S_{m-1}$ déjà connues ; et en passant successivement à chacune des relations suivantes, on déterminera chaque somme nouvelle au moyen de sommes déjà calculées.

Il n'est pas inutile d'observer ici que toutes les sommes S_1, S_2, S_3, etc., seront exprimées en fonctions entières des coefficiens P, Q, R, etc. Cette conséquence résulte de ce que le premier terme, dans chacune des relations [B] et [C], a l'unité pour coefficient.

Pour présenter une application numérique, prenons l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Dans cet exemple on a

$$P = 0, \quad Q = -7, \quad R = 7.$$

Puisque $P = 0$, la relation $S_1 + P = 0$ donne $S_1 = 0$; par suite les relations qui déterminent les sommes $S_1, S_2, \ldots S_6$ se réduisent à celles-ci,

$$S_1 = 0, \qquad S_2 + 2Q = 0, \qquad S_3 + 3R = 0,$$
$$S_4 + QS_2 = 0, \quad S_5 + QS_3 + RS_2 = 0, \quad S_6 + QS_4 + RS_3 = 0;$$

et en substituant les valeurs de Q et de R, on trouve facilement

$$S_1 = 0, \ S_2 = 14, \ S_3 = -21, \ S_4 = 98, \ S_5 = -245, \ S_6 = 833.$$

525 *Remarque*. Dans l'équation $S_{m+n} + \text{etc.} = 0$ trouvée plus haut, n peut être un nombre négatif, et par suite cette équation peut déterminer les sommes des puissances négatives des racines. Ainsi, en faisant $n = -1, -2$, etc., on aura

$$S_{m-1} + PS_{m-2} \ldots + TS_0 + US_{-1} = 0,$$
$$S_{m-2} + PS_{m-3} \ldots + TS_{-1} + US_{-2} = 0,$$
etc.

équations qui feront connaître successivement S_{-1}, S_{-2}, etc.

Mais il sera plus simple de changer x en $\frac{1}{x}$ dans l'équation proposée [A], et de chercher ensuite, au moyen des formules [B] et [C], les sommes des puissances positives des racines de la transformée. Il est clair en effet que ces puissances sont les puissances négatives de $a, b, c, \ldots$

simplicité, mais peut-être a-t-elle le défaut de n'être point assez directe. En voici une autre, dont je suis redevable à une communication obligeante de M. POULLET-DELISLE, et qui est à l'abri de ce reproche.

Les racines de l'équation donnée seront toujours représentées par a, b, c, etc., et l'équation elle-même par

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + U = 0.$$

Pour obtenir la somme $S(a^n)$ au moyen de $S(a^{n-1})$, multiplions $S(a^{n-1})$ par $S(a)$ ou $-P$, on aura deux espèces de termes, savoir: ceux de la forme a^n, et ceux de la forme $a^{n-1}b$. Si on suppose $n-1>1$ ou $n>2$, tous les termes de chaque groupe seront différens entre eux, et l'on aura

$$S(a^{n-1})S(a) = S(a^n) + S(a^{n-1}b);$$

donc, en transposant et observant que $S(a) = -P$,

$$[1] \qquad S(a^n) + PS(a^{n-1}) + S(a^{n-1}b) = 0.$$

Si $n=2$, il est facile de voir que $S(a^{n-1}b) = 2S(ab) = 2Q$, et par suite la relation ci-dessus ferait connaître $S(a^2)$ ou S_2.

Laissons n quelconque, et pour venir à $S(a^{n-1}b)$ multiplions $S(a^{n-2})$ par $S(ab)$ ou Q. On trouvera encore deux sortes de termes, les uns de la forme $a^{n-1}b$, et les autres de la forme $a^{n-2}bc$: de sorte qu'on aura

$$S(a^{n-2})\,S(ab) = (Sa^{n-1}b) + S(a^{n-2}bc).$$

Donc, en transposant et observant que $S(ab) = Q$, il vient

$$S(a^{n-1}b) = QS(a^{n-2}) - S(a^{n-2}bc),$$

et par conséquent, en substisuant dans [1],

$$[2] \qquad S(a^n) + PS(a^{n-1}) + QS(a^{n-2}) - S(a^{n-2}bc) = 0.$$

Cette relation donnera $S(a^3)$ au moyen de $S(a)$ et $S(a^2)$: car si $n=3$, on a $S(a^{n-2}bc) = 3S(abc) = -3R$.

Soit $n>3$, on peut décomposer $S(a^{n-2}bc)$ en deux parties comme on l'a fait pour $S(a^{n-1}b)$; et en continuant ainsi on arrivera,

lorsque n ne surpasse point le degré m, à une équation telle que celle-ci

$$[3] \quad S(a^n)+PS(a^{n-1})+QS(a^{n-2})\ldots\pm S(a^2bc\ldots f),$$

dans laquelle chaque terme de la somme $S(a^2bc\ldots f)$ renferme le carré d'une racine combinée avec $n-2$ autres racines. Le signe supérieur a lieu pour n impair, et le signe inférieur pour n pair.

Alors il ne restera plus qu'à opérer la décomposition de cette somme. A cet effet, on multipliera $S(a)$ par la somme $S(abc\ldots f)$ des produits $n-1$ à $n-1$ des racines. Or, en effectuant cette multiplication, tous les termes de la forme $a^2bc\ldots f$ seront différens entre eux; mais il est évident que chaque produit de n lettres se trouvera répété n fois; donc, en désignant par $S(abc\ldots fg)$ la somme des produits n à n, il viendra

$$S(a)S(abc\ldots f)=S(a^2bc\ldots f)+nS(abc\ldots fg).$$

Nommons M et N les coefficiens de x^{m-n+1} et de x^{m-n} dans l'équation proposée: suivant que n est impair ou pair, on sait qu'on a

$$S(abc\ldots f)=\pm M, \quad S(abc\ldots fg)=\mp N;$$

donc, pour la dernière décomposition, on aura

$$S(a^2bc\ldots f)=\pm MS(a)\pm nN.$$

En substituant cette valeur dans [3], on trouvera, sans aucune ambiguité de signes,

$$S(a^n)+PS(a^{n-1})+QS(a^{n-2})\ldots+MS(a)+nN=0,$$

ou plus simplement, en mettant S_1, S_2, etc. au lieu de $S(a)$, $S(a^2)$, etc.

$$[4] \quad S_n+PS_{n-1}+QS_{n-2},\ldots+MS_1+nN=0.$$

Quand on applique cette équation, il ne faut pas oublier que N est le coefficient du terme en x^{m-n}; de sorte que si on fait successivement $n=1, 2, 3,\ldots$ on devra prendre $N=P, Q, R,\ldots$ On trouvera ainsi les équations qui servent à déterminer les m sommes S_1, S_2, $\ldots S_m$.

Pour avoir les sommes ultérieures, on peut facilement modifier

la fin des raisonnnemens ci-dessus de manière qu'elle s'adapte à la supposition de $n > m$; mais le procédé qui a été suivi n° 524, pour parvenir aux équations [C], est préférable.

Application des fonctions symétriques à la transformation des équations.

530. Les fonctions symétriques se présentent d'elles-mêmes dans la transformation des équations, toutes les fois que les racines de la transformée doivent être des fonctions *rationnelles* des racines de l'équation donnée.

Soient toujours a, b, c,... les racines de l'équation donnée: pour fixer les idées, je suppose qu'il n'entre que deux de ces racines dans la composition de chaque racine de la transformée, et je représente par $F(a,b)$ la fonction rationnelle qui exprime la loi de cette composition. Imaginons qu'après avoir fait tous les arrangemens deux à deux de a, b, c,..., on mette successivement dans $F(a,b)$, au lieu de a et b, les deux racines de chaque arrangement; il est clair qu'on aurait ainsi toutes les racines de la transformée, savoir :

$$F(a,b),\ F(a,c),\ldots,\ F(b,a),\ F(b,c),\ldots,\ \text{etc.}$$

Par conséquent, cette équation, décomposée en facteurs, serait

$$[z-F(a\ b)]\,[z-F(a,c)]\ldots = 0.$$

Ce produit ne varie pas en faisant entre a, b; c,... tel échange qu'on voudra, car alors les facteurs ne font que se placer dans un autre ordre : on est donc sûr qu'après la multiplication, les coefficiens des différentes puissances de z seront des fonctions symétriques et rationnelles de a, b, c,... Ainsi, en se servant des procédés expliqués dans ce chapitre, on pourra exprimer ces coefficiens au moyen de ceux de la proposée.

531. Voici maintenant une autre manière d'employer les fonctions symétriques, qui sera souvent préférable. Elle est fondée sur cette observation très-simple que les relations [B] et [C] trouvées n° 524, entre les coefficiens d'une équation et les sommes des puissances semblables des racines, peuvent servir à découvrir les

coefficiens de l'équation, quand ils sont inconnus, pourvu qu'on connaisse ces différentes sommes jusqu'à celle des puissances dont l'ordre est marqué par le nombre des coefficiens inconnus, c'est-à-dire, par le degré de l'équation.

En conséquence, pour arriver à la transformée, on déterminera d'abord à quel degré elle doit s'élever; ensuite, on cherchera les sommes des puissances premières, secondes, etc., de ses racines jusqu'aux puissances dont l'ordre est égal au degré de cette transformée; puis, à l'aide de ces sommes, on calculera les coefficiens inconnus. Et quant à ces différentes sommes, il est manifeste qu'elles sont des fonctions symétriques des racines de la proposée, et qu'elles peuvent s'exprimer par les coefficiens de cette équation.

532. Comme exemple, je reprendrai ici l'importante question de l'équation aux carrés des différences, déjà traitée n° 427. Les fonctions symétriques en donnent la solution la plus simple et la plus élégante dont elle soit susceptible. La question est celle-ci:

Trouver l'équation dont les racines sont les carrés des différences de celles d'une équation donnée

$$[A] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots = 0.$$

Représentons l'équation cherchée par

$$[B] \qquad z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} \ldots + tz + u = 0.$$

Les m racines de [A] étant a, b, c,... celles de [B] seront

$$(a-b)^2, (a-c)^2, (a-d)^2, \ldots, (b-c)^2, (b-d)^2, \ldots, (c-d^2), \ldots, \text{ etc.}$$

Le nombre de ces carrés est évidemment celui des combinaisons deux à deux qu'on peut faire avec les m quantités a, b, c, etc.; donc le degré de l'équation cherchée sera

$$n = \tfrac{1}{2}m(m-1).$$

Les coefficiens p, q, r,... seront faciles à trouver quand on connaîtra les sommes des puissances semblables et entières des racines de l'équation [B], depuis la somme des premières puissances jusqu'à celle des puissances n^{emes}. Désignons donc par f_1, f_2, f_3, etc. ces nouvelles sommes, et cherchons la valeur générale de f_α, α étant un nombre quelconque, entier et positif.

Les racines de cette équation sont les carrés $(a-b)^2$, etc., rapportés plus haut; donc en les élevant à la puissance α, on a

$$\int_\alpha = (a-b)^{2\alpha} + (a-c)^{2\alpha} + (a-d)^{2\alpha} \ldots + (b-c)^{2\alpha} + \text{etc.}$$

Pour trouver cette somme, considérons l'expression

$$\varphi(x) = (x-a)^{2\alpha} + (x-b)^{2\alpha} + (x-c)^{2\alpha} + \text{etc.},$$

qui comprend les m binômes $x-a, x-b, x-c$, etc. Si on y fait successivement $x=a$, b, c, etc., et qu'on ajoute les m résultats, il vient évidemment

$$2\int_\alpha = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \text{etc.}$$

Or, si on développe les puissances qui composent $\varphi(x)$, on trouve

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{2\alpha} - 2\alpha a x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} a^2 x^{2\alpha-2} \ldots + a^{2\alpha} \\ + x^{2\alpha} - 2\alpha b x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} b^2 x^{2\alpha-2} \ldots + b^{2\alpha} \\ + \text{etc.}, \end{cases}$$

ou plus simplement, en se servant de la notation S_1, S_2, etc.,

$$\varphi(x) = mx^{2\alpha} - 2\alpha S_1 x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 x^{2\alpha-2} \ldots + S_{2\alpha};$$

donc, en substituant successivement a, b, c,... au lieu de x, et ajoutant les résultats, il viendra

$$2\int_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{2\alpha-2} \ldots + mS_{2\alpha}.$$

Dans le second membre, il est aisé de reconnaître que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux; par conséquent, en s'arrêtant au terme du milieu, et ne prenant que la moitié de ce terme, on aura la valeur générale de $\int_\alpha$, savoir :

$$\int_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{2\alpha-2} \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{1}{2} \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\ldots(\alpha+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \alpha} S_\alpha S_\alpha.$$

Comme les signes sont alternativement + et —, il n'y aura jamais d'incertitude sur le dernier.

Voici maintenant les opérations qui sont à effectuer :

1° On calculera les sommes S_1, S_2, S_3, ... jusqu'à S_{2n} par les relations connues

$$S_1 + P = 0, \quad S_2 + PS_1 + 2Q = 0, \quad \text{etc.};$$

2° Dans la formule qui exprime $\int_\alpha$, on fera successivement $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ jusqu'à n, et on aura ainsi, pour déterminer les n sommes $\int_1, \int_2, \ldots \int_n$,

$$\int_1 = mS_2 - S_1S_1, \quad \int_2 = mS_4 - 4S_1S_3 + 3S_2S_2, \text{ etc.}$$

3° Enfin les relations qui existent entre ces n sommes et les n coefficiens $p, q, r, \ldots$ donneront les valeurs de ces coefficiens, savoir :

$$p = -\int_1, \quad q = -\tfrac{1}{2}(\int_2 + p\int_1), \quad r = -\tfrac{1}{3}(\int_3 + p\int_2 + q\int_1), \text{ etc.}$$

533. Une marche tout-à-fait analogue à celle qu'on a suivie pour trouver l'équation aux carrés des différences peut encore être employée dans un grand nombre de cas, et notamment dans ceux où les racines de la transformée devraient être des puissances semblables et entières de la différence, de la somme, du produit ou du quotient de deux racines quelconques de l'équation donnée.

Par exemple, supposons que chaque nouvelle racine soit la puissance k de la somme $a+b$ de deux racines de l'équation [A]. En posant $n = \frac{1}{2}m(m-1)$, la transformée devra être de la forme

$$\text{[C]} \qquad z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0;$$

et si on fait

$$\int_\alpha = (a+b)^{k\alpha} + (a+c)^{k\alpha} \ldots + (b+c)^{k\alpha} + \text{etc.},$$

le calcul se réduira à exprimer $\int_\alpha$ par une formule générale. A cet effet, on prendra la fonction

$$\varphi(x) = (x+a)^{k\alpha} + (x+b)^{k\alpha} + (x+c)^{k\alpha} + \text{etc},$$

dont le développement est

$$\varphi(x) = mx^{k\alpha} + k\alpha S_1 x^{k\alpha-1} + \frac{k\alpha(k\alpha-1)}{1.2} S_2 x^{k\alpha-2} \ldots + S_{k\alpha}.$$

Or si, avant le développement, on substitue dans $\varphi(x)$ successivement $a, b, c, \ldots$ au lieu de x, la somme des résultats sera égale à $2f_\alpha + 2^{k\alpha} S_{k\alpha}$; par suite il est aisé d'apercevoir qu'en faisant les mêmes opérations sur le développement, on aura

$$2f_\alpha + 2^{k\alpha} S_{k\alpha} = m S_{k\alpha} + k\alpha\, S_1 S_{k\alpha-1} \ldots + m S_{k\alpha};$$

et enfin de là on tire la formule cherchée

$$f_\alpha = (m - 2^{k\alpha-1}) S_{k\alpha} + k\alpha\, S_1 S_{k\alpha-1} + \frac{k\alpha\,(k\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{k\alpha-2} + \text{etc.}$$

Lorsque $k\alpha$ sera pair, on s'arrêtera au terme qui contient S avec deux indices égaux, et on n'en prendra que la moitié; mais lorsque $k\alpha$ sera impair, on s'arrêtera au terme dans lequel les deux indices sont $\frac{1}{2}(k\alpha - 1)$ et $\frac{1}{2}(k\alpha + 1)$, et on le prendra tout entier.

Élimination par les fonctions symétriques. Degré de l'équation finale.

534. Soient les deux équations

$$[1] \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots = 0,$$
$$[2] \qquad x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots = 0,$$

dans lesquelles P, Q, etc., P', Q', ... sont des fonctions de y. Si on pouvait résoudre la première par rapport à x, on en déduirait m valeurs $a, b, c, \ldots$ qui seraient fonctions de y, et en les substituant dans la seconde, il viendrait, pour déterminer les valeurs de y, m équations délivrées de x, savoir :

$$[3] \quad \begin{cases} a^n + P'a^{n-1} + Q'a^{n-2} + R'a^{n-3} \ldots = 0, \\ b^n + P'b^{n-1} + Q'b^{n-2} + R'b^{n-3} \ldots = 0, \\ c^n + P'c^{n-1} + Q'c^{n-2} + R'c^{n-3} \ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Mais, en général, la résolution de l'équation [1] est impossible, et la question est de trouver une équation finale qui renferme indistinctement toutes les valeurs de y.

On aura une équation qui remplira cette condition en multipliant entre-elles les m équations [3] : car la résultante sera satisfaite par

chaque valeur de y tirée de l'une d'elles, et elle ne peut pas l'être autrement. Or, il évident que les facteurs de cette résultante ne font que changer de place, quelque permutation qu'on opère entre les quantités a, b, c, etc.; le produit ne renfermera donc que des fonctions symétriques, entières et rationnelles, de ces quantités; par conséquent on pourra les exprimer au moyen des coefficiens de l'équation [1], et de cette manière on aura l'équation finale en y.

Ce procédé d'élimination conduit en général à des calculs très-prolixes; mais en le considérant sous un point de vue purement analytique, il est le seul qui fasse trouver l'équation finale avec toutes les racines qu'elle doit renfermer, et sans complication de racines étrangères.

535. Ce procédé a surtout l'avantage de conduire à un théorème général sur le degré de l'équation finale. Dans ce qui vient d'être dit, la première équation est du degré m, la seconde est du degré n; et P, Q, etc., P', Q', etc., sont des fonctions quelconques de y; mais, pour le théorème dont il s'agit, ces fonctions doivent être, comme au n° 408, des polynômes tels que la somme des exposans de x et de y soit au plus égale à m dans chaque terme de l'équation [1], et au plus égale à n dans chaque terme de l'équation [2]. Alors nous avons à examiner à quel degré y peut s'élever dans les fonctions symétriques qui composent le produit des équations [3].

Chaque terme de ce produit est lui-même le produit de m termes pris respectivement dans ces m équations, de sorte qu'en désignant ces termes par Ya^α, $Y'b^\beta$, $Y''c^\gamma$, ... le terme du produit sera

$$YY'Y''\ldots \times a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$$

Mais le produit des m équations étant symétrique par rapport aux quantités a, b, c, ..., on doit y trouver tous les termes de même forme qu'on peut faire avec ces quantités : par conséquent, on est sûr qu'il renferme tous les termes représentés par

$$[4] \qquad YY'Y''\ldots \times S(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots),$$

et il faut évaluer le degré de cette expression.

Or, d'après les suppositions, le degré de y est au plus égal à

$n-\alpha$ dans Y, à $n-\beta$ dans Y', à $n-\gamma$ dans Y'', etc.; donc dans YY'Y''... il sera au plus égal à $mn-\alpha-\beta-\gamma\ldots$ D'un autre côté, si on se reporte (524) aux relations d'où se tirent les sommes S_1, S_2, S_3, etc., on voit que P étant au plus du 1er degré en y, Q du 2e, R du 3e, etc., le degré de y dans ces sommes ne doit point surpasser l'indice de la lettre S; et semblablement, si on se reporte (526) aux formules qui expriment les fonctions doubles, triples, etc., on reconnaît encore que dans $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)$ le degré de y ne doit point surpasser $\alpha+\beta+\gamma\ldots$ Donc, dans l'expression [4], le degré de y sera au plus égal à mn. La même chose peut se dire de toutes les fonctions symétriques dont la somme compose le produit des m équations [3]; donc enfin l'*équation finale ne peut point être d'un degré supérieur à* mn.

La démonstration semble exiger que l'équation [1] renferme le terme x^m. Mais on peut supposer qu'il y ait eu d'abord devant x^m un coefficient A, indépendant de y, et qu'on ait divisé toute l'équation par A. Alors, l'équation finale en y devant subsister quel que soit A, on pourra y faire $A=0$, et il est clair que cette supposition ne saurait en élever le degré. Du reste, il faut entendre le théorème en ce sens, que l'élimination entre deux équations générales, l'une du degré m et l'autre du degré n, doit donner une équation finale du degré mn; mais que dans des cas particuliers ce degré peut devenir moindre.

Les deux équations $x-y^m=0$, $x^n+ay^n+by+c=0$, quoique très-simples, donneront véritablement une équation finale du degré mn : car en substituant dans la seconde la valeur de x, tirée de la première, il vient $y^{mn}+ay^n+by+c=0$.

Au contraire, en éliminant x entre les équations $x^n-y^m=0$, $x^n+ay^n+by+c=0$, on aurait une équation finale de degré moindre que mn, savoir : $y^m+ay^n+by+c=0$.

536. En étendant le théorème à un nombre quelconque d'équations, on aura le théorème général dû à Bézout, et dont on a déjà rapporté l'énoncé n° 424, savoir : que *si, entre des équations en nombre pareil à celui des inconnues, on élimine toutes les inconnues hors une, le degré de l'équation finale devra être tout au plus égal au produit des degrés de ces équations.*

Avant Bézout, le théorème était connu pour le cas de deux

équations seulement; et CRAMER, dans un appendice de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, en avait donné une démonstration fort simple qui, au fond, ne diffère point de celle que nous avons exposée. Il était à désirer que la même démonstration fût appliquée à tous les autres cas, et c'est ce qu'a fait M. POISSON dans un Mémoire qui est imprimé parmi ceux du XIe cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, et que M. LACROIX a aussi inséré dans le Complément de ses élémens d'algèbre; en l'accompagnant de tous les développemens nécessaires.

CHAPITRE XXII.

Résolution des équations générales du 3e et du 4e degré.

Résolution de l'équation du 3e degré.

537. Je supposerai qu'on ait fait disparaître le second terme de l'équation du 3e degré, et, pour éviter les fractions, j'écrirai cette équation sous la forme

[1] $$x^3+3px+2q=0.$$

Parmi les différentes manières de la résoudre, la plus simple consiste à former *à priori* une équation du 3e degré sans second terme, laquelle admette une racine connue, mais exprimée avec des indéterminées, et à se servir ensuite de ces indéterminées pour rendre cette équation identique avec la proposée [1]. Pour établir cette identité, il faudra poser deux égalités, et par ce motif on emploiera deux indéterminées.

Soit fait $x=a+b$: en élevant au cube, on aura $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$; puis, en remplaçant $a+b$ par x et transposant, il vient

[2] $$x^3-3abx-a^3-b^3=0,$$

équation qui admet la racine $x=a+b$, et qu'il faut rendre identique avec [1]. En conséquence, on posera

$$[3] \qquad ab=-p, \quad a^3+b^3=-2q.$$

La première de ces égalités donne $a^3b^3=-p^3$. Ainsi, on connaît la somme a^3+b^3 et le produit a^3b^3. Donc les valeurs de a^3 et b^3 sont les racines d'une équation du 2ᵉ degré, dans laquelle le coefficient du second terme est égal à $+2q$, et le dernier terme égal à $-p^3$; de sorte que cette équation sera, en appelant z l'inconnue,

$$z^2+2qz-p^3=0.$$

C'est elle qu'on nomme la *réduite* de l'équation [1].

Ses deux racines représentent les valeurs de a^3 et b^3; et d'ailleurs on peut indifféremment prendre l'une ou l'autre pour la valeur de a^3, car cela revient à changer a en b et b en a dans la valeur $x=a+b$. Je prendrai

$$a^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}, \qquad b^3=-q-\sqrt{q^2+p^3};$$

et par suite il viendra

$$a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}, \qquad b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Chaque radical carré n'a ici qu'une seule valeur, mais chacun des radicaux cubiques en a trois. Si on pouvait satisfaire aux équations [3] sans faire aucun choix entre ces valeurs, on pourrait aussi, par les mêmes valeurs, rendre l'équation [1] identique à l'équation [2]; et puisque $a+b$ est racine de la seconde, on devrait satisfaire à la première en prenant

$$[4] \qquad x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Mais une remarque importante se présente d'elle-même : c'est que chaque radical cubique ayant trois valeurs, il s'ensuit que l'expression ci-dessus en a neuf, tandis que l'équation [1] ne doit avoir que trois racines. Il faut donc expliquer d'où vient cette multiplicité de valeurs, et discerner parmi elles celles qui sont véritablement racines de l'équation [1].

A cet effet, observons qu'à proprement parler ce ne sont pas les équations [3] qui ont été résolues pour avoir a et b, mais bien les équations

$$[5] \qquad a^3b^3 = -p^3, \quad a^3 + b^3 = -2q.$$

Or, si on représente par α et α^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, lesquelles, comme on sait, sont le carré l'une de l'autre (521), il est clair que l'équation $a^3b^3 = -p^3$ peut provenir également de l'élévation au cube de chacune de celles-ci

$$ab = -p, \quad ab = -\alpha p, \quad ab = -\alpha^2 p.$$

De là il suit que les neuf valeurs renfermées dans la formule [4] doivent donner les racines des trois équations

$$[6] \ x^3 + 3px + 2q = 0, \ x^3 + 3p\alpha x + 2q = 0, \ x^3 + 3p\alpha^2 x + 2q = 0.$$

On peut encore considérer ces neuf valeurs comme les racines de l'équation du 9e degré qu'on obtiendrait en multipliant entre elles les trois équations ci-dessus. Mais il sera plus simple, et cela revient au même, d'élever au cube l'une quelconque de ces équations, après avoir transposé dans le second membre le terme qui contient p. De cette manière on trouvera sur-le-champ

$$(x^3 + 2q)^3 = -27p^3x^3.$$

Quant aux racines qui se rapportent spécialement à chacune des trois équations, ce qui précède donne le moyen de les distinguer : car, selon que le coefficient de x sera p ou αp ou $\alpha^2 p$, il est clair qu'on ne devra ajouter que les valeurs de a et b pour lesquelles on a $ab = -p$ ou $ab = -\alpha p$ ou $ab = -\alpha^2 p$.

Par cette règle, il sera facile de former les racines de la proposée $x^3 + 3px + 2q = 0$, la seule dont nous ayons à nous occuper. Désignons par A une des valeurs du premier radical cubique, et par B une des valeurs du second, les valeurs de a et b seront

$$a = \mathrm{A}, \quad \alpha\mathrm{A}, \quad \alpha^2\mathrm{A},$$
$$b = \mathrm{B}, \quad \alpha\mathrm{B}, \quad \alpha^2\mathrm{B}.$$

De plus supposons, ce qui est permis, que A et B représentent des valeurs dont le produit soit $-p$. D'après ce qui vient d'être dit,

on ne devra ajouter que les valeurs dont le produit est AB; donc, en se rappelant que $\alpha^3 = 1$, il faudra prendre

$$x = A + B, \quad x = \alpha A + \alpha^2 B, \quad x = \alpha^2 A + \alpha B;$$

et d'ailleurs on sait (519) qu'on a

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Si on remplace A et B par les deux radicaux cubiques, et α, α^2 par leurs valeurs, il viendra

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Telles seront les racines de l'équation proposée: mais il faudra bien avoir soin d'attacher aux deux radicaux cubiques le même sens restreint qu'à A et à B, sans quoi l'on pourrait trouver de fausses racines.

538. Pour discuter ces valeurs il sera plus commode d'y laisser subsister A et B au lieu des radicaux cubiques, et d'isoler ce qui multiplie $\sqrt{-3}$. De cette manière, on a

$$x = A + B,$$

$$x = -\frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2}\sqrt{-3},$$

$$x = -\frac{A + B}{2} - \frac{A - B}{2}\sqrt{-3}.$$

Je supposerai aussi, comme on le fait ordinairement, que les coefficiens p et q de l'équation proposée représentent des quantités réelles. Alors, cette équation étant de degré impair, a toujours une racine réelle, et il est permis de supposer que A et B sont les valeurs de a et de b qui donnent cette racine; de sorte que A+B sera une quantité réelle.

Cela posé, reportons-nous aux deux radicaux

$$a = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}, \quad b = \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Si $q^2+p^3>0$, chacun d'eux a une valeur réelle; donc on peut supposer A et B réels. Par suite, A+B et A—B le seront aussi; donc la première racine $x=A+B$ est réelle, et les deux autres sont imaginaires.

Si $q^2+p^3=0$, on aura $A=B$, et alors les trois racines sont $x=A$, $x=-A$, $x=-A$. Elles sont toutes trois réelles, et les deux dernières sont égales entre elles.

Enfin soit $q^2+p^3<0$, ce qui exige que p soit négatif. Alors a et b n'ont plus de détermination réelle, et par conséquent les trois valeurs de x se trouvent compliquées d'imaginaires. Cependant on sait que l'une d'elles doit toujours être réelle; et même il est évident que les cas où les trois racines de l'équation [1] sont réelles et inégales ne peuvent se trouver que dans l'hypothèse actuelle $q^2+p^3<0$. On aurait donc tort d'affirmer que les valeurs de x sont imaginaires. Je vais prouver en effet qu'aucune d'elles ne l'est; et comme on peut toujours supposer que A et B sont des déterminations telles que la somme A+B représente la racine réelle dont l'existence est démontrée, tout se réduit à faire voir que la partie $\frac{1}{2}(A-B)\sqrt{-3}$, qui se trouve dans les deux autres valeurs de x, doit être réelle.

Par les seules règles du calcul on a $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$; donc

$$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}=\frac{A^3-B^3}{(A+B)^2-AB}.$$

Mais, à cause des valeurs de a^3 et de b^3, on a $A^3-B^3=2\sqrt{q^2+p^3}$; et, par la manière dont A et B ont été choisis, on a $AB=-p$; donc, en faisant $A+B=x'$; il vient

$$A-B=\frac{2\sqrt{q^2+p^3}}{x'^2+p},$$

et par conséquent

$$\frac{A-B}{2}\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Or, par hypothèse, on a $q^2+p^3<0$; donc la quantité ci-dessus est réelle; donc les trois valeurs de x le sont aussi.

Il est démontré par là que, dans l'hypothèse $q^2+p^3<0$, les imaginaires qui affectent les trois valeurs de x doivent se détruire; et par conséquent il semble que le calcul doive fournir les moyens de les faire disparaître. Cependant il n'en est point ainsi; et, à moins de recourir à des séries non terminées, l'algèbre ne peut point opérer cette réduction. C'est cette raison qui a fait donner le nom de cas *irréductible* à celui que nous examinons. Toutes les fois que l'équation tombera dans ce cas, les expressions générales des racines ne seront d'aucune utilité pour calculer les valeurs numériques de ces racines, et alors on pourra recourir aux procédés du chapitre XVIII. On trouvera aussi dans la trigonométrie une solution fort simple de l'équation du 3ᵉ degré, non-seulement pour le cas irréductible, mais encore pour tous les autres.

539. Au reste, quand on connaît une racine réelle x', il est facile d'avoir les deux autres racines. On le voit d'abord par la valeur de $A-B$, trouvée ci-dessus; car au moyen de cette valeur on a évidemment

$$x=x',\quad x=-\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p},\quad x=-\frac{x'}{2}-\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Mais on le voit aussi en divisant l'equation proposée par $x-x'$. Pour le faire plus commodément, on observe qu'on doit avoir $x'^3+3px'+2q=0$ et que par suite l'équation proposée peut s'écrire ainsi :

$$x^3-x'^3+3p(x-x')=0.$$

Donc, en divisant par $x-x'$, on aura

$$x^2+xx'+x'^2+3p=0,$$
$$x=-\tfrac{1}{2}x'\pm\sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2+p)}.$$

Voici maintenant comment on reconnaît que ces valeurs s'accordent avec les précédentes. Remarquons d'abord que

$$\sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2+p)}=\frac{\sqrt{-3(\frac{1}{4}x'^2+p)(x'^2+p)^2}}{x'^2+p}$$
$$=\frac{\sqrt{-3(\frac{1}{4}x'^6+\frac{6}{4}px'^4+\frac{9}{4}p^2x'^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

D'un autre côté, la relation $x'^3+3px'+2q=0$ donne

$$q^2=(\tfrac{1}{2}x'^3+\tfrac{3}{2}px')^2=\tfrac{1}{4}x'^6+\tfrac{6}{4}px'^4+\tfrac{9}{4}p^2x'^2;$$

donc enfin

$$\sqrt{-3(\tfrac{1}{4}x'^2+p)}=\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{x'^2+p}.$$

Résolution de l'équation du 4ᵉ degré.

540. Après avoir fait disparaître le second terme, l'équation générale du 4ᵉ degré est

$$[1] \qquad x^4+px^2+qx+r=0.$$

Soit posé $x=a+b+c$: en élevant au carré, il vient $x^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, ou, en transposant,

$$x^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+ac+bc).$$

Élevons de nouveau au carré, on trouve $x^4-2(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$. Puis, remplaçons $a+b+c$ par x et transposons, on obtient

$$\left.\begin{array}{r} x^4-2(a^2+b^2+c^2)x^2-8abcx+(a^2+b^2+c^2)^2 \\ -4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \end{array}\right\}=0.$$

Cette équation est sans second terme, et, par la manière même dont on l'a formée, on sait qu'elle admet pour racine $x=a+b+c$. Ainsi, on résoudra l'équation [1] en déterminant a, b, c, par la condition qu'elle soit identique avec la précédente, ce qui donne

$$-2(a^2+b^2+c^2)=p, \qquad -8abc=q,$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=r.$$

Ces égalités font voir qu'en prenant a^2, b^2, c^2, pour inconnues, ces trois quantités sont les racines d'une équation du 3ᵉ degré dont les coefficiens sont

$$-(a^2+b^2+c^2)=\frac{p}{2},$$

$$a^2b^2+a^2c+b^2c^2=\frac{p^2-4r}{16},$$

$$-a^2b^2c^2=-\frac{q^2}{64};$$

par conséquent cette équation est

$$[2]\qquad z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0;$$

et telle est la *réduite* d'où dépend la résolution de l'équation [1].

Supposons qu'on ait déterminé les trois valeurs de z, et désignons-les par z', z'', z''', on aura

$$a=\pm\sqrt{z'},\quad b=\pm\sqrt{z''},\quad c=\pm\sqrt{z'''}.$$

Si on combinait les signes de toutes les manières, on aurait huit valeurs pour $a+b+c$ ou x. Mais comme le dernier terme de la réduite [2] a été formé en élevant au carré l'équation $abc=-\frac{1}{8}q$, il en résulte que ces valeurs renferment et les racines de la proposée, et aussi celles de l'équation qui en différerait par le signe de q.

En même temps on voit que pour avoir seulement les racines de la proposée, il faut n'ajouter que les valeurs de a, b, c, pour lesquelles on a $abc=-\frac{1}{8}q$, et dont le produit est par conséquent de signe contraire à q. Dans chaque cas particulier, il sera facile de déterminer pour les radicaux trois valeurs A, B, C, qui remplissent cette condition; et ensuite avec ces valeurs on formera les quatre racines de la proposée, savoir :

$$x=\ \ A+B+C,\quad x=\ \ A-B-C,$$
$$x=-A+B-C,\quad x=-A-B+C.$$

Le plus souvent, au lieu de A, B, C, on met les trois radicaux $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$, $-\sqrt{z'''}$, et les valeurs de x s'écrivent ainsi :

$$x=\ \ \sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''},$$
$$x=\ \ \sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''},$$
$$x=-\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''},$$
$$x=-\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}.$$

Mais alors il faut sous-entendre qu'en appliquant ces formules à des cas particuliers, on prendra pour $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ et $\sqrt{z'''}$, trois déterminations dont le produit soit de même signe que q. Cette observation est importante : car, faute d'y avoir égard, on pourrait trouver de fausses racines.

541. Par la nature des racines de la réduite [2], on peut connaître la nature de celles de la proposée [1]. Or la réduite, ayant son dernier terme négatif, a toujours une racine positive, et le produit des deux autres racines doit être positif; donc, si ces dernières ne sont pas imaginaires, elles seront toutes deux positives ou toutes deux négatives. Je laisse de côté les cas où l'on aurait $q=0$, parce qu'alors la proposée se résout directement par le second degré. En conséquence, trois cas seulement sont à examiner.

1° *Cas où les trois racines de la réduite sont positives.* Alors les quatre valeurs de x sont évidemment réelles, et si l'on regarde les radicaux $\sqrt{z'}, \sqrt{z''}, \sqrt{z'''}$, comme représentant des déterminations positives, leur produit sera positif; donc les formules précédentes seront spécialement applicables à l'hypothèse de $q>0$. Pour $q<0$, il faudrait changer le signe de l'un des radicaux.

2° *Cas où la réduite a une racine positive z' et deux racines négatives z'', z'''.* Le radical $\sqrt{z'}$ sera réel, mais les radicaux $\sqrt{z''}$ et $\sqrt{z'''}$ seront imaginaires, et par suite les quatre valeurs de x seront imaginaires, à moins qu'on n'ait $z''=z'''$.

Quand $z''=z'''$, l'une des deux quantités $\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}$ et $\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}$ deviendra zéro; et en supposant que ce soit la dernière, les valeurs de x seront simplement

$$x=\sqrt{z'},\quad x=\sqrt{z'},\quad x=-\sqrt{z'}+2\sqrt{z''},\quad x=-\sqrt{z'}-2\sqrt{z''}.$$

Les deux premières sont réelles, puisque z' est positif; et les deux autres sont imaginaires, puisque z'' est négatif. D'ailleurs, comme dans la réduction on a supposé $\sqrt{z''}=\sqrt{z'''}$, on doit avoir ici $\sqrt{z'}\sqrt{z''}\sqrt{z'''}=z''\sqrt{z'}$; de sorte que ce produit ne pourra avoir le signe de q qu'en choisissant pour $\sqrt{z'}$ un signe contraire à q.

3° *Cas où la réduite a une racine positive z' et deux racines imaginaires z'', z'''.* La racine positive z' étant connue, on pourra diviser la réduite par $z-z'$, et l'on aura une équation du 2° degré qui donnera, pour z'' et z''', des valeurs imaginaires de la forme

$$z''=f+g\sqrt{-1},\quad z'''=f-g\sqrt{-1}.$$

Deux des valeurs de x renfermeront donc l'expression

$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}+\sqrt{f-g\sqrt{-1}},$$

et les deux autres renfermeront celle-ci

$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}-\sqrt{f-g\sqrt{-1}}.$$

Mais, par des formules connues (259), on a

$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}+\sqrt{f-g\sqrt{-1}}=\sqrt{2f+2\sqrt{f^2+g^2}},$$
$$\sqrt{f+g\sqrt{-1}}-\sqrt{f-g\sqrt{-1}}=\sqrt{2f-2\sqrt{f^2+g^2}};$$

et il faut, ainsi qu'on la remarqué au n° cité, associer les déterminations des deux radicaux $\sqrt{f+g\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ de telle sorte que leur produit ait le même signe que $\sqrt{f^2+g^2}$. Supposons donc qu'on prenne $\sqrt{f^2+g^2}$ positivement, on devra choisir pour $\sqrt{z'}$ une détermination de même signe que q. Avec cette attention les quatre valeurs de x pourront s'écrire comme il suit :

$$x=-\sqrt{z'}\pm\sqrt{2f+2\sqrt{f^2+g^2}},$$
$$x=\sqrt{z'}\pm\sqrt{2f-2\sqrt{f^2+g^2}}.$$

Deux de ces valeurs sont réelles, et deux sont imaginaires.

Réduction des expressions de la forme $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$. Equation dont les racines sont représentées par la formule $x=\sqrt[n]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[n]{A-\sqrt{B}}$.

542. La résolution des équations du 3ᵉ degré conduit à des expressions qui renferment des radicaux tels que $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$, et par extension on peut considérer des radicaux de la forme plus générale $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$. Or, il arrive fréquemment que A et B sont des nombres rationnels, et alors on peut se proposer de réduire ces radicaux à des expressions plus simples, dans lesquelles il n'y

ait plus de radicaux superposés. Cette question a déjà été résolue pour les radicaux carrés, et il s'agit maintenant d'atteindre à des cas plus élevés.

Je commencerai par le radical cubique $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$. On ne peut pas supposer pour cette racine une quantité de la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$: car on a

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3 &= a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}\\ &=(a+3b)\sqrt{a}+(3a+b)\sqrt{b},\end{aligned}$$

résultat qui contient les deux radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Mais le calcul même qu'on vient de faire montre qu'on trouvera un résultat de la forme $A+\sqrt{B}$ en élevant au cube les expressions $a+\sqrt{b}$, et $(a+\sqrt{b})\sqrt[3]{c}$. Je choisirai cette dernière comme plus générale, et je poserai,

$$[1] \qquad \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = (a+\sqrt{b})\sqrt[3]{c}.$$

En élevant au cube, il vient d'abord

$$A+\sqrt{B} = c(a^3+3ab) + c(3a^2+b)\sqrt{b};$$

puis, en égalant les parties rationnelles entre elles, et les parties irrationnelles entre elles,

$$[2] \quad A = c(a^3+3ab), \qquad [3] \quad \sqrt{B} = c(3a^2+b)\sqrt{b}.$$

La question est donc maintenant de trouver pour a, b, c, des valeurs rationnelles qui satisfassent à ces deux équations. Or, en élevant ces équations au carré, et en les retranchant ensuite l'une de l'autre, on a

$$A^2-B = c^2(a^6-3a^4b+3a^2b^2-b^3) = c^2(a^2-b)^3;$$

donc

$$a^2-b = \frac{\sqrt[3]{(A^2-B)c}}{c}.$$

Puisque a et b doivent être rationnels, il faudra prendre c de manière que $(A^2-B)c$ soit un cube entier ou fractionnaire, ce qui

est toujours possible. Alors, en nommant M le second membre ci-dessus, on aura

$$a^2-b=M,\quad \text{d'où}\quad b=a^2-M;$$

et, en substituant dans l'équation [2], il viendra

$$[4]\qquad 4ca^3-3Mca-A=0.$$

Cette équation devra donner pour a au moins une valeur commensurable, sans quoi la transformation [1] sera impossible.

Si, au lieu de $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$, on avait $\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$ à réduire, il suffirait de changer partout, dans ce qui précède, le signe de $\sqrt{b}$.

Pour exemple, soit l'expression $\sqrt[3]{14\pm\sqrt{200}}$. On aura $A=14$, $B=200$, $A^2-B=-4$; donc $(A^2-B)c=-4c$; donc on aura le cube -8 en prenant $c=2$. Par suite on a $M=-1$, $b=a^2+1$, et l'équation [4] devient $8a^3+6a-14=0$. On y satisfait par la valeur commensurable $a=1$, ce qui donne $b=2$. D'ailleurs on a déjà $c=2$; donc enfin

$$\sqrt[3]{14\pm\sqrt{200}}=(1\pm\sqrt{2})\sqrt[3]{2}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt[3]{-11\pm2\sqrt{-1}}$. On fera passer 2 sous le radical carré, et l'on aura $A=-11$, $B=-4$, $A^2-B=125$. Comme 125 est déjà le cube de 5, il suffit de faire $c=1$. En conséquence on a $M=5$, $b=a^2-5$, et l'équation [4] devient $4a^3-15a+11=0$. Or elle est satisfaite par $a=1$; donc $b=-4$, et par suite

$$\sqrt[3]{-11\pm2\sqrt{-1}}=(1\pm\sqrt{-4})\sqrt[3]{1}.$$

543. Maintenant, considérons l'expression plus générale $\sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}$, et posons

$$[5]\qquad \sqrt[n]{A\pm\sqrt{B}}=(a\pm\sqrt{b})\sqrt[n]{c}.$$

La question est encore de déterminer des nombres rationnels pour a, b, c, si cela est possible.

En élevant à la puissance n et égalant séparément les parties rationnelles, il vient

$$] \quad A = c[a^n + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^2 + \text{et.c}],$$

$$] \quad \sqrt{B} = c[na^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b + \text{etc.}]\sqrt{b}.$$

ı pourrait, comme pour le cas du radical cubique, élever ces deux alités au carré et les retrancher l'une de l'autre, mais les réducıns s'aperçoivent mieux par le calcul suivant. Comme on doit oir en même temps

$$A + \sqrt{B} = c(a + \sqrt{b})^n, \quad A - \sqrt{B} = c(a - \sqrt{b})^n,$$

tire de là, d'abord,

$$A = \tfrac{1}{2}c[(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n],$$
$$\sqrt{B} = \tfrac{1}{2}c[(a + \sqrt{b})^n - (a - \sqrt{b})^n].$$

ıis, par des réductions faciles, on trouve

$$A^2 - B = c^2(a + \sqrt{b})^n(a - \sqrt{b})^n = c^2(a^2 - b)^n;$$

ù

$$a^2 - b = \frac{\sqrt[n]{(A^2 - B)c^{n-2}}}{c}.$$

r là on voit qu'il faut choisir c de telle sorte que le second ımbre ci-dessus soit rationnel. En le nommant M, on aura

$$a^2 - b = M, \quad \text{d'où} \quad b = a^2 - M;$$

, en substituant cette valeur de b dans [6], l'équation résultante ı a devra avoir une racine commensurable, toutes les fois que transformation [5] sera possible.

544. Dans la résolution des équations du 3e degré, ce qui rend cas irréductible si remarquable, c'est qu'alors, quoiqu'on soit uré que les trois racines sont réelles, il est cependant imposle de faire disparaître les imaginaires autrement que par la e des séries. Cette difficulté n'est point propre uniquement au degré : elle se rencontre également dans la formule générale

$$8] \quad x = \sqrt[n]{A + B\sqrt{-1}} + \sqrt[n]{A - B\sqrt{-1}},$$

laquelle je vais m'arrêter un moment.

A considérer cette expression dans toute sa généralité, on

devrait combiner les n déterminations de $\sqrt[n]{A+B\sqrt{-1}}$ avec les n déterminations de $\sqrt[n]{A-B\sqrt{-1}}$; de sorte qu'il y aurait en tout n^2 valeurs pour x. Mais elle se prend rarement dans un sens aussi étendu, et je vais préciser celui qu'on y attache ordinairement.

Comme les deux radicaux représentent des racines d'équations binômes, on est sûr que leurs déterminations sont égales à des quantités de la forme $f+g\sqrt{-1}$ (379); de plus, il est manifeste qu'à chaque détermination du premier radical, il en correspond une du second, laquelle n'est différente que par le signe de $\sqrt{-1}$. Or, on suppose que ces valeurs correspondantes sont celles qui doivent s'ajouter dans la formule [8]; et avec cette restriction les valeurs de x sont toutes réelles et au nombre de n seulement.

Le produit de ces deux valeurs radicales, ainsi prises dans un même couple, est réel et positif. Or, le produit des deux radicaux étant en général $\sqrt[n]{A^2+B^2}$ ne peut avoir qu'une seule valeur de cette espèce; par conséquent, en la nommant K^2, on pourra encore caractériser les valeurs conjuguées, qui doivent être ajoutées, par la condition que leur produit soit égal à K^2.

La formule [8] peut être regardée comme l'expression générale des racines d'une équation dont le degré est marqué par le nombre de valeurs dont cette expression est susceptible ; par conséquent, suivant qu'elle sera prise dans sa plus grande extension ou avec la restriction dont on vient de parler, le degré de l'équation doit être n^2 ou n.

545. Cette dernière remarque nous conduit à expliquer comment on forme une équation lorsqu'on connaît l'expression de sa racine. C'est-à-dire qu'une expression donnée étant susceptible de prendre différentes valeurs, à raison du sens multiple des radicaux qu'elle contient, il faut trouver une équation débarrassée de radicaux, qui ait ces valeurs pour racines. Je prendrai pour exemple l'expression [8] elle-même.

Pour abréger, faisons

$$A+B\sqrt{-1}=a,\quad A-B\sqrt{-1}=b;$$

et la question reviendra à éliminer y et z entre les trois équations

$$y+z=x,\quad y^n=a,\quad z^n=b.$$

Mais ici l'élimination peut être dirigée d'après un procédé fort simple, analogue à celui qui a été employé pour les équations réciproques. Par les règles de la multiplication on a

$$(y^m+z^m)(y+z)=y^{m+1}+z^{m+1}+yz(y^{m-1}+z^{m-1}).$$

Or $y+z=x$ et $yz=\sqrt[n]{ab}$; donc en faisant encore, pour abréger, $\sqrt[n]{a}=c$, il viendra

$$y^{m+1}+z^{m+1}=x(y^m+z^m)-c(y^{m-1}+z^{m-1}).$$

Au moyen de cette formule on pourra exprimer, en fonction de x et de c, successivement toutes les quantités y^2+z^2, y^3+z^3, etc. Quand on sera parvenu à y^n+z^n, on pourra remplacer y^n+z^n par $a+b$, et alors on aura l'équation cherchée, laquelle sera de degré n.

Cette équation contient c : or, on a $c=\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{A^2+B^2}$; donc c est en général susceptible de n valeurs différentes. En mettant dans l'équation chacune de ces n valeurs à son tour, on aura n équations, et par suite $n\times n$ ou n^2 valeurs de x. C'est en effet ce qui doit être, d'après ce qui a été dit à la fin du n° précédent. Si on voulait avoir une équation unique qui eût toutes ces valeurs pour racines, il resterait encore à éliminer c entre l'équation du degré n en x et l'équation $c^n=ab$.

Mais si dans la formule [8] on ne veut associer que les valeurs radicales dont le produit est réel, alors ce sera uniquement cette valeur réelle qu'il faudra choisir pour c, et on n'aura plus qu'une seule équation du degré n pour déterminer toutes les valeurs de x.



CHAPITRE XXIII.

Notions générales sur les séries.

Définitions. Règles sur la convergence.

546. On appelle *suite infinie*, *série infinie*, ou simplement *suite*, *série*, une expression composée d'un nombre illimité de termes. La série est dite *régulière* lorsqu'à partir d'un certain terme tous les suivans peuvent être formés d'après une même loi. On nomme *terme général* celui dont le rang dépend d'une indéterminée, et qui deviendra tel ou tel terme de la série, selon la valeur particulière qu'on attribuera à cette indéterminée.

Les séries sont employées le plus souvent pour représenter des quantités dont elles font connaître la valeur avec approximation ; et cette approximation s'obtient en prenant dans la série un certain nombre de termes consécutifs à partir du premier. Alors, le *reste* de la série, c'est-à-dire, l'ensemble des termes qu'on néglige, exprime l'*erreur* de l'approximation ; et, pour que la série atteigne le but qu'on se propose, il faut qu'en prenant un nombre de termes assez considérable, cette erreur puisse être rendue aussi petite qu'on voudra. Les séries qui remplissent cette condition sont appelées *convergentes*. Par opposition, les autres se nomment *divergentes*.

De la définition même il résulte que si une série est convergente, il existera une certaine limite de laquelle on approchera autant qu'on voudra en prenant un nombre de termes très-considérable, et qu'on ne pourra atteindre qu'en supposant ce nombre égal à l'infini. Cette limite est la valeur complète ou la *somme* de la série.

547. Par exemple, soit la série

[1] $$a+ax+ax^2+ax^3+\text{etc.},$$

dans laquelle je supposerai, pour mieux fixer les idées, que x soit positif. Si on prend la somme S_n des n premiers termes, on aura :

$$S_n = a(1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1}) = a\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Soit $x < 1$: plus n est grand, plus la quantité $\frac{ax^n}{1-x}$ est petite; et même on a reconnu (304) qu'on peut choisir n assez grand pour qu'elle soit aussi petite qu'on voudra. Donc, en prenant un nombre de termes de plus en plus grands, la somme S_n approche continuellement de $\frac{a}{1-x}$ et peut en différer aussi peu qu'on voudra; donc la série [1] est convergente et a pour somme cette limite.

Mais si l'on a $x > 1$, alors on voit immédiatement, sur la série elle-même, que les termes peuvent croître au-de là de toute limite; donc les sommes qu'on formerait en prenant successivement un terme, deux termes, trois termes, etc. peuvent croître aussi au-delà de toute limite; donc la série est divergente.

548. Il faut bien se garder de croire qu'une série soit toujours convergente lorsque ses termes vont en convergeant vers zéro. Par exemple, on se tromperait si on considérait comme convergente la série

[2] $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{etc.}$$

Pour rendre l'erreur évidente, remarquons d'abord que si, à partir d'un terme quelconque $\frac{1}{n}$, on ajoute entre eux les n suivans, on aura une somme $> \frac{1}{2}$. En effet, cette somme est

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ldots + \frac{1}{2n};$$

et puisque les termes sont décroissans, elle est visiblement $> \frac{1}{2n} \times n$ ou $\frac{1}{2}$.

Cela posé, partageons les termes de la série en groupes comme ci-dessous :

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \ldots + \frac{1}{16}\right) + \text{etc.} :$$

toutes les sommes entre parenthèses seront $> \frac{1}{2}$; la série est donc composée d'une infinité de parties toutes $> \frac{1}{2}$, et par conséquent la somme de ses termes n'a pas de limite.

549. Les séries convergentes étant les seules qu'on doive employer dans l'analyse, il est très-important de reconnaître si une série remplit la condition de convergence établie dans la définition; et, pour y parvenir, il existe quelques règles qu'on va expliquer.

Soit une série quelconque

$$[A] \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$$

que l'on suppose convergente. Représentons d'une manière générale par S_n la somme des n premiers termes, de sorte qu'on ait

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1}$$
$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n$$
$$S_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1}$$
etc.

La définition de la convergence exige qu'en choisissant n suffisamment grand, les sommes S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, etc., approchent autant qu'on voudra d'une certaine limite S. Il suit de là que les différences entre ces sommes pourront être rendues aussi petites qu'on voudra, en choisissant n suffisamment grand. Or, les différences entre S_n et chacune des sommes suivantes sont respectivement

$$S_{n+1} - S_n = u_n, \quad S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$
$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \quad \text{etc.};$$

donc, en ne faisant d'abord attention qu'à la différence $S_{n+1} - S_n$, on peut conclure qu'en prenant n suffisamment grand, tous les termes à partir de u_n devront être aussi petits qu'on voudra.

Cette condition est simple et d'un usage facile, mais on a déjà remarqué qu'elle ne suffit pas (548); et comme ce qui vient d'être dit de la différence $S_{n+1} - S_n$ s'applique de la même manière aux différences $S_{n+2} - S_n$, $S_{n+3} - S_n$, etc., on peut conclure, comme conditions également nécessaires, que chacune des sommes

$$u_n + u_{n+1}, \quad u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \quad \text{etc.}$$

considérée séparément, doit aussi, quel que soit le nombre de ses termes, devenir aussi petite qu'on veut quand on prend pour n des nombres très-considérables. Avec ces nouvelles conditions, il est évident que la convergence est assurée : car alors, en choisissant n suffisamment grand, les sommes S_n, S_{n+1}, etc. seront aussi peu différentes entre elles qu'on voudra, et par conséquent il existe une limite dont elles approcheront aussi près qu'on voudra.

550. Pour éclaircir ce qui précède par des exemples, reprenons la série

$$[1] \qquad a + ax + ax^2 + ax^3 + \text{etc.},$$

dont le terme général est ax^n. Considérons d'abord ce terme isolément, puis ajoutons-le au suivant, puis aux deux suivans, et ainsi de suite : on aura ces différentes expressions,

$$ax^n, \qquad ax^n + ax^{n+1} = \frac{ax^n(1-x^2)}{1-x},$$

$$ax^n + ax^{n+1} + ax^{n+2} = \frac{ax^n(1-x^3)}{1-x}, \qquad \text{etc.}$$

Or, quand x est < 1, chacune d'elles peut devenir aussi petite qu'on veut en prenant pour n un nombre suffisamment grand ; donc les conditions de convergence sont remplies par la série [1].

Reprenons aussi la série numérique

$$[2] \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{etc.}$$

Si on considère comme terme général celui qui a le dénominateur $n+1$, il est évident qu'en faisant n très grand, il peut devenir aussi petit qu'on veut, ce qui est une condition nécessaire pour la convergence de la série. Mais il faut encore qu'en ajoutant à ce terme général un nombre quelconque de termes, la somme puisse devenir aussi petite qu'on voudra : or, c'est ce qui n'a pas lieu, car on a vu que la somme $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{2n}$ est $> \frac{1}{2}$.

Il est en général assez difficile de vérifier toutes les conditions de convergence : c'est pourquoi je vais établir quelques théorèmes

qui, dans un grand nombre de cas, dispenseront de recourir à ces conditions.

Théorèmes à l'aide desquels on peut souvent reconnaître la convergence. Limite de l'erreur.

551. THÉORÈME I. *Soit une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \text{etc.},$$

dont tous les termes, à partir d'un certain rang, sont positifs, et dans laquelle de très-grandes valeurs de n *font converger le rapport*

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

vers une limite R. *La série est convergente lorsqu'on a* $R < 1$, *et divergente lorsqu'on a* $R > 1$.

Si au-delà d'un certain rang tous les termes étaient négatifs, on changerait les signes de la série U, et le théorème s'appliquerait à la série $-U$.

Supposons d'abord $R < 1$, et choisissons à volonté un nombre R' intermédiaire entre 1 et R. Puisque les très-grandes valeurs de n font converger le rapport r vers R, il s'ensuit qu'à partir d'un certain terme u_n, qu'on prendra aussi éloigné qu'on voudra, les rapports

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}, \quad \text{etc.},$$

pourront différer aussi peu qu'on voudra de la limite R; et par conséquent alors ils seront $< R'$. Donc on aura

$$u_{n+1} < R'u_n, \quad u_{n+2} < R'u_{n+1}, \quad u_{n+3} < R'u_{n+2}, \quad \text{etc.};$$

et à plus forte raison

$$u_{n+1} < R'u_n, \quad u_{n+2} < R'^2u_n, \quad u_{n+3} < R'^3u_n, \quad \text{etc.}:$$

ainsi, les termes u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, etc. sont respectivement plus petits que ceux de la progression géométrique $R'u_n + R'^2u_n + \text{etc.}$ Or, cette progression est convergente puisque la raison R' est < 1 (n° 550) : donc, à plus forte raison, la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.}$ sera convergente, et par conséquent la série U l'est aussi.

En second lieu, supposons $R>1$, et choisissons encore à volonté R' entre 1 et R. On fera voir, comme précédemment, qu'on peut prendre le terme u_n assez éloigné pour que les termes u_{n+1}, u_{n+2}, etc. soient respectivement plus grands que leurs correspondans de la suite géométrique $R'u_n+R'^2u_n+$ etc. Or, R' étant >1, on peut arriver dans cette suite à des termes aussi grands qu'on voudra; donc, pour les très-grandes valeurs de n, les termes de la série U ne seront pas aussi peu différens de zéro qu'on voudra. Dès que cette condition vient à manquer, la convergence de la série est impossible.

Appliquons le théorème aux séries suivantes, dans lesquelles on suppose x positif :

$$U'=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.},$$

$$U''=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\ldots+\frac{x^n}{n}+\text{etc.},$$

$$U'''=1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}x^n\mp\text{etc.}$$

Dans la série U', deux termes consécutifs quelconques sont

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)};\ \text{donc}\ r=\frac{x}{n+1}.$$

Or, quand on a fait croître n indéfiniment, la limite de r est $R=0$; donc, quelle que soit la grandeur de x, la série U' est convergente.

Dans la série U'', deux termes consécutifs quelconques sont

$$\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1};\quad \text{donc}\quad r=\frac{nx}{n+1}.$$

Or, il est facile de voir qu'on a

$$r=\frac{(n+1-1)x}{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x;$$

donc, si on fait croître n indéfiniment, la limite de r est $R=x$; donc, suivant qu'on aura $x<1$ ou $x>1$, la série U'' sera convergente ou divergente.

Enfin, considérons la série U^m, dans laquelle m est un nombre donné. Le rapport r sera

$$r = -\frac{(m-n)x}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{m+1}{n+1}\right)x = \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)x,$$

et l'on voit qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande, r sera toujours positif; de sorte que tous les termes de la série U^m, à partir d'un certain rang, seront de même signe, comme l'exige l'énoncé du théorème. On voit aussi que la limite de r est $R=x$; donc, x étant positif, suivant qu'on aura $x<1$ ou >1, la série U^m sera convergente ou divergente.

552. THÉORÈME II. *Soit une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n + \text{etc.},$$

dont tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang : si, pour les très-grandes valeurs de n, *la racine*

$$r = \sqrt[n]{u^n}$$

converge vers une limite R, *la série sera convergente ou divergente, suivant qu'on aura* $R<1$ *ou* $R>1$.

Si les termes au-delà d'un certain rang étaient négatifs, le théorème s'appliquerait à la série $-U$.

Soit d'abord $R<1$, et prenons encore une quantité R' entre R et 1. D'après l'énoncé, on peut choisir n assez grand pour que les expressions

$$\sqrt[n]{u_n}, \quad \sqrt[n+1]{u_{n+1}}, \quad \sqrt[n+2]{u_{n+2}}, \quad \text{etc.},$$

soient aussi approchées de R qu'on voudra, et par conséquent toutes moindres que R' : de sorte qu'on aura

$$u_n < R'^n, \quad u_{n+1} < R'^{n+1}, \quad u_{n+2} < R'^{n+2}, \quad \text{etc.}$$

Donc les termes de la suite $u_n + u_{n+1} +$ etc. seront moindres que ceux de la progression géométrique $R'^n + R'^{n+1} +$ etc.; et comme cette progression est convergente, à cause de $R'<1$, on conclut *à fortiori* que la suite $u_n + u_{n+1} +$ etc. doit l'être : par conséquent la série U l'est aussi.

Soit $R>1$. Si on prend encore R' entre 1 et R, alors R' sera

une quantité moindre que R, et un raisonnement analogue au précédent prouvera que la série est divergente.

Scolie. Les deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laissent d'incertitude, sur la convergence ou la divergence de la série U, que dans les cas où l'on aurait R = 1; et alors la question ne sera pas toujours facile à décider. M. CAUCHY, à qui j'ai emprunté en grande partie les considérations générales contenues dans ce chapitre, a aussi donné plusieurs propositions à l'aide desquelles on y réussit quelquefois. Voyez son *Cours d'analyse* imprimé en 1821.

553. THÉORÈME III. *Lorsqu'une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}$$

est entremêlée de termes positifs et négatifs, et qu'en les prenant tous positivement la nouvelle série est convergente, on peut affirmer que la série U *l'est aussi.*

Soit R l'ensemble des termes positifs contenus dans la série U à partir d'un terme quelconque u_n, et soit —R′ celle des termes négatifs, de sorte qu'on ait $R - R' = u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$

Puisqu'on doit avoir une série convergente en prenant positivement tous les termes de la série U, il s'ensuit qu'on peut choisir n assez grand pour que R+R′ soit une quantité aussi petite qu'on voudra; donc, à plus forte raison, il en sera ainsi de R et R′, et par conséquent de R—R′; donc la série U est convergente.

Pour donner des exemples, reportons-nous aux séries U′, U″, U‴, du nº 551. On y supposait x positif afin que tous leurs termes, à partir d'un certain rang, fussent positifs; et alors on a reconnu entre quelles limites il fallait renfermer x pour que ces séries fussent convergentes. Donc, d'après le théorème qui vient d'être démontré, elles ne cesseront pas d'être convergentes, si on donne à x des valeurs renfermées entre les mêmes limites prises négativement.

Ainsi la série U′ sera convergente pour toutes les valeurs de x, tant positives que négatives; la série U″ le sera pour toutes les valeurs entre +1 et —1; et enfin la série U‴ le sera aussi pour les valeurs entre +1 et —1.

Scolie. Il ne faudrait pas renverser le THÉORÈME III, et conclure que si une série entremêlée de signes $+$ et $-$ est convergente, il en sera de même si on prend tous ses termes positivement. La série V du nº suivant en sera une preuve.

554. THÉORÈME IV. *Une série est convergente lorsque ses termes, à partir d'un certain rang, ont des signes alternatifs, et qu'ils vont en diminuant de telle sorte que zéro soit la limite de leur décroissement.*

Considérons un quelconque des termes décroissans dont les signes sont alternatifs, désignons-le par $\pm a$, et les suivans par $\mp b \pm c \mp$ etc. Si on prend la somme des termes qui précèdent a pour valeur approchée de la série entière, l'erreur ρ sera

$$\rho = \pm a \mp b \pm c \mp d \pm \text{etc.},$$

et cette expression pourra s'écrire sous ces deux formes :

$$\rho = \pm[(a-b)+(c-d)+\text{etc.}],$$
$$\rho = \pm[a-(b-c)-(d-e)-\text{etc.}].$$

Puisque les termes a, b, etc. vont en décroissant, toutes les quantités entre parenthèses sont positives : donc, par la première forme, on voit que ρ est de même signe que $\pm a$; et, par la seconde, que la valeur numérique de ρ est $< a$. Or, en prenant le terme a assez éloigné, il sera aussi petit qu'on voudra; donc, à plus forte raison, il en sera ainsi de l'erreur ρ; donc la série donnée est convergente.

Si on considère la série

$$V = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

on reconnaît sur-le-champ qu'elle remplit les conditions du théorème. Donc elle est convergente; et en l'arrêtant à un terme quelconque, à $\frac{1}{4}$ par exemple, l'erreur sera en moins et $< \frac{1}{5}$.

Les THÉORÈMES I et II n'apprendraient rien à l'égard de cette série, car ils exigent que les termes, à partir d'un certain rang, soient tous de même signe. Le THÉORÈME III n'apprendrait rien non plus, car il exige qu'en prenant tous les termes positivement la nouvelle série soit convergente, et l'on a démontré que la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ etc. est infinie.

555. Lorsqu'une série est convergente, et que, pour avoir une valeur approchée de la série entière, on fait la somme d'un certain nombre de termes, il est important d'obtenir une limite de l'erreur. Quand la série tombe dans le cas du Théorème IV, on vient de voir que l'erreur est toujours moindre que le premier terme de ceux qu'on néglige. Mais la seule règle générale qu'on puisse indiquer pour obtenir cette limite, c'est de comparer, ainsi qu'on l'a fait dans les Théorèmes I et II, la série avec une progression géométrique décroissante; et, quand on aura reconnu qu'en s'arrêtant à un certain terme, les termes suivans de la série diminuent plus rapidement que les termes correspondans de la progression géométrique, on sera certain que l'erreur est inférieure à la somme des termes de la progression.

Pour exemple, prenons la série

$$U' = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.},$$

dans laquelle le terme en x^{n+1} se forme en multipliant le précédent par x et en le divisant par $n+1$. Désignons par n un nombre tel qu'on ait $x < n+1$: on sera sûr que les termes de la suite

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} + \text{etc.}$$

décroîtront plus rapidement que ceux d'une progression géométrique dont le 1[er] terme serait le même que dans cette suite, et dont la raison serait $\frac{x}{n+1}$. Donc, si on prend dans la série U' le terme en x^{n-1} pour le dernier, l'erreur ρ sera moindre que la somme de cette progression, et l'on aura

$$\rho < \frac{(n+1)\,x^n}{1.2\ldots n\,(n+1-x)}.$$

Sur les développemens série. Méthode des coefficiens indéterminés. Retour des suites.

556. Les séries se présentent d'elles-mêmes dans les opérations de l'algèbre. Par exemple, supposons qu'on fasse une division de polynômes, dans laquelle le dividende ne soit pas un produit du

diviseur, ou bien, qu'on ait à extraire la racine d'un polynôme qui ne soit pas une puissance exacte de même ordre que la racine; dans ces deux cas, les opérations successives se prolongeront indéfiniment et l'on engendrera une série.

Lorsque des opérations ont pour objet de transformer une expression en une autre qui lui soit égale, si, au lieu d'un résultat composé d'un nombre limité de termes, on trouve une série, on regarde ordinairement cette série comme équivalente à la première expression. Mais à ce sujet quelques observations importantes doivent être faites; et, pour être mieux compris, je choisirai un exemple fort simple.

Soit la fraction $\frac{1}{1-x}$, si on effectue, par les règles connues, la division de 1 par $1-x$, le calcul sera tel qu'on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-x \\ \hline +x & 1+x+x^2+\text{etc.} \\ +x^2 & \\ +x^3 & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Par la nature même de l'opération, on reconnaît que le quotient ne doit pas s'arrêter et qu'on aura une série régulière dont chaque terme est le produit du précédent par x. Si on la termine à une certaine puisssance de x, à x^2, par exemple, il est évident qu'alors le reste correspondant étant x^3, il faudrait, pour compléter le quotient, lui ajouter la fraction $\frac{x^3}{1-x}$. Ainsi, on a exactement

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}.$$

Mais une erreur assez commune, c'est de croire qu'en regardant la suite des termes du quotient comme prolongée à l'infini, elle devra toujours représenter, quel que soit x, la valeur exacte du quotient; de sorte qu'on aurait

$$[1] \qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\text{etc.}$$

Cette égalité est incontestable quand on attribue à x des valeurs <1; car alors le 2e membre est la somme des termes d'une

progression géométrique décroissante, et, d'après la règle connue (304), cette somme est en effet égale à $\frac{1}{1-x}$.

Quand on attribue à x des valeurs >1, alors l'égalité cesse d'être vraie. Ainsi, qu'on fasse $x=2$, elle devient

$$\frac{1}{1-2}=1+1+1+\text{ etc.};$$

et il y a absurdité évidente, car le 1[er] membre est égal à -1, et le 2[e] est égal à l'infini.

Il est facile d'expliquer comment il se fait que l'égalité [1] soit vraie ou fausse, selon que x est moindre ou plus grand que 1. On a déjà observé qu'en arrêtant le quotient à une certaine puissance de x, il faut ajouter une fraction au quotient pour le compléter. Désignons par x^n le terme auquel on s'arrête, le reste sera représenté par x^{n+1}, et l'on aura, sans aucune erreur,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2\ldots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Lorsqu'on veut prolonger indéfiniment la suite des termes du quotient, il faut faire $n=\infty$, et cette hypothèse doit être faite aussi bien dans la partie fractionnaire que dans la partie entière. Or, la partie fractionnaire devient alors zéro si $x<1$, et $-\infty$ si $x>1$: donc on peut la supprimer dans le premier cas, mais non dans le second.

En général, une fonction ne peut être remplacée par une série que dans les cas où cette série lui est parfaitement équivalente; et, pour que cela soit, il faut, comme condition essentielle, qu'en arrêtant la série à un terme quelconque, le reste de la série devienne zéro lorsque le nombre des termes qui précèdent ce reste est infini. Or, cette condition est toujours remplie par les séries convergentes; et pour cette raison elles sont les seules qu'on doive admettre dans le calcul.

557. Il existe, pour développer les fonctions en séries, une méthode dite *des coefficiens indéterminés*, que je vais exposer en peu de mots. Afin de mieux fixer les idées, supposons, ce qui est le cas le plus ordinaire, qu'il s'agisse d'une fonction $F(x)$ dont les valeurs sont réelles et varient d'une manière continue, pour des

valeurs très-petites de x à partir de $x=0$: on demande de développer cette fonction en série ordonnée suivant les puissances ascendantes, positives et entières de x. On fera

$$[1] \qquad F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

et A, B, C, ... seront des coefficiens indéterminés qui ne doivent point contenir x, et dont il faut trouver les valeurs.

A cet effet, on choisira une propriété de la fonction $F(x)$ qui soit d'une vérification facile, et en cherchant à opérer cette vérification avec la série, on arrivera à une égalité telle que

$$[2] \qquad P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle P, Q, R,... sont des expressions indépendantes de x, mais composées avec les coefficiens A, B, C,... Or, cette égalité devant subsister sans qu'on assigne à x de valeur particulière, il faudra que les multiplicateurs des différentes puissances de x deviennent nuls; donc on devra avoir

$$[3] \qquad P=0, \quad Q=0, \quad R=0, \quad \text{etc.},$$

et on se servira de ces équations pour trouver les coefficiens A, B, C,... Si elles en laissent quelques uns d'inconnus, il faudra remonter à l'équation [1] et les déterminer d'après les propriétés particulières de la fonction que l'on considère.

Dans le chapitre suivant je donnerai des applications de cette méthode ; mais je dois présenter ici quelques observations qui me semblent indispensables.

558. Premièrement, dans l'égalité [1] il faut que le second membre représente la valeur du premier. Si cela n'est pas possible en attribuant à x une valeur quelconque, on veut au moins que que l'égalité ait lieu pour les petites valeurs de x, et cela exige que la série soit convergente pour ces petites valeurs. Or, il est très-rare qu'on puisse démontrer *à priori* la possibilité d'exprimer une fonction par une série de cette espèce, même lorsqu'on la restreint aux petites valeurs de x. Ainsi, à parler rigoureusement, l'égalité [1] doit être regardée comme purement hypothétique, et à la fin du calcul, après avoir trouvé A, B, C,..., il sera nécessaire de vérifier si, pour les petites valeurs de x, elle est véritablement convergente et égale à la fonction que l'on considère.

Les auteurs n'ont peut-être pas assez insisté sur la nécessité de cette vérification. Communément on croit que les calculs par lesquels on cherche des inconnues ne doivent jamais manquer de découvrir les fausses suppositions qu'on y aurait introduites ; et, s'il en était ainsi, la vérification serait superflue. Mais on pourrait citer des exemples où des erreurs de supposition resteraient inaperçues par cette voie. Les bornes de cet ouvrage ne me permettent pas de m'étendre davantage sur ce sujet.

559. J'ai dit que l'équation [2] devait avoir lieu sans attribuer à x de valeur particulière. Pour bien entendre ceci, il faut observer que si on borne, comme nous l'avons fait, l'égalité [1] aux petites valeurs de x, il en doit être de même de l'équation [2] : c'est-à-dire que la série $P+Qx+$ etc. doit être convergente et égale à zéro, pour toutes les valeurs de x à partir de $x=0$ jusqu'à certaine limite, qui peut être très-petite. Or, cela suffit pour conclure qu'on doit avoir les équations [3].

En effet, si on prend $x=0$, la série $P+Qx+$ etc. doit se réduire à P, et par conséquent l'équation [2] donne $P=0$. Supprimons dans cette équation le terme P qui est zéro, et divisons-la par x, on obtient celle-ci $Q+Rx+$ etc. $=0$, laquelle doit encore subsister pour les valeurs très-petites de x. Donc on pourra en conclure semblablement $Q=0$, et ainsi de suite.

560. Une même fonction $F(x)$ ne peut avoir qu'un seul développement en série convergente de la forme $A+Bx+$ etc. : car si on en trouvait deux, ils devraient être égaux entre eux, et dès-lors on devrait avoir une équation de la forme

$$[4] \quad A+Bx+Cx^2+\text{ etc.}=A'+B'x+C'x^2+\text{ etc.}$$

En transposant tout dans un membre, elle devient $(A-A')+(B-B')x+$ etc. $=0$; et, par le n° précédent, on en conclut $A-A'=0$, $B-B'=0$, etc., ou $A=A'$, $B=B'$, etc.

En d'autres termes, on pourrait encore dire que deux séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x, ne peuvent pas être égales sans être identiques.

561. L'emploi des coefficiens indéterminés s'offre de lui-même dans le problème du *retour des suites*. Alors on suppose qu'une quantité y, dépendant d'une variable x, est exprimée par une

série en x, et l'on veut en déduire la valeur de x exprimée par une série en y. Soient

$$y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}, \quad x = a + by + cy^2 + \text{etc.},$$

A, B, C,... étant des quantités données, et a, b, c,... des indéterminées. Dans la première égalité on remplacera x par la série $a + by +$ etc.; ou bien dans la seconde, y par la série $A + Bx +$ etc.; et l'on arrrivera ainsi à une égalité telle que [2] ou [4], de laquelle on déduira différentes équations qui serviront à déterminer les coefficiens a, b, c,....

Je terminerai ici les généralités relatives aux séries. J'en ai dit assez pour montrer combien de précautions doivent être prises pour les employer avec sûreté. Aussi a-t-on soin, surtout dans les élémens, de ne traiter par cette voie que les questions dont la solution serait impossible ou trop difficile par d'autres procédés.

CHAPITRE XXIV.

Binôme pour tous les cas. Séries exponentielles et logarithmiques. Séries récurrentes.

Formule du BINÔME *pour un exposant quelconque.*

562. Si on fait, comme au n° 211, les premières puissances de $a + x$ au moyen de la multiplication, on reconnaît facilement que pour un exposant entier positif quelconque les deux premiers termes du développement de $(a+x)^m$ sont $a^m + ma^{m-1}x$, et que les autres sont de la forme $Aa^{m-2}x^2 + Ba^{m-3}x^3 +$ etc., de sorte qu'on peut poser

$$[1] \quad (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + Aa^{m-2}x^2 + Ba^{m-3}x^3 + \text{etc.},$$

A, B,... représentant des coefficiens qui ne contiennent ni a ni x.

Lorsque l'exposant est un nombre positif fractionnaire, on a

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+x)^m} = \sqrt[n]{a^m + ma^{m-1}x + \text{etc.}}$$

Or, si on applique ici le procédé expliqué n° 224 pour l'extraction des racines, on trouve sans difficulté les deux premiers termes de cette racine, et l'on a un développement de la forme

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} x + \text{A}a^{\frac{m}{n}-2} x^2 + \text{B}a^{\frac{m}{n}-3} x^3 + \text{etc.}$$

Ainsi la forme du développement est la même que pour un exposant entier.

Lorsque l'exposant est un nombre négatif quelconque, entier ou fractionnaire, on a, en s'appuyant sur ce qui vient déjà d'être trouvé,

$$(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m} = \frac{1}{a^m + ma^{m-1}x + \text{etc.}};$$

Or, si on effectue la division suivant les règles ordinaires, il vient un quotient indéfini tel que

$$(a+x)^{-m} = a^{-m} - ma^{-m-1}x + \text{A}a^{-m-2}x^2 + \text{etc.};$$

donc, quel que soit l'exposant, on doit toujours avoir un développement de la forme indiquée par l'équation [1]. Les deux premiers termes sont déterminés, et il ne reste plus qu'à trouver les coefficiens A, B, etc.

Pour plus de généralité je considérerai deux termes consécutifs de rang quelconque, et j'écrirai

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x \ldots + \text{M}a^{m-n}x^n + \text{N}a^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Changeons partout x en $x+y$: comme les coefficiens inconnus ne contiennent ni a ni x, il viendra

$$(a+x+y)^m = a^m + ma^{m-1}(x+y) \ldots$$
$$\ldots + \text{M}a^{m-n}(x+y)^n + \text{N}a^{m-n-1}(x+y)^{n+1} + \text{etc.}$$

En changeant a en $a+y$, on eût trouvé

$$(a+y+x)^m = (a+y)^m + m(a+y)^{m-1}x \ldots$$
$$\ldots + \text{M}(a+y)^{m-n}x^n + \text{N}(a+y)^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Dans les deux égalités précédentes, les premiers membres sont égaux : donc les seconds doivent l'être; et cela, quels que soient x et y. Donc, si on les ordonne par rapport aux puissances de y, ils devront être identiques. A la vérité ils renferment des puissances de binômes, mais on connaît les deux premiers termes de chacune de ces puissances, de sorte qu'on pourra former la partie qui, dans chaque second membre, renferme y au premier degré; et cette partie nous suffira. En la désignant par Yy dans l'un, et par $Y'y$ dans l'autre, il est facile de trouver

$$Y = ma^{m-1} \ldots + Mna^{m-n}x^{n-1} + N(n+1)a^{m-n-1}x^{n} \ldots$$
$$Y' = ma^{m-1} \ldots + M(m-n)a^{m-n-1}x^{n} + N(m-n-1)a^{m-n-2}x^{n+1} \ldots$$

Ces deux quantités devant être égales quel que soit x, il faut que les coefficiens des puissances semblables de x soient égaux; donc, en ne considérant que ceux qui affectent $a^{m-n-1}x^{n}$, on aura

$$N(n+1) = M(m-n), \quad \text{d'où} \quad N = \frac{M(m-n)}{n+1}.$$

On voit par là selon quelle loi un coefficient quelconque se forme du précédent. Elle est la même qu'on a trouvée pour le cas d'un exposant entier positif (215); et comme nous avons reconnu que les deux premiers termes du développement sont composés de la même manière quel que soit l'exposant m, il en sera encore ainsi de tous les autres termes.

Donc, pour toutes les valeurs de m, on aura toujours la formule

$$(a+x)^{m} = a^{m} + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^{2} + \text{etc.}$$

Lorsque m sera entier et positif, elle s'arrêtera à x^{m}; dans tous les autres cas elle se prolongera indéfiniment.

Séries exponentielles.

563. Lorsqu'on fait $x=0$, la fonction a^{x} se réduit à l'unité. C'est pourquoi je prendrai l'unité pour premier terme du développement de a^{x}, et je poserai

$$a^{x} = 1 + Ax + Bx^{2} + Cx^{3} + Dx^{4} + \text{etc.},$$

A', B, C, D,.... étant des coefficiens indéterminés qu'on suppose indépendans de x. Pour les trouver, je me servirai de la propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

En changeant dans la série x en y, et ensuite x en $x+y$, on a

$$a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.},$$
$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \text{etc.};$$

donc, pour vérifier la propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$, on doit avoir

$$1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \text{etc.} =$$
$$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.})(1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \text{etc}).$$

Si on effectue les opérations indiquées, et si on considère en particulier la partie qui contient la première puissance de y dans chaque membre, ces deux parties devant être égales, on aura

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.} = A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \text{etc.}$$

Mais cette égalité doit elle-même avoir lieu quel que soit x; donc les puissances semblables de x doivent avoir les mêmes coefficiens; donc

$$2B = A^2, \quad 3C = AB, \quad 4D = AC, \quad \text{etc.},$$

d'où $$B = \frac{A^2}{2}, \quad C = \frac{{}^3}{2.3}, \quad D = \frac{A^4}{2.3.4}, \quad \text{etc.};$$

et, en substituant ces valeurs, la série deviendra

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

La quantité A reste encore à déterminer, et l'on y parvient très-simplement en faisant $Ax = 1$ ou $x = \frac{1}{A}$. Pour cette valeur de x, on aura

$$a^{\frac{1}{A}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Selon l'usage, je nommerai e la quantité représentée par cette série numérique; et, en prenant les logarithmes des deux membres, il viendra

$$\frac{1}{A}\log a = \log e, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{\log a}{\log e}.$$

Pour plus de simplicité, je supposerai que les logarithmes soient pris dans le système dont la base est e, et dans cette hypothèse je les indiquerai par la seule initiale l. Alors on aura $le=1$, $A=la$, et par suite le développement de a^x sera

$$a^x=1+x la+\frac{x^2(la)^2}{2}+\frac{x^3(la)^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Si l'exponentielle était e^x, il faudrait faire $a=e$, $la=1$; et l'on aurait simplement

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.}$$

564. Je vais prouver ici que e est un nombre incommensurable. La valeur de e est celle-ci

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}$$

Il est évident qu'elle surpasse 2, et il est facile de voir qu'elle est au-dessous de 3. En effet la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+$etc. est moindre que celle des termes de la progression géométrique $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ etc, et cette dernière somme est égale à 1.

Maintenant admettons que, $\frac{p}{q}$ étant un nombre fractionnaire, on puisse avoir

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}\cdots+\frac{1}{2.3\ldots q}+\frac{1}{2.3\ldots q(q+1)}+\text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par le produit $2.3\ldots(q-1)q$, il viendrait

$$2.3\ldots(q-1)\times p=\text{N}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\text{etc.},$$

N désignant un nombre entier. Or, les fractions qui sont ajoutées à N composent une somme moindre que la progression géométrique $\frac{1}{q+1}+\left(\frac{1}{q+1}\right)^2+\left(\frac{1}{q+1}\right)^3+$etc., et cette dernière somme est égale à la fraction $\frac{1}{q}$; donc il s'ensuivrait qu'en ajoutant à un nombre entier une fraction moindre que celle-là le résultat serait encore un nombre entier, ce qui est absurde. Donc le nombre e est irrationnel.

Comme les termes de la série numérique décroissent très-rapidement, il suffira d'en prendre un petit nombre pour obtenir e avec une grande approximation. J'ai déjà rapporté ailleurs (333) la valeur de e, $e=2,718\ 281\ 828\ldots$

Séries logarithmiques.

565. On n'essaiera pas de développer $\log x$ en une série de la forme $A+Bx+Cx^2+$ etc., attendu que, pour l'hypothèse $x=0$, $\log x$ devient infini. Mais on cherchera le développement de $\log(1+x)$; et comme $x=0$ donne $\log(1+x)=0$, on posera

[1] $$\log(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}$$

Changeons x en $x+y$, il viendra

$$\log(1+x+y)=A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\text{etc.}$$

Mais $1+x+y=(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right)$; donc $\log(1+x+y)=\log(1+x)+\log\left(1+\frac{y}{1+x}\right)$. Or, si on change x en $\frac{y}{1+x}$, l'égalité [1] donne,

$$\log\left(1+\frac{y}{1+x}\right)=\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\text{etc.};$$

et par suite il vient

$$\log(1+x+y)=\log(1+x)+\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\text{etc.}$$

On a ainsi une seconde expression de $\log(1+x+y)$. Dans l'une et l'autre les multiplicateurs des puissances semblables de y doivent être égaux; et de là on conclut facilement

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\text{etc.}=\frac{A}{1+x}.$$

En chassant le dénominateur $1+x$, et ôtant le terme A qui est commun aux deux membres, on trouve

$$(2B+A)x+(3C+2B)x^2+(4D+3C)x^3+\text{etc.}=0;$$

et comme x doit rester indéterminé, il faut qu'on ait $2B+A=0$, $3C+2B=0$, $4D+3C=0$, etc. De là on déduit $B=-\frac{1}{2}A$, $C=\frac{1}{3}A$, $D=-\frac{1}{4}A$, etc.; et par conséquent la série [1] devient

$$\log(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

La détermination du coefficient A est assez délicate. Divisons par x les deux membres de l'égalité ci-dessus, il vient

$$\frac{\log(1+x)}{x} = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \text{etc.}\right).$$

Alors le second membre se réduit à A par l'hypothèse $x=0$. Mais le premier se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et la difficulté est d'en connaître la vraie valeur. Soit fait $x = \frac{1}{n}$: on aura

$$\frac{\log(1+x)}{x} = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Si on développe la puissance, on trouve

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \text{etc.}$$
$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right) + \text{etc.}$$

L'hypothése $x=0$ répond à $n=\infty$: or, si on suppose $n=\infty$, le second membre de la dernière égalité se réduit à la série numérique $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$, déjà remarquée n° 563; donc $A = \log e$, et par conséquent

$$[2] \qquad \log(1+x) = \log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

Jusqu'ici les logarithmes appartiennent à telle base qu'on voudra; mais si on adopte e pour base on a $\log e = 1$, et en n'employant alors que la seule initiale l pour désigner les logarithmes, on a

$$[3] \qquad \text{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

566. Par ce qui précède, il est évident que A ou $\log e$ est le rapport de l'accroissement de $\log(1+x)$ à x lorsque x est très-petit : cette quantité n'est donc autre chose que celle à laquelle on a donné le nom de *module* dans le n° 330. Lorsqu'on prend e pour la base, ce module devient égal à 1; par conséquent e est la base des logarithmes népériens (331).

Il est d'ailleurs évident qu'on transportera les logarithmes népériens dans un système quelconque en les multipliant par le module propre à ce système. On a vu plus haut que ce module était égal à $\log e$. Mais si on appelle a la base du système dont il

s'agit, on a évidemment $a^{\log e} = e$; donc en prenant les logarithmes népériens des deux membres, il viendra

$$\log e \times \mathrm{l}a = 1, \text{ d'où } \log e = \frac{1}{\mathrm{l}a}.$$

Ainsi, en désignant le module par M, on aura également

$$\mathrm{M} = \log e \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{l}a}.$$

567. Les séries [2] et [3] ne sont convergentes que pour les valeurs de x moindres que 1, mais elles servent à en trouver d'autres qui conviennent aux valeurs plus grandes. Il suffira de s'occuper de la série [3]. Si on change x en $-x$, elle donne

$$\mathrm{l}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.};$$

et, si on retranche $\mathrm{l}(1-x)$ de $\mathrm{l}(1+x)$, on trouve le logarithme du quotient de $1+x$ par $1-x$, savoir :

$$\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right).$$

Maintenant, posons $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n}$, d'où $x = \frac{z}{2n+z}$; puis, observons qu'alors $\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \mathrm{l}\left(1+\frac{z}{n}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{n+z}{n}\right) = \mathrm{l}(n+z) - \mathrm{l}n$: on conclura

$$\mathrm{l}(n+z) = \mathrm{l}n + 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

formule qui est assez commode pour s'élever de $\mathrm{l}n$ à $\mathrm{l}(n+z)$.

Après avoir calculé les logarithmes népériens, on les fera passer dans le système vulgaire, dont la base est 10, en les multipliant par le module de ce système. Pour avoir ce module, il suffit donc de connaître les logarithmes d'un même nombre dans chaque système, et de diviser le second logarithme par le premier. Le nombre qu'il convient de choisir est la base 10 elle-même, parce que son logarithme dans le second système est l'unité. Voici comment on trouve le log. nép. de 10.

On calcule d'abord $\mathrm{l}2$ en faisant $n=1$, $z=1$, dans la formule ci-dessus; puis on a $\mathrm{l}4 = 2\mathrm{l}2$; puis la formule donne $\mathrm{l}5$ en y faisant $n=4$, $z=1$; puis enfin on a $\mathrm{l}10 = \mathrm{l}5 + \mathrm{l}2$.

C'est ainsi que s'obtiennent les deux valeurs déjà rapportées nos 333 et 334, $l10=2,302\,585\,092\ldots$, $M=0,434\,294\,481\ldots$.

Démonstration des formules précédentes en considérant directement les séries elles-mêmes.

568. Si le lecteur se rappelle les observations générales que j'ai présentées n° 558, sur les développemens en séries, il reconnaîtra combien laissent à désirer, sous le rapport de la rigueur, les méthodes qui viennent d'être employées. Pour corriger ce qu'elles ont d'imparfait, je vais considérer les séries en elles-mêmes et prouver qu'elles sont en effet égales aux quantités dont on les a déduites. L'analyse suivante a été donnée par Destainville dans le t. IX des Annales de Mathém. publiées par M. Gergonne.

569. Soient les séries indéfinies

$$\varphi(a)=1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

$$\varphi(b)=1+b\frac{z}{1}+b(b+k)\frac{z^2}{1.2}+b(b+k)(b+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

$$\varphi(a+b)=\begin{cases}1+(a+b)\dfrac{z}{1}+(a+b)(a+b+k)\dfrac{z^2}{1.2}\\ +(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\dfrac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}\end{cases}$$

J'emploie ici $\varphi(a)$ comme notation abrégée pour désigner la première série; et en même temps j'établis la convention que, si dans cette série on remplace a par une quantité quelconque u, la nouvelle série sera représentée par $\varphi(u)$. Cela posé, je vais démontrer qu'on doit toujours avoir

$$\varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a+b).$$

Pour y parvenir, formons d'abord le développement du produit $\varphi(a)\times\varphi(b)$. En effectuant avec ordre la multiplication, on trouve

$$\varphi(a)\times\varphi(b)=$$

$$1\begin{array}{l}+a\\+b\end{array}\left|\frac{z}{1}\begin{array}{r}+a(a+k)\\+2ab\\+b(b+k)\end{array}\right|\frac{z^2}{1.2}\begin{array}{r}+a(a+k)(a+2k)\\+3ab(a+k)\\+3ab(b+k)\\+b(b+k)(b+2k)\end{array}\left|\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right.$$

Si on compare ce produit avec $\varphi(a+b)$ on voit sur-le-champ que les deux premiers termes sont les mêmes. Le troisième est aussi le même : car on a évidemment

$$\begin{array}{l} a(a+k)+2ab+b(b+k)=a(a+k)+ab+ab+b(b+k) \\ \quad =a(a+b+k)+b(a+b+k)=(a+b)(a+b+k). \end{array}$$

En continuant, on pourrait prouver que l'égalité a lieu dans les termes suivans; mais, pour plus de généralité, je vais démontrer qu'en supposant l'égalité établie jusqu'à une puissance quelconque z^{p-1} inclusivement, elle doit encore subsister entre les termes affectés de z^p. Avec de l'attention il est facile de voir que dans le produit $\varphi(a)\times\varphi(b)$ les termes en z^{p-1} et z^p sont

$$\left.\begin{array}{l}
a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}\,ba(a+k)(a+2k)\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\
+\frac{p-1}{1}.\frac{p-2}{2}\,b(b+k)\,a(a+k)\ldots\ldots[a+(p-4)k] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p-1}{1}.\frac{p-2}{2}\,a(a+k)\,b(b+k)\ldots\ldots[b+(p-4)k] \\
+\frac{p-1}{1}\,ab(b+k)(b+2k)\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\
+b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots[b+(p-2)k]
\end{array}\right\}\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+a(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots[a+(p-1)k] \\
+\frac{p}{1}\,ba(a+k)(a+2k)\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\
+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\,b(b+k)\,a(a+k)\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\,a(a+k)\,b(b+k)\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\
+\frac{p}{1}\,ab(b+k)(b+2k)\ldots\ldots[b+(p-2)k] \\
+b(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots[b+(p-1)k]
\end{array}\right\}\frac{z^{p}}{1.2\ldots p}$$

Maintenant remarquons que, dans la partie en z^p, les multiplicateurs où entre p se prêtent aux décompositions suivantes :

$$\frac{p}{1} = \frac{p-1}{1} + 1,$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2} + \frac{p-1}{1},$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3} = \frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\frac{p-3}{3} + \frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2},$$

etc.

Alors on verra que toute la quantité affectée de z^p peut se séparer en deux parties, dont l'une contient le facteur a dans tous ses termes, tandis que l'autre contient le facteur b. Ces parties sont

$$\left.\begin{array}{l}
(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-1)k] \\
+\frac{p-1}{1}b(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}b(b+k)(a+k)\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p-1}{1}(a+k)b(b+k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\
+b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]
\end{array}\right\}\frac{az^p}{1.2\ldots p}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k] \\
+\frac{p-1}{1}(b+k)a(a+k)\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-3)k] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}a(a+k)(b+k)\ldots\ldots[b+(p-3)k] \\
+\frac{p-1}{1}a(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k] \\
+(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-1)k]
\end{array}\right\}\frac{bz^p}{1.2\ldots p}.$$

Dans la première partie, la quantité placée à gauche de l'accolade est ce que devient le coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$, lorsqu'on y

change a en $a+k$; et dans la seconde, elle est ce qu'il devient lorsqu'on y change b en $b+k$. Or, par hypothèse, ce coefficient est le même que celui qui affecte $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$ dans la série $\varphi(a+b)$, c'est-à-dire qu'on le suppose réductible à la forme

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(p-2)k];$$

donc les deux quantités placés avant les accolades s'obtiendront en changeant dans cette dernière expression a en $a+k$, et b en $b+k$. Chacun de ces changemens donne le même résultat

$$(a+b+k)(a+b+2k)(a+b+3k)\ldots[a+b+(p-1)k];$$

donc, en ayant égard à ce facteur commun, la somme des deux parties ci-dessus, qui contiennent z^p, sera

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(p-1)k]\frac{z^p}{1.2\ldots p},$$

laquelle est identique avec le terme en z^p de la série $\varphi(a+b)$.

Ainsi, en admettant qu'il y ait égalité entre les termes des séries représentées par $\varphi(a)\varphi(b)$ et par $\varphi(a+b)$ jusqu'à une certaine puissance de z, elle doit encore exister pour la puissance supérieure. Or, cette égalité a été reconnue pour les trois premiers termes; donc elle a lieu pour quatre termes; si elle a lieu pour quatre termes, elle a donc lieu aussi pour cinq; et ainsi indéfiniment.

570. La proposition qu'on vient de démontrer revient à dire, en d'autres termes, que la série $\varphi(a)$ est une telle fonction de a que, pour la multiplier par une fonction semblable de b, il suffit d'ajouter b à a. Sous ce rapport, elle est parfaitement analogue à l'exponentielle Z^a, dans laquelle Z serait une quantité indépendante de a; et l'on va voir que cette analogie se maintient aussi dans les conséquences.

Reprenons l'équation démontrée

$$[1] \qquad \varphi(a).\varphi(b)=\varphi(a+b).$$

On peut y remplacer a par $a-b$: alors elle devient $\varphi(a-b).\varphi(b)=\varphi(a)$, et l'on en tire, pour la division de $\varphi(a)$ par $\varphi(b)$,

$$[2] \qquad \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\varphi(a-b).$$

Maintenant remarquons que, dans la partie en z^p, les multiplicateurs où entre p se prêtent aux décompositions suivantes :

$$\frac{p}{1}=\frac{p-1}{1}+1,$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}+\frac{p-1}{1},$$

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}=\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\frac{p-3}{3}+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2},$$

etc.

Alors on verra que toute la quantité affectée de z^p peut se séparer en deux parties, dont l'une contient le facteur a dans tous ses termes, tandis que l'autre contient le facteur b. Ces parties sont

$$\left.\begin{array}{l}
(a+k)(a+2k)(a+3k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-1)k]\\
+\frac{p-1}{1}\,b(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k]\\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,b(b+k)(a+k)\ldots\ldots[a+(p-3)k]\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\frac{p-1}{1}\,(a+k)\,b(b+k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-3)k]\\
+\,b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]
\end{array}\right\}\frac{az^p}{1.2\ldots p}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\,a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\ldots\ldots[a+(p-2)k]\\
+\frac{p-1}{1}\,(b+k)a(a+k)\ldots\ldots\ldots[a+(p-3)k]\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p-2}{2}\,a(a+k)(b+k)\ldots\ldots[b+(p-3)k]\\
+\frac{p-1}{1}\,a(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-2)k]\\
+\,(b+k)(b+2k)(b+3k)\ldots\ldots\ldots[b+(p-1)k]
\end{array}\right\}\frac{bz^p}{1.2\ldots p}.$$

Dans la première partie, la quantité placée à gauche de l'accolade est ce que devient le coefficient de $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$, lorsqu'on y

change a en $a+k$; et dans la seconde, elle est ce qu'il devient lorsqu'on y change b en $b+k$. Or, par hypothèse, ce coefficient est le même que celui qui affecte $\frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$ dans la série $\varphi(a+b)$, c'est-à-dire qu'on le suppose réductible à la forme

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(p-2)k];$$

donc les deux quantités placés avant les accolades s'obtiendront en changeant dans cette dernière expression a en $a+k$, et b en $b+k$. Chacun de ces changemens donne le même résultat

$$(a+b+k)(a+b+2k)(a+b+3k)\ldots[a+b+(p-1)k];$$

donc, en ayant égard à ce facteur commun, la somme des deux parties ci-dessus, qui contiennent z^p, sera

$$(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\ldots[a+b+(p-1)k]\frac{z^p}{1.2\ldots p},$$

laquelle est identique avec le terme en z^p de la série $\varphi(a+b)$.

Ainsi, en admettant qu'il y ait égalité entre les termes des séries représentées par $\varphi(a)\varphi(b)$ et par $\varphi(a+b)$ jusqu'à une certaine puissance de z, elle doit encore exister pour la puissance supérieure. Or, cette égalité a été reconnue pour les trois premiers termes; donc elle a lieu pour quatre termes; si elle a lieu pour quatre termes, elle a donc lieu aussi pour cinq; et ainsi indéfiniment.

570. La proposition qu'on vient de démontrer revient à dire, en d'autres termes, que la série $\varphi(a)$ est une telle fonction de a que, pour la multiplier par une fonction semblable de b, il suffit d'ajouter b à a. Sous ce rapport, elle est parfaitement analogue à l'exponentielle Z^a, dans laquelle Z serait une quantité indépendante de a; et l'on va voir que cette analogie se maintient aussi dans les conséquences.

Reprenons l'équation démontrée

[1] $$\varphi(a).\varphi(b)=\varphi(a+b).$$

On peut y remplacer a par $a-b$: alors elle devient $\varphi(a-b).\varphi(b)=\varphi(a)$, et l'on en tire, pour la division de $\varphi(a)$ par $\varphi(b)$,

[2] $$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\varphi(a-b).$$

Si on change b en $b+c$, l'équation [1] devient $\varphi(a).\varphi(b+c) = \varphi(a+b+c)$. Mais, en vertu de cette même équation, on a $\varphi(b).\varphi(c)=\varphi(b+c)$; donc

$$\varphi(a).\varphi(b).\varphi(c)=\varphi(a+b+c).$$

En changeant c en $c+d$, et continuant de la même manière, on voit clairement, quel que soit le nombre des facteurs, qu'on doit toujours avoir

$$\varphi(a).\varphi(b).\varphi(c)\ldots=\varphi(a+b+c\ldots).$$

Supposons toutes les quantités $a,b,c,\ldots$ égales à a, et leur nombre égal à m, cette équation donnera

[3] $$[\varphi(a)]^m=\varphi(ma).$$

En remplaçant dans celle-ci a par $\frac{a}{m}$, il vient $\left[\varphi\left(\frac{a}{m}\right)\right]^m=\varphi(a)$; donc, pour l'extraction des racines, on a

[4] $$\sqrt[m]{\varphi(a)}=\varphi\left(\frac{a}{m}\right).$$

La formule [3] n'est encore démontrée que pour un exposant entier positif. On l'étendra à tous les exposans positifs fractionnaires, en remarquant que les formules précédentes donnent $\sqrt[n]{[\varphi(a)]^m}=\sqrt[n]{\varphi(ma)}=\varphi\left(\frac{ma}{n}\right)$. Mais $\sqrt[n]{[\varphi(a)]^m}$ est la même chose que $[\varphi(a)]^{\frac{m}{n}}$; donc

[5] $$[\varphi(a)]^{\frac{m}{n}}=\varphi\left(\frac{ma}{n}\right).$$

Pour étendre aussi la formule aux exposans négatifs, on remarquera qu'en désignant par m et r des nombres positifs quelconques, les formules démontrées donnent

$$[\varphi(a)]^{-m}=\frac{[\varphi(a)]^r}{[\varphi(a)]^{m+r}}=\frac{\varphi(ra)}{\varphi(ma+ra)}=\varphi(ra-ma-ra);$$

donc enfin

[6] $$\varphi(a)^{-m}=\varphi(-ma).$$

Ainsi, quel que soit l'exposant, on a toujours

$$[\varphi(a)]^m=\varphi(ma),$$

ou bien, en remettant les séries représentées par $\varphi(a)$ et $\varphi(ma)$,

$$[7]\quad \left[1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right]^m$$
$$=1+ma\frac{z}{1}+ma(ma+k)\frac{z^2}{1.2}+ma(ma+k)(ma+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

571. Dans l'équation [7], a et k sont quelconques. Si on y fait $a=1$ et $k=-1$, elle devient

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3+\text{etc.};$$

la formule du *binôme* est ainsi démontrée pour un exposant quelconque. On sait comment on peut déduire $(a+x)^m$ de $(1+z)^m$.

572. Dans la même équation [7] faisons $k=0$, $a=1$, $z=1$, $m=\alpha x$: il viendra

$$\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{etc.}\right)^{\alpha x}=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La série numérique du premier membre est le nombre e, base des logarithmes népériens : ainsi, on peut écrire

$$e^{\alpha x}=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si on pose $e^\alpha=a$, α sera le logarithme népérien de a, et on retrouve la série exponentielle

$$a^x=1+\frac{x\text{l}a}{1}+\frac{x^2(\text{l}a)^2}{1.2}+\frac{x^3(\text{l}a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

573. Pour avoir la série logarithmique, on changera dans cette dernière formule a en $1+x$ et x en m. Il vient

$$(1+x)^m=1+\frac{m\text{l}(1+x)}{1}+\frac{m^2[\text{l}(1+x)]^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Mais, en développant la puissance $(1+x)^m$, on a

$$(1+x)^m=1+m\frac{x}{1}+m(m-1)\frac{x^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Egalons donc les deux séries, supprimons l'unité de part et d'autre et divisons par m, on aura

$$\text{l}(1+x)+\frac{m[\text{l}(1+x)]^2}{1.2}+\frac{m^2[\text{l}(1+x)]^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=\frac{x}{1}+(m-1)\frac{x^2}{1.2}+(m-1)(m-2)\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Enfin, en faisant $m=0$ dans cette dernière équation, on retrouve la formule connue

$$1(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Génération des séries récurrentes.

574. Soit la fraction

$$\frac{a'}{a+bx}:$$

en effectuant, d'après la règle ordinaire, la division de a' par $a+bx$, on trouve au quotient une suite de termes dont la loi se manifeste promptement. On peut encore écrire la fraction ainsi $a'(a+bx)^{-1}$, puis se servir de la formule du binôme. Mais la méthode des coefficiens indéterminés conduira au même résultat, et sera plus commode lorsque la fraction sera plus compliquée.

Sans entrer dans les détails de la division, on reconnaît de suite que le quotient sera une série de la forme $A+Bx+Cx^2+$ etc.; c'est pourquoi l'on posera

$$\frac{a'}{a+bx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

A, B, C, D, ... étant des coefficiens à déterminer. En multipliant de part et d'autre par $a+bx$, il viendra

$$a'=Aa+\left.\begin{matrix}Ba\\+Ab\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}Ca\\+Bb\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}Da\\+Cb\end{matrix}\right|x^3+\text{etc.}$$

Or, le produit du quotient par le diviseur devant reproduire identiquement le dividende, on doit avoir

$$Aa=a',\quad Ba+Ab=0,\quad Ca+Bb=0,\quad Da+Cb=0,\quad \text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{a'}{a},\quad B=-\frac{b}{a}A,\quad C=-\frac{b}{a}B,\quad D=-\frac{b}{a}C,\quad \text{etc.}$$

Donc, chaque coefficient, à partir du second, est le produit du précédent par $-\frac{b}{a}$; ou, ce qui est la même chose, chaque terme est le produit du précédent par $-\frac{bx}{a}$. Ici la série n'est qu'une simple progression géométrique.

Maintenant considérons le fraction

$$\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}.$$

On posera semblablement

$$\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ etc.};$$

en multipliant de part et d'autre par le dénominateur $a+bx+cx^2$, il viendra

$$a'+b'x=Aa+\left.\begin{matrix}Ba\\+Ab\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}Ca\\+Bb\\+Ac\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}Da\\+Cb\\+Bc\end{matrix}\right|x^3+\text{ etc.};$$

puis, pour que les deux membres soient identiques, il faudra qu'on ait

$$Aa=a',\quad Ba+Ab=b',\quad Ca+Bb+Ac=o,$$
$$Da+Cb+Bc=o,\text{ etc.},$$

d'où l'on tire les valeurs

$$A=\frac{a'}{a},\quad B=\frac{b'-Ab}{a},\quad C=-\frac{c}{a}A-\frac{b}{a}B,$$

$$D=-\frac{c}{a}B-\frac{b}{a}C,\quad\text{etc.}$$

Ici on voit qu'à partir du 3[e] terme, chaque coefficient est la somme des deux précédens multipliés respectivement par $-\frac{c}{a}$ et $-\frac{b}{a}$, ou que chaque terme est la somme des deux précédens multipliés par $-\frac{cx^2}{a}$ et $-\frac{bx}{a}$.

Si l'on posait encore

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ etc.},$$

on trouverait que chaque terme, à partir du 4[e], se compose des trois précédens multipliés respectivement par $-\frac{dx^3}{a}$, $-\frac{cx^2}{a}$, $-\frac{bx}{a}$.

Enfin, il devient alors évident qu'en général une fraction de la forme

$$\frac{a'+b'x+c'x^2 \ldots + h'x^{m-1}}{a+bx+cx^2 \ldots\ldots + kx^m}$$

doit donner naissance à une suite dont chaque terme, après les n premiers, se composera des n précédens multipliés respectivement par $-\frac{k}{a}x^m$, $-\frac{h}{a}x^{m-1}$, ... $-\frac{c}{a}x^2$, $-\frac{b}{a}x$.

On appelle *récurrentes* toutes les suites ainsi formées, et *échelle de relation* l'ensemble des quantités par lesquelles il faut multiplier plusieurs termes consécutifs pour avoir le terme suivant. On pourra dire aussi que la série est du 1er ordre, du 2e ordre, etc., selon le nombre des termes qui entrent dans l'échelle de relation.

Si l'expression qu'on développe a un numérateur de degré plus élevé que le dénominateur, ou de degré égal, on voit, par la manière même dont nous déterminons les coefficiens du développement, que la loi de la série sera toujours la même : seulement, elle sera retardée. Au reste, on pourra, si on veut, décomposer préalablement l'expression proposée en une partie entière, plus une fraction ayant un numérateur de degré inférieur au dénominateur.

575. Dans ce qui précède j'ai porté l'attention uniquement sur les termes entiers du quotient, parce que je voulais faire remarquer la loi de leur composition. Mais si on voulait avoir le quotient exact, il ne faudrait pas manquer d'ajouter aux termes entiers la fraction provenant du reste de la division ; et, d'après les observations faites dans un cas analogue (556), cette fraction ne doit pas être supprimée, lors même qu'on prolongerait le quotient indéfiniment, à moins qu'on ne prouve que dans ce cas elle doit devenir zéro. Or, il est facile de démontrer que c'est en effet ce qui arrivera si on n'attribue à x que des valeurs plus petites que l'unité et au-dessous d'une certaine limite. Mais, suivant l'usage adopté par tous les auteurs, je supprimerai ces détails et laisserai au lecteur le soin d'y suppléer.

Retour des séries récurrentes aux fractions génératrices.

576. *Une série récurrente étant donnée, on propose de retrouver la fraction génératrice.*

Dans cet énoncé, on suppose la série récurrente ordonnée par rapport à une indéterminée x. Soit

$$S = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

une telle série, ayant pour échelle de relation $[px^3,\ qx^2,\ rx]$. Puisque cette échelle contient trois termes, la fraction génératrice est de la forme

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}.$$

Si cette fraction était donnée, on a vu que l'échelle de relation serait $\left[-\frac{d}{a}x^3, -\frac{c}{a}x^2, -\frac{b}{a}x\right]$. Or cette fraction peut s'écrire de cette manière

$$\frac{\frac{a'}{a} + \frac{b'}{a}x + \frac{c'}{a}x^2}{1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3};$$

et alors on voit que les trois termes en x du dénominateur s'obtiendront sur-le-champ en prenant ceux de l'échelle de relation avec des signes contraires. Ainsi, on peut mettre la fraction génératrice sous la forme

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - rx - qx^2 - px^3},$$

et il n'y a plus qu'à déterminer α, β, γ. A cet effet, on pose

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - rx - qx^2 - px^3} = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.};$$

et comme en chassant le dénominateur, l'équation doit devenir identique, on conclut, en ne tenant compte que des trois premiers termes,

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = A + \left.\begin{array}{l} B \\ -Ar \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} C \\ -Br \\ -Aq \end{array}\right| x^2.$$

Par conséquent on aura, pour la fraction génératrice,

$$S = \frac{A + (B - Ar)\,x + (C - Br - Aq)x^2}{1 - rx - qx^2 - px^3}.$$

Par exemple, soit la série récurrente

$$S=1-2x-x^2-5x^3-4x^4-\text{etc.},$$

dont l'échelle de relation est $[+x^3, +4x^2, -2x]$. Dans la formule ci-dessus, on fera $A=1$, $B=-2$, $C=-1$, $p=1$, $q=4$, $r=-2$; et on trouvera

$$S=\frac{1-9x^2}{1+2x-4x^2-x^3}.$$

577. *Une série étant donnée, on veut reconnaître si elle est récurrente, et, dans ce cas, retrouver la fraction génératrice.*

C'est à LAGRANGE qu'est due la solution que je vais rapporter. Soit la série donnée

$$S=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

Cherchons d'abord si elle est égale à une fraction de la forme $\frac{a'}{a+bx}$, et posons $S=\frac{a'}{a+bx}$. De là on tire

$$\frac{1}{S}=\frac{a+bx}{a'}=\frac{a}{a'}+\frac{b}{a'}x;$$

donc le quotient de 1 par la série S doit être exact et de la forme $p+qx$. Alors la fraction génératrice serait exprimée ainsi :

$$S=\frac{1}{p+qx}.$$

Si la division ne s'arrête pas au deuxième terme, la série ne sera pas récurrente, ou elle proviendra d'un fraction plus compliquée. Posons $S=\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}$; on aura

$$\frac{1}{S}=\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x}=p+qx+\frac{a''x^2}{a'+b'x}:$$

c'est-à-dire qu'en divisant 1 par la série S, si on arrête le quotient aux termes de la forme $p+qx$, la série S_1x^2 qu'on obtient pour reste, et qui est toujours divisible par x^2, sera telle qu'après en avoir ôté ce facteur on devra avoir $\frac{S_1}{S}=\frac{a''}{a'+b'x}$.

De là on tire

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a'+b'x}{a''}=p_1+q_1x\,;$$

c'est-à-dire que la nouvelle division doit se terminer au 2[e] terme ; et alors, pour trouver la fraction génératrice, on aura les deux équations

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\quad \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x,$$

d'où

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=\frac{1}{p_1+q_1x};$$

et par conséquent la fraction génératrice sera

$$S=\frac{p_1+q_1x}{(p+qx)(p_1+q_1x)+x^2}.$$

Supposons que le quotient de S par S_1 ne soit pas exactement p_1+q_1x : si la série est récurrente, elle sera d'un ordre supérieur au second. Examinons si l'on peut avoir $S=\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}$.

De là on tire

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{a''+b''x}{a'+b'x+c'x^2}x^2:$$

c'est-à-dire qu'après avoir poussé jusqu'aux deux premiers termes le quotient de 1 par la série S, on trouvera pour reste une série dont tous les termes contiendront x^2 ; et que, si on désigne ce reste par S_1x_2, on devra avoir $\frac{S_1}{S}=\frac{a''+b''x}{a'+b'x+c'x^2}$.

Cette égalité donne

$$\frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{a'''}{a''+b''x}x^2;$$

donc, en désignant par S_2x^2 la série qu'on obtient pour reste, après avoir poussé la division de la série S par la série S_1 jusqu'aux termes p_1+q_1x, on doit avoir $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a'''}{a''+b''x}$.

De cette dernière égalité on tire

$$\frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x.$$

Ici les opérations s'arrêtent; et, pour remonter à la fraction génératrice, on aura les équations

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\ \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2,\ \frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x,$$

d'où

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=\frac{1}{p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2},\ \frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{p_2+q_2x}.$$

Il ne reste plus que quelques substitutions à effectuer pour former la fraction égale à S.

Sans aller plus loin, le lecteur aperçoit sans doute que les opérations successives, pour trouver les quotiens $p+qx, p_1+q_1x$, etc., et pour remonter ensuite à la fraction génératrice, ont une analogie frappante avec celles qu'on fait pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue et revenir ensuite à la fraction ordinaire. Cette observation tiendra lieu de règle générale. Si la série est récurrente, on en sera averti lorsqu'on arrivera à une division qui donnera un quotient exact de la forme $p+qx$.

Exemple. Supposons qu'on veuille savoir si la série des nombres 1,2,3, etc. est récurrente. Ce n'est point cette série numérique qu'il faut considérer, mais bien celle-ci

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.};$$

et alors les opérations s'exécutent comme ci-dessous :

Division de 1 par S.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.} \\
\underline{-1-2x-3x^2-4x^3-\text{etc.}} & \overline{1-2x} \\
\quad -2x-3x^2-4x^3-5x^4-\text{etc.} & \\
\quad \underline{+2x+4x^2+6x^3+8x^4+\text{etc.}} & \\
\qquad\quad x^2+2x^3+3x^4+\text{etc.}=S_1x^2. &
\end{array}$$

Division de S par S_1.

$$\begin{array}{l|l}
1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.} & 1+2x+3x^2+4x^3+\text{etc.} \\
\underline{-1-2x-3x^2-4x^3-\text{etc.}} & \overline{1} \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Donc la série S est récurrente, et l'on a

$$\frac{1}{S}=1-2x+\frac{S_1}{S}x^2,\quad \frac{S}{S_1}=1:$$

d'où

$$S=\frac{1}{1-2x+\frac{S_1}{S}x^2},\quad \frac{S_1}{S}=1;$$

et par conséquent

$$S=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Remarque. En cherchant une règle pour reconnaître si une série est récurrente, nous avons considéré la série comme provenant d'une fraction dont le numérateur est de degré inférieur au dénominateur. Mais si cette dernière condition n'avait pas lieu, il est facile d'apercevoir que les mêmes explications et par conséquent aussi la même règle subsisteraient toujours.

Sommation d'un nombre quelconque de termes consécutifs d'une série récurrente. Terme général.

578. *Trouver la somme d'un certain nombre de termes consécutifs d'une série récurrente.*

Pour fixer les idées, supposons que l'échelle de relation ait trois termes, que je désignerai simplement par les lettres p,q,r; et soit

$$A+B+C+D\ldots\ldots+K+L+M+N,$$

la suite de termes dont on demande la somme. Par la nature même de la suite, on a

$$\begin{aligned}D&=Ap+Bq+Cr,\\ E&=Bp+Cq+Dr,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ N&=Kp+Lq+Mr;\end{aligned}$$

et, en ajoutant ces égalités, il vient

$$(D+E\ldots+N)=(A+B\ldots+K)p+(B+C\ldots+L)q\\ +(C+D\ldots+M)r.$$

En désignant par S la somme cherchée, cette équation devient

$$S-A-B-C=(S-L-M-N)p+(S-A-M-N)q$$
$$+(S-A-B-N)r;$$

et de là il est facile de tirer la valeur de S,

$$S=\frac{A+B+C-r(A+B+N)-q(A+M+N)-p(L+M+N)}{1-r-q-p}.$$

579. *Trouver le terme général d'une série récurrente.*

Cette question est proposée la dernière parce qu'elle est celle dont la solution est la plus difficile. Supposons que la série ait pour fraction génératrice

$$F=\frac{a'+b'x\ldots+h'x^{m-1}}{a+bx\ldots+kx^{m}}.$$

On peut écrire cette fraction ainsi

$$F=(a'+b'x\ldots+h'x^{m-1})(a+bx\ldots+kx^{m})^{-1};$$

et alors, en développant la puissance -1, effectuant le produit et prenant dans ce produit la partie qui contient x à une puissance quelconque, il est clair qu'on aurait le terme général de la série récurrente. Mais la question se résout ordinairement par un autre procédé que je vais exposer.

On divise d'abord tous les termes de la fraction F par k et on l'écrit sous la forme

$$\frac{U}{V}=\frac{\alpha' x^{m-1}+\beta' x^{m-2}+\text{etc.}}{x^{m}+\alpha x^{m-1}+\beta x^{m-2}+\text{etc.}}.$$

On suppose toujours qu'elle a été réduite à sa plus simple expression, de sorte que U n'ait plus aucun facteur commun avec V.

On décompose ensuite le dénominateur en facteurs binômes tels que $x+a$, soit en égalant ce dénominateur à zéro, soit par tout autre moyen; et alors on considère la fraction comme résultant de la réduction de plusieurs autres, qui auraient pour dénominateurs ces différens facteurs. On détermine toutes ces fractions partielles, puis on forme le terme général du développement de chacune, et en faisant la somme de ces termes généraux, on aura le terme général de la série récurrente.

Dans cette décomposition en fractions partielles, il faut soigneu-

sement distinguer dans V les facteurs simples de ceux qui sont élevés à des puissances. Pour chaque facteur simple $x+a$, on prendra une fraction de la forme

$$\frac{M}{x+a}.$$

Pour chaque facteur tel que $(x+b)^n$ on en pourrait prendre une de la forme $\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\text{etc.}}{(x+b)^n}$; mais il est plus commode de n'avoir que des fractions à numérateurs monômes; et, au lieu d'une fraction comme la précédente, on en prend n comme celles-ci

$$\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}+\frac{N_2}{(x+b)^{n-2}}\ldots+\frac{N_{n-1}}{x+b}.$$

Il est sans doute inutile d'avertir que $M, N, N_1, \ldots$ représentent des quantités indépendantes de x.

En conséquence, si on admet que $V=(x+a)(x+b)^n\ldots$, on posera

$$\frac{U}{V}=\frac{M}{x+a}+\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}\ldots+\frac{N_{n-1}}{x+b}+\text{etc.},$$

et la question sera réduite pour le moment à déterminer les numérateurs M, N, N_1, etc. Mais cette détermination exigeant des développemens assez étendus, je la renverrai dans un article séparé, et je la regarderai ici comme effectuée.

La décomposition précédente une fois établie, la détermination du terme général de la série récurrente n'offre aucune difficulté. Chaque fraction partielle peut se mettre sous la forme $P(p+x)^{-\lambda}$, en désignant par λ un nombre entier positif qui peut être égal à 1. Si on développe cette puissance, on trouve facilement que le terme affecté de x^n est

$$\frac{-\lambda(-\lambda-1)(-\lambda-2)\ldots(-\lambda-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}Pp^{-\lambda-n}x^n.$$

C'est une somme de pareilles expressions, toutes renfermant x^n, et résultant des différentes fractions partielles, qui composent le terme général cherché.

Quand le dénominateur de la fraction génératrice renferme des facteurs imaginaires, ces facteurs amènent des quantités imaginaires dans le terme général. Cependant si on suppose, comme on le fait

toujours, que les coefficiens du numérateur et du dénominateur de la fraction proposée soient tous réels, il est évident *à priori* qu'en cherchant le développement de cette fraction au moyen de la division, le terme général ne renfermerait pas d'imaginaires. Par conséquent on est assuré que toutes les imaginaires provenant des facteurs du dénominateur devront se détruire.

Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions plus simples.

580. Reprenons la fraction rationnelle

$$\frac{U}{V}=\frac{\alpha' x^{m-1}+\beta' x^{m-2}+\text{etc.}}{x^m+\alpha x^{m-1}+\beta x^{m-2}+\text{etc.}},$$

que je regarderai toujours comme réduite à sa plus simple expression. Après avoir décomposé V en facteurs binômes, j'ai distingué ceux qui n'y entrent qu'au 1er degré de ceux qui y sont élevés à des puissances, et j'ai dit que, pour chaque facteur simple $x+a$, on prenait une fraction de la forme $\frac{M}{x+a}$, tandis que, pour un facteur tel que $(x+b)^n$, on en prenait n de la forme $\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}\ldots+\frac{N_{n-1}}{x+b}$. En conséquence, si l'on a $V=(x+a)(x+b)^n\ldots$, on devra poser

$$\frac{U}{V}=\frac{M}{x+a}+\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}\ldots+\frac{N_{n-1}}{x+b}+\text{etc.};$$

et c'est la détermination des numérateurs M, N, N_1, etc., qui doit nous occuper.

Le moyen qui s'offre tout d'abord est de réduire le second membre en une seule fraction de même dénominateur que celle du premier; et comme les deux numérateurs doivent alors être identiques, on égalera entre eux les coefficiens des termes semblables. On a ainsi m équations, qui serviront à trouver les m inconnues M, N, N_1, etc. Ces équations sont toutes du 1er degré; car, dans la réduction du second membre au même dénominateur, les inconnues ne se multiplient ni entre elles ni par elles-mêmes.

Par exemple, soit la fraction

$$\frac{x^2-x+6}{x^3-x^2-x+1}.$$

après avoir reconnu que le dénom $=(x+1)(x-1)^2$, on posera

$$\frac{x^2-x+6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{(x-1)^2}+\frac{N_1}{x-1}.$$

En réduisant au même dénominateur, il vient d'abord

$$x^2-x+6=\left\{\begin{array}{l|l|l} M & x^2-2M & x+M \\ +N_1 & \quad+\ N & \ +N \\ & & -N_1\,; \end{array}\right.$$

puis, en égalant les termes semblables, on a

$$M+N_1=1,\quad -2M+N=-1,\quad M+N-N_1=6.$$

De ces équations on tire $M=2$, $N=3$, $N_1=-1$; et par suite la fraction donnée se décompose ainsi :

$$\frac{x^6-x+6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

581. On sait que des équations du 1[er] degré peuvent être incompatibles. Ainsi, il y a eu lieu de craindre que ce cas ne se présente quelquefois pour celles qui servent à déterminer les numérateurs inconnus, et que par suite la décomposition en fractions partielles ne soit impossible. Mais je vais trouver les numérateurs de ces fractions par un procédé qui lèvera tous les doutes.

Soit $x+a$ un facteur simple de V, et supposons que la fraction proposée puisse se décomposer ainsi

$$\frac{U}{V}=\frac{M}{x+a}+\frac{U_1}{Q},$$

M étant une quantité indépendante de x, U_1 une quantité entière par rapport à x, et Q le quotient de V par $x+a$. En réduisant au même dénominateur, il vient

$$U=MQ+U_1(x+a),\quad \text{d'où}\quad U_1=\frac{U-MQ}{x+a}.$$

Pour que U_1 soit une fonction entière de x, il faut que $U-MQ$ soit divisible par $x+a$, ce qui exige que $U-MQ$ s'évanouisse en y faisant $x=-a$. Si donc on désigne par u et q ce que deviennent alors U et Q, on aura

$$u-Mq=0,\quad \text{d'où}\quad M=\frac{u}{q}.$$

Telle doit être la valeur de M, si la décomposition est possible. Cette valeur n'est ni nulle, ni infinie, ni indéterminée : car, d'un côté, la fraction proposée étant irréductible, U ne doit pas contenir le facteur $x+a$, de sorte que u est différent de zéro ; et d'un autre côté, $x+a$ n'entrant qu'une fois dans V ne doit plus se trouver dans Q, de sorte que q est aussi différent de zéro.

La valeur de M n'a été trouvée qu'en supposant la décomposition possible. Ainsi, à parler rigoureusement, cette supposition doit être vérifiée, ce qui est à présent sans difficulté. En effet, si on prend pour M la valeur trouvée, on est sûr que la quantité $U-MQ$ sera nulle en y faisant $x=-a$; donc cette quantité est divisible par $x+a$. Or, en nommant U_1 le quotient, on a

$$U-MQ=U_1(x+a),\ U=MQ+U_1(x+a),\ \frac{U}{V}=\frac{M}{x+a}+\frac{U_1}{Q},$$

et l'on obtient ainsi la décomposition qu'on voulait opérer.

La fraction $\frac{U_1}{Q}$ doit être irréductible; autrement, on pourrait réduire le second membre de la dernière égalité à une fraction de dénominateur plus simple que V ; donc la fraction proposée serait simplifiable, ce qui est contre la supposition.

Si $x+b$ est un autre facteur simple de V, il sera aussi un facteur simple de Q ; on pourra donc opérer sur $\frac{U_1}{Q}$ une décomposition semblable à celle qui a été faite sur $\frac{U}{V}$, et continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs simples. Mais on peut aussi, pour chaque fraction partielle, revenir à la fraction proposée elle-même.

Exemple. Soit la fraction

$$\frac{U}{V}=\frac{x^3+7x^2+13x+3}{x^4+3x^3+x^2-3x-2}.$$

Si on pose l'équation $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$, et si on cherche ses racines, on trouve $V=(x-1)(x+2)(x+1)^2$; par conséquent les deux facteurs simples donneront lieu, dans la décomposition, à deux fractions partielles de la forme

$$\frac{M}{x-1}+\frac{M_1}{x+2}.$$

Pour trouver M, il faut recourir à la formule $M=\frac{u}{q}$ dans laquelle u et q représentent les valeurs de U et Q correspondantes à $x=1$. Ici on a $U=x^3+7x^2+13x+3$, $Q=(x+2)(x+1)^2$, et la substitution de $x=1$ donne $u=24$, $q=12$; donc $M=\frac{24}{12}=2$.

Semblablement, pour calculer M_1, on fera $x=-2$ dans U et Q, mais alors il faut prendre $Q=(x-1)(x+1)^2$. Il vient ainsi $U=-3$, $q=-3$, $M_1=1$.

En conséquence les deux fractions partielles sont

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$

582. Occupons-nous maintenant des facteurs qui sont élevés à des puissances dans V. Soit $V=(x+b)^nQ$. Si on considère la fraction $\frac{U}{(x+b)Q}$, ce qui vient d'être dit montre qu'on peut la décomposer ainsi

$$\frac{U}{(x+b)Q}=\frac{N}{x+b}+\frac{U_1}{Q};$$

donc, en divisant par $(x+b)^{n-1}$, on aura

$$\frac{U}{(x+b)^nQ}=\frac{N}{(x+b)^n}+\frac{U_1}{(x+b)^{n-1}Q}.$$

Des décompositions toutes semblables donneront

$$\frac{U_1}{(x+b)^{n-1}Q}=\frac{N_1}{(x+b)^{n-1}}+\frac{U_2}{(x+b)^{n-2}Q},$$

$$\frac{U_2}{(x+b)^{n-2}Q}=\frac{N_2}{(x+b)^{n-2}}+\frac{U_3}{(x+b)^{n-3}Q},$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant n soit épuisé.

Le n° précédent prouve que les valeurs de N, N_1, N_2,... sont

$$N=\frac{u}{q},\ N_1=\frac{u_1}{q},\ N_2=\frac{u_2}{q},\ \text{etc},$$

u, u_1, u_2,... étant ce que deviennent U, U_1, U_2,... par la substitution de $x=-b$, et q étant ce que devient Q: il faut donc connaître les polynômes U_1, U_2,... Or, le n° cité montre que ces polynômes s'obtiendront successivement en effectuant les divisions indiquées dans les formules

$$U_1=\frac{U-NQ}{x+b},\quad U_2=\frac{U_1-N_1Q}{x+b},\ \text{etc.}$$

A l'égard des numérateurs $N_1, N_2, \ldots$ qui viennent aprè[s] faut observer que quelques uns d'entre eux peuvent être car il est possible que quelques uns des polynômes U_1, U renferment le facteur $x+b$.

Pour exemple reprenons celui du n° précédent, dans on a $U = x^3+7x^2+13x+3$, $V=x^4+3x^3+x^2-3x-$ $(x-1)(x+2)(x+1)^2$. Le facteur $(x+1)^2$ donnera deux tions partielles de la forme

$$\frac{N}{(x+1)^2}+\frac{N_1}{x+1}.$$

La quantité désignée par Q est $Q=(x-1)(x+2)$; et fait $x=-1$ dans U et Q, on trouve $u=-4$, $q=-2$: $N=\frac{4}{2}=2$.

Alors on cherche le polynôme U_1 par la formule $U_1=\frac{U-}{x\cdot}$

et tout calcul fait il vient $U_1 = x^2+4x+7$. La substituti[on] $x=-1$, dans U_1 et Q, donne $u_1=4$, $q=-2$: donc $N_2=$

Donc les deux fractions correspondantes à $(x+1)^2$ sont

$$\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1};$$

et, si on les réunit à celles qui ont été trouvées dans le n° p[récé]dent, on aura la décomposition complète de la fraction pro[posée], savoir :

$$\frac{x^3+7x^2+13x+3}{x^4+3x^3+x^2-3x-2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+1)^2}-$$

La décomposition d'une fraction rationnelle est utile no[n seu]lement pour la détermination du terme général d'une série [récur]rente, mais encore dans une théorie importante du calcul int[égral], et pour cette raison j'ai cru devoir la traiter avec étendue.

FIN.

